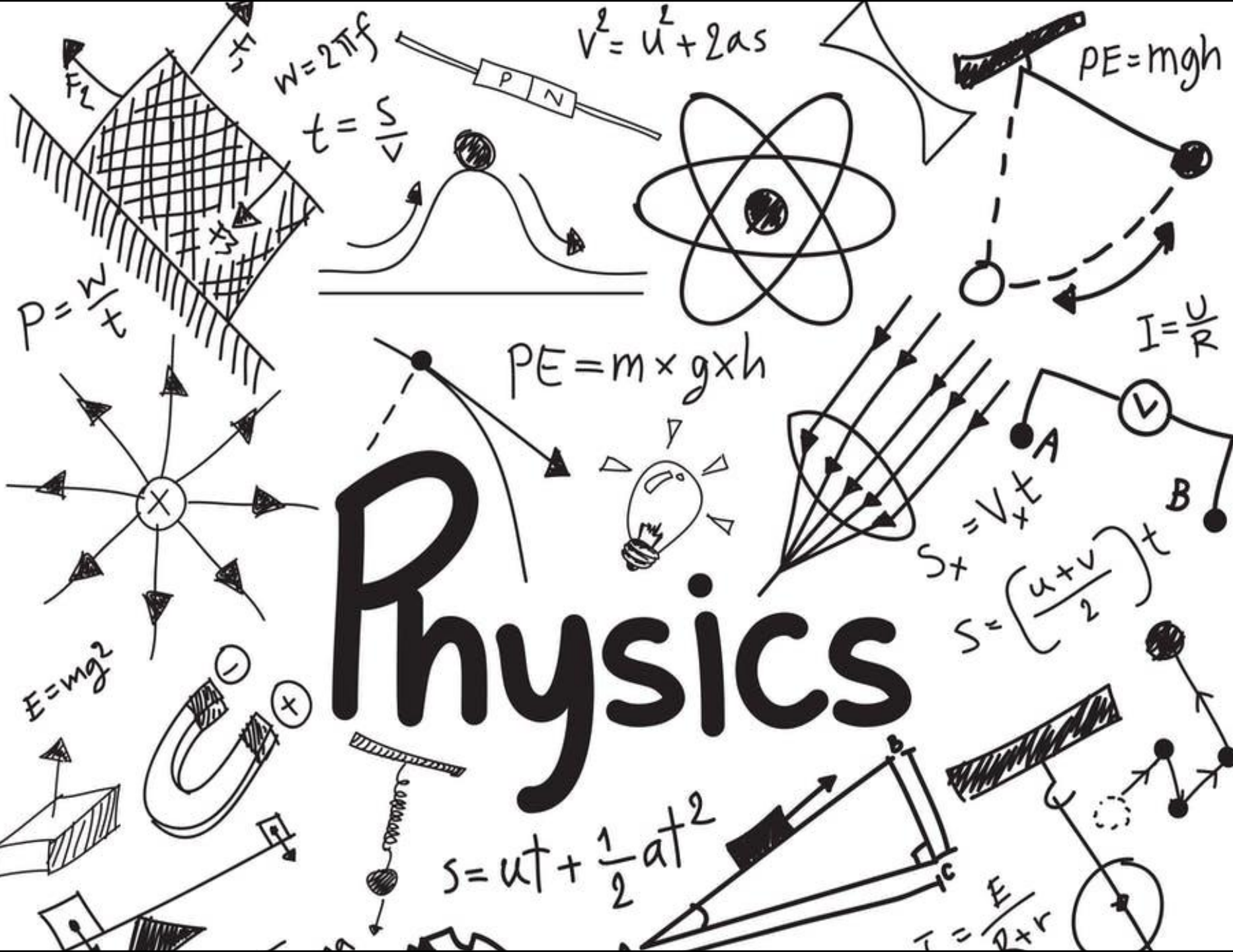


Physics



Reminder...

- Διαλέξεις
 - Προαιρετική παρουσία!
 - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
 - Δεν υπάρχουν απουσίες
- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

**Ταλαντώσεις και Μηχανικά
Κύματα**

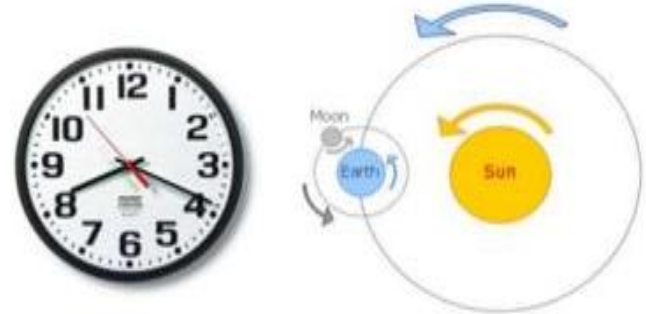
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Περιοδική κίνηση: ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά, σταθερά χρονικά διαστήματα

- Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα

- Δείκτες ρολογιού
- Κίνηση Γης γύρω από Ήλιο
- Διαλέξεις Φυσικής ☺
- Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη



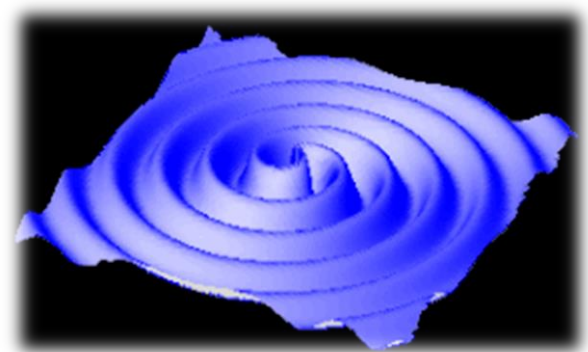
- Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t + T)$, $T > 0, \forall t > 0$,
με T να ονομάζεται **περίοδος** της κίνησης

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από τις έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων
- **Παραδείγματα:**
 - Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να μπορούν να ταλαντώνονται
 - Η **ραδιοφωνία και η τηλεόραση** βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσής τους
 - Η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
 - Ο **ήχος και η φωνή** παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις (χορδών, μεμβρανών, κλπ)

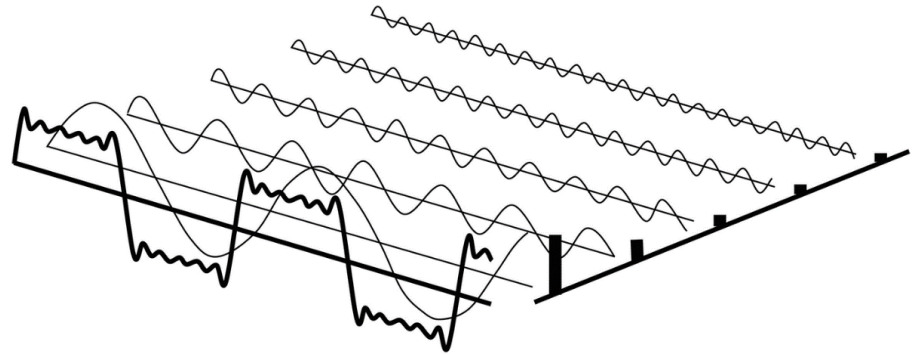
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Κύμα:** ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο
 - Τα κύματα είναι περιοδικά φαινόμενα
 - Αυτό που επαναλαμβάνεται είναι η διαταραχή
- Ο όρος «κύμα» χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής συνήθως διαμέσου ενός μέσου
 - Π.χ. μόρια νερού, στοιχεία νήματος, μόρια αέρα
- **Μηχανικό κύμα:** κύμα που απαιτεί κάποιο μέσο για τη διάδοσή του



Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Όλες οι περιοδικές κινήσεις (και άρα και τα κύματα) μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα **απλών αρμονικών κινήσεων**



- Απλή αρμονική κίνηση:** περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι
(α) **ανάλογη της θέσης του συστήματος**, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας, και
(β) με κατεύθυνση **προς τη θέση ισορροπίας**



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

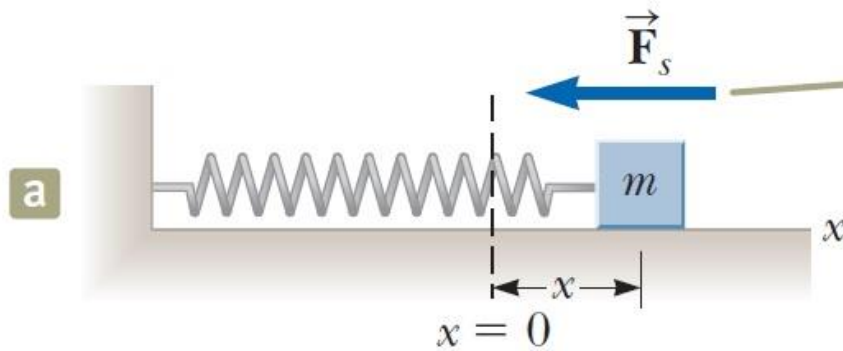
Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

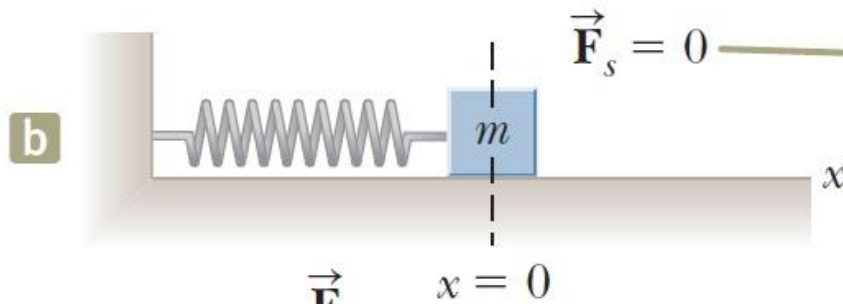
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ορισμός: Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σύστημα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση (ΑΑΤ)
- Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) 😊

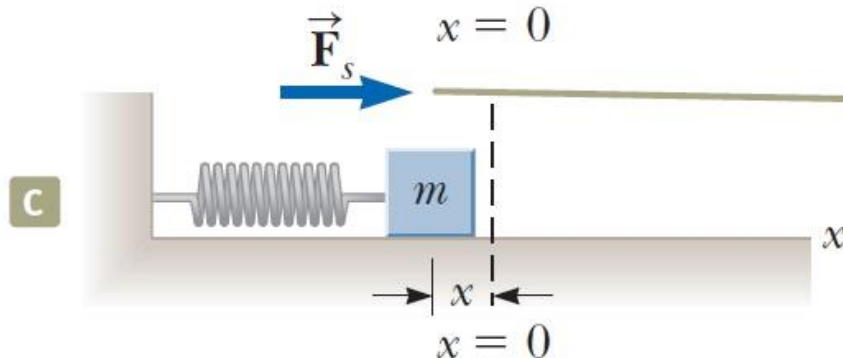
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

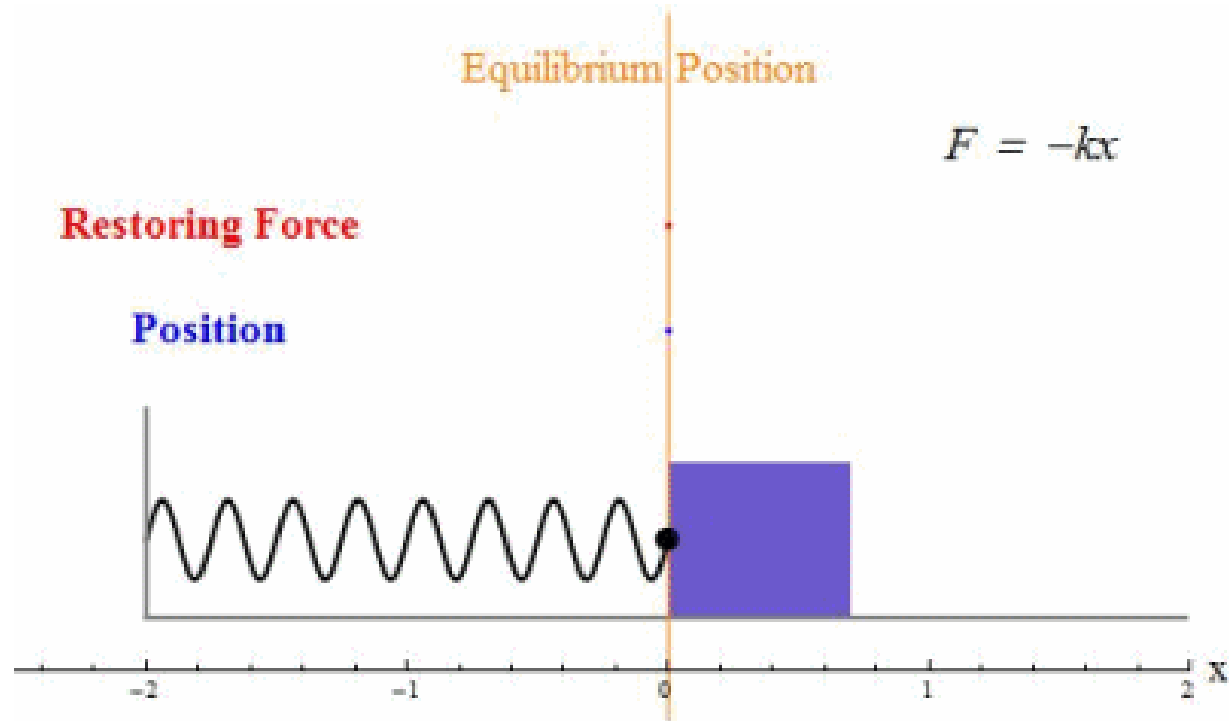


Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



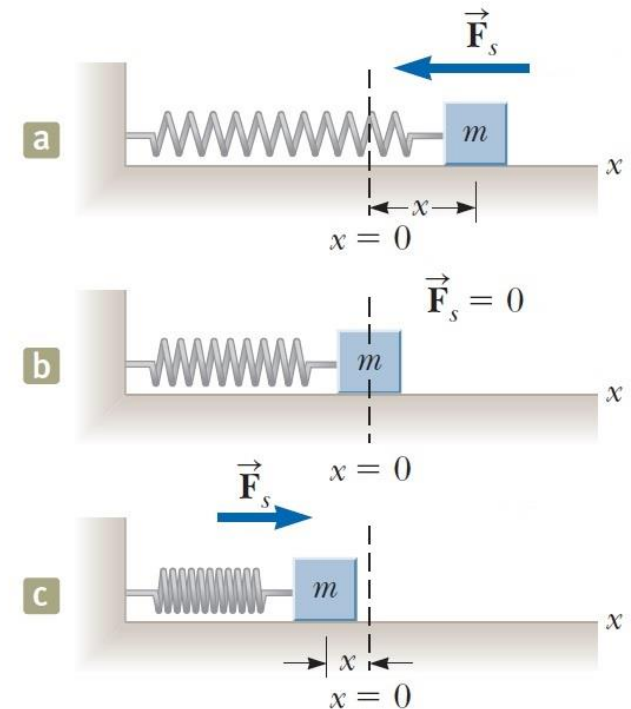
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Μοντελοποίηση: σώμα υπό επίδραση δύναμης

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_s = -kx = ma_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης (μετατόπισης από θέση ισορροπίας)
- Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Απλή Αρμονική Κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης

$$a_x = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Διαφορική εξίσωση

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση

Πλάτος
ταλάντωσης

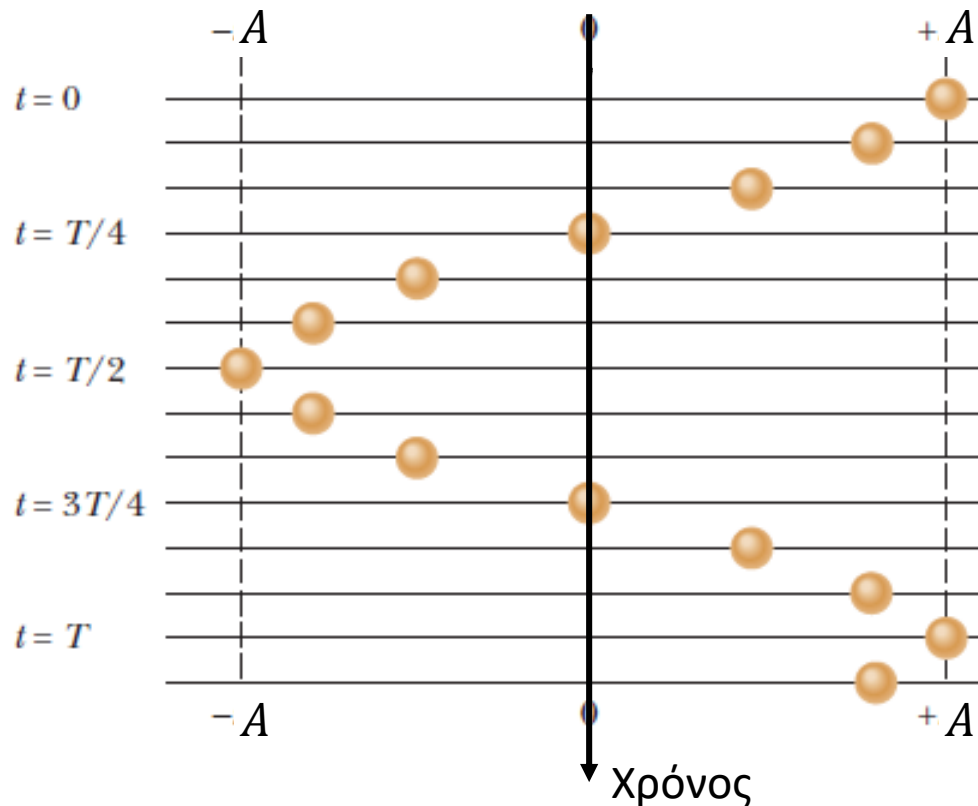
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Φάση μετατόπισης ή
αρχική φάση

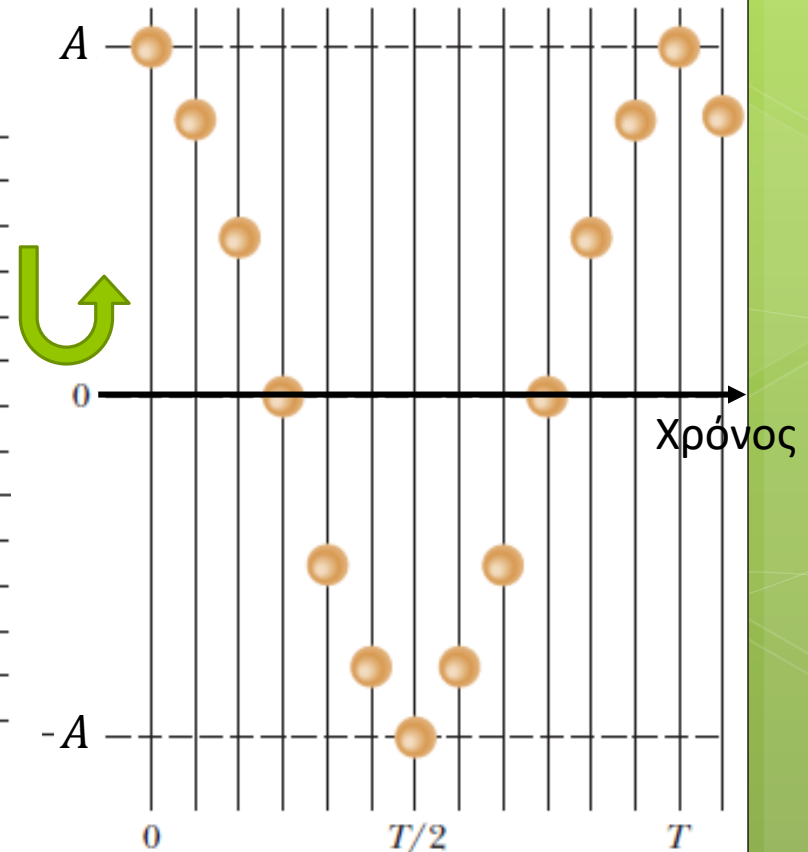
Συχνότητα ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

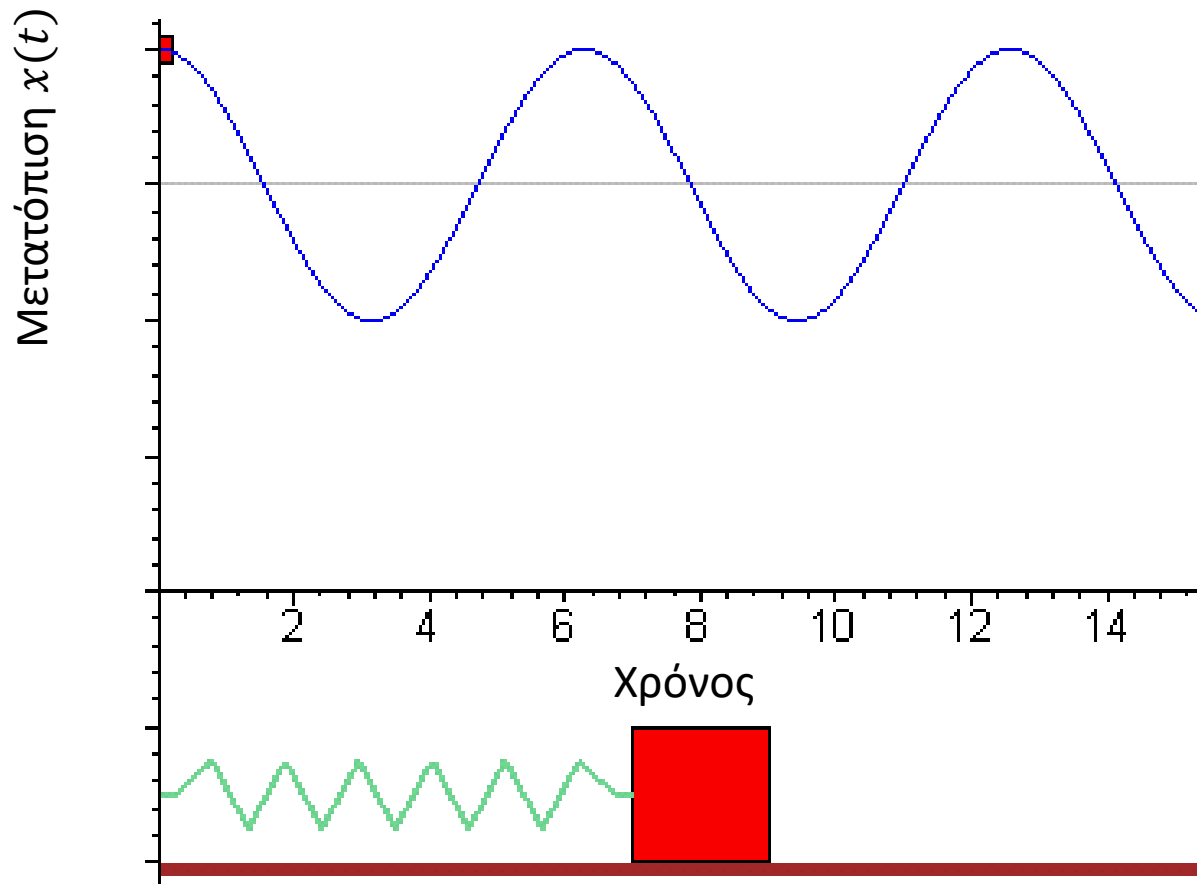
Ένα σώμα ταλαντώνεται δεξιά κι αριστερά ακολουθώντας απλή αρμονική ταλάντωση.



Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα
ελατηρίου-σώματος

- Γωνιακή Συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Μετρίεται σε rad/s
- Ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σύστημα

- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση

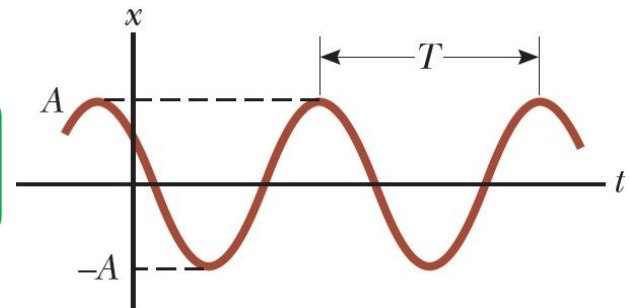
- Συχνότητα (σε Hertz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Δηλώνει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου

- Σχέση με γωνιακή συχνότητα

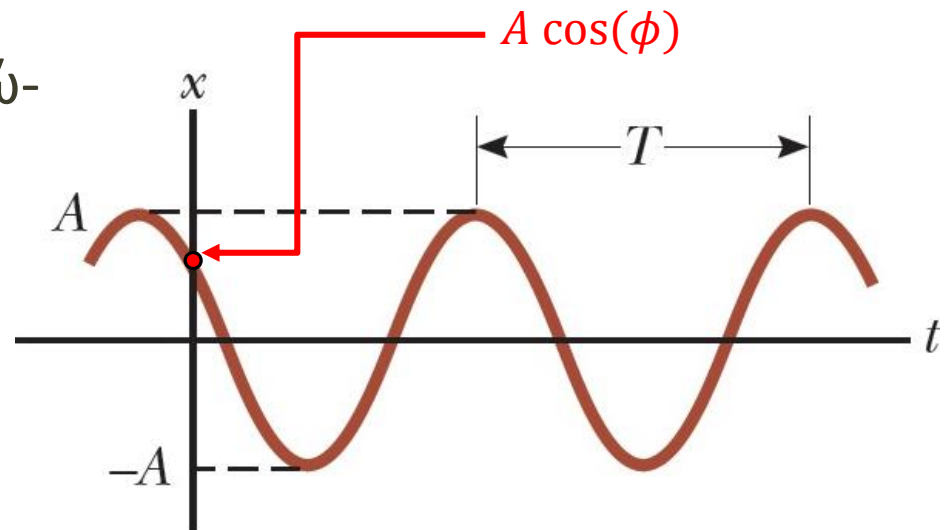
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



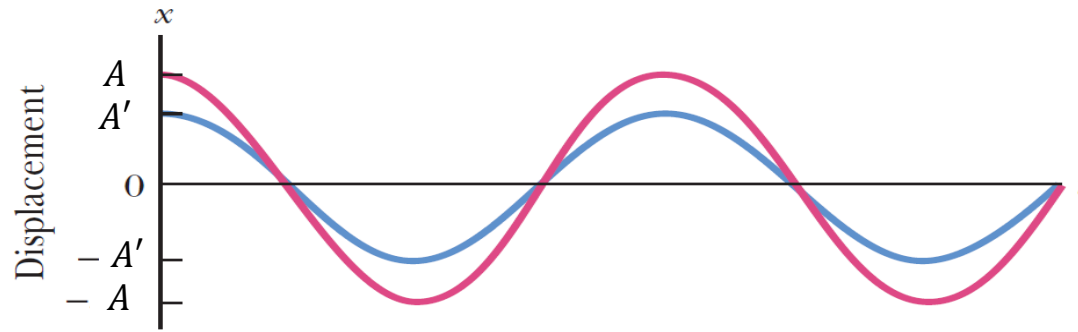
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Σταθερά αρχικής φάσης φ
- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$
- $t = 0 \Rightarrow x(0) = A \cos(\varphi)$
- Ορίζει τη θέση του σώματος όταν ξεκινάμε να μελετάμε την ταλάντωση

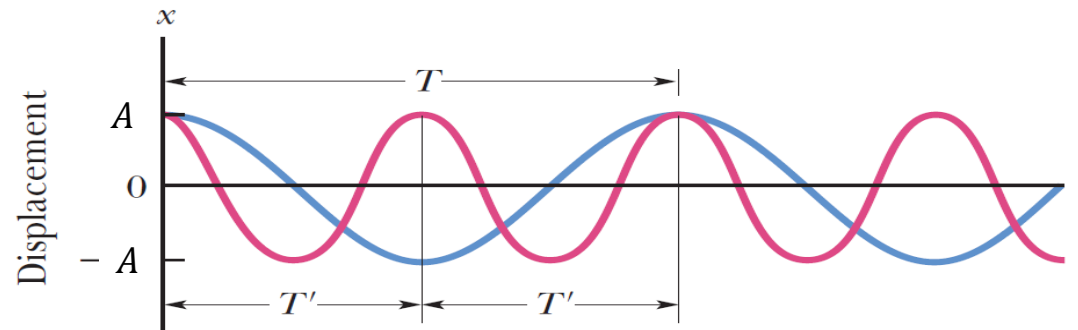


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

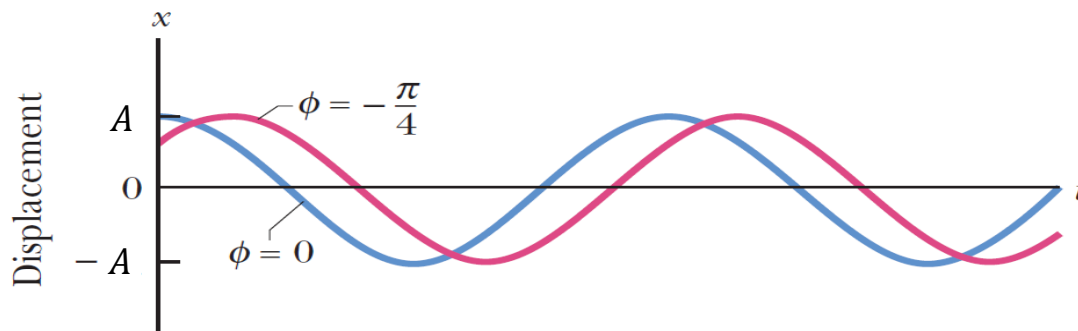


Quiz:
Ποια/ες από τις παραμέτρους της ταλάντωσης A , ω , ϕ μένουν ίδιες σε κάθε ζεύγος?

Ίδια ϕ , ω
Διαφορετικό A



Ίδια A , ϕ
Διαφορετικό ω



Ίδια A , ω
Διαφορετικό ϕ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Αφορούν μόνο σύστημα
ελατηρίου-σώματος

- Ταχύτητα & επιτάχυνση απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = u(t)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a(t)$$

- Μέγιστες τιμές

$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A , ϕ , ω , της ταλάντωσης;

Συχνότητα ω : εξαρτάται από k , m

Πλάτος, αρχ. φάση: **αρχικές συνθήκες!** ($t = 0$)

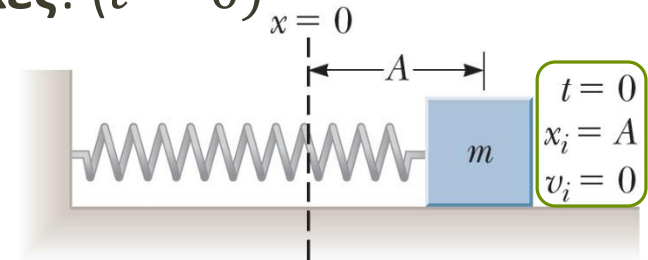
Παράδειγμα 1:

$x(0) = A \cos(\phi) = A$,

$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0$

Δίνουν $\phi = 0$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

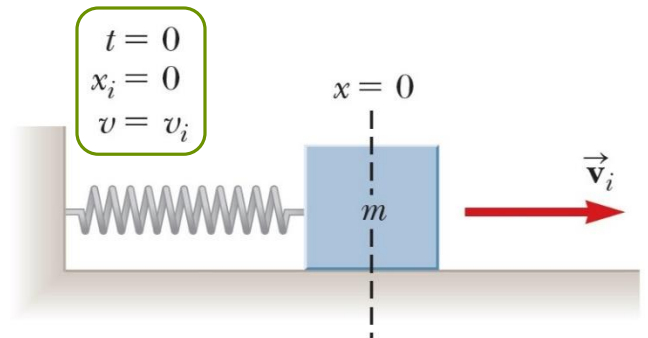


Παράδειγμα 2:

$x(0) = A \cos(\phi) = 0$, $\begin{matrix} \nearrow \pi/2 \\ \searrow -\pi/2 \end{matrix}$

$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = u_i$

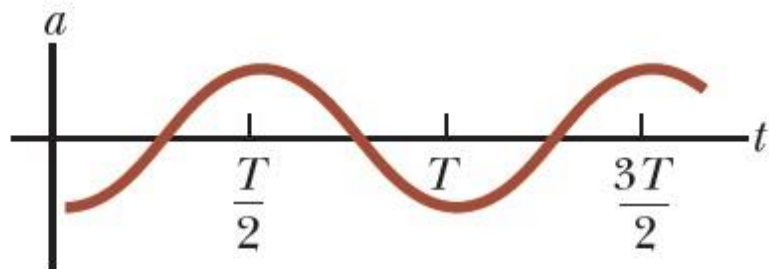
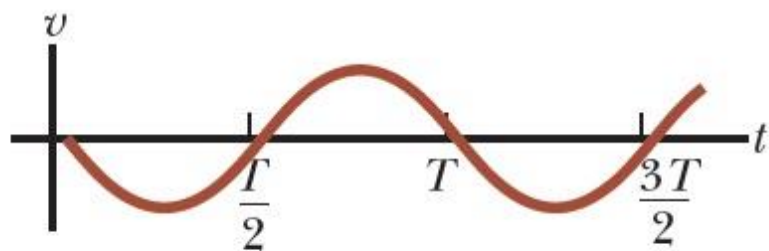
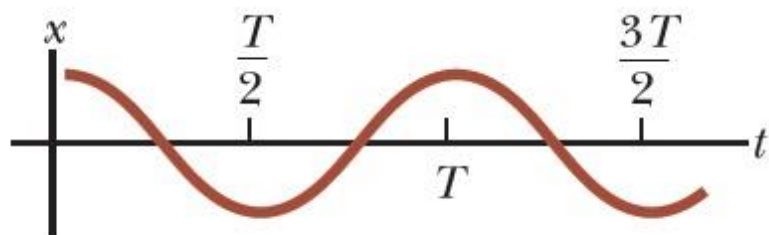
Δίνουν $\phi = -\pi/2$



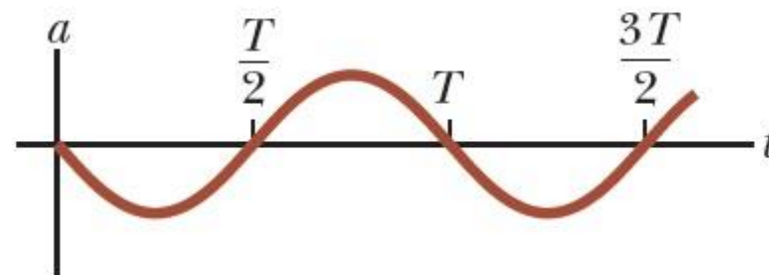
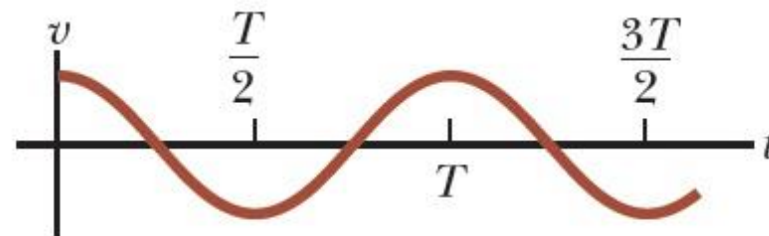
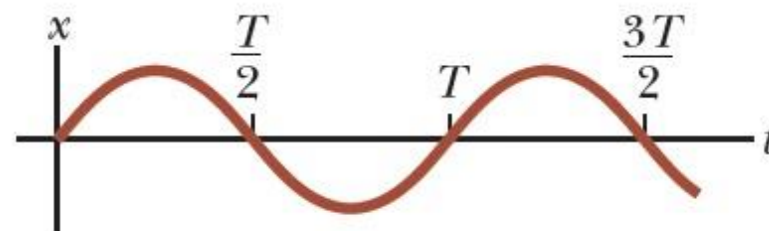
Για $\phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{u_i}{\omega}$

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega} \sin(\omega t)$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



a

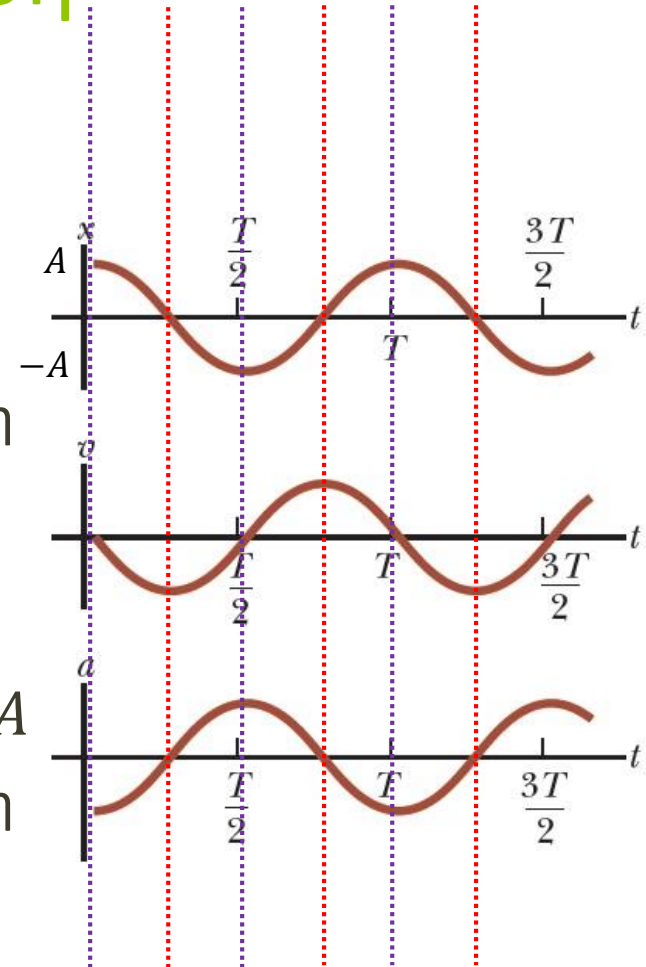


b

Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για (a) $t = 0, x(0) = A, u(0) = 0$ και (b) $t = 0, x(0) = 0, u(0) = u_i$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

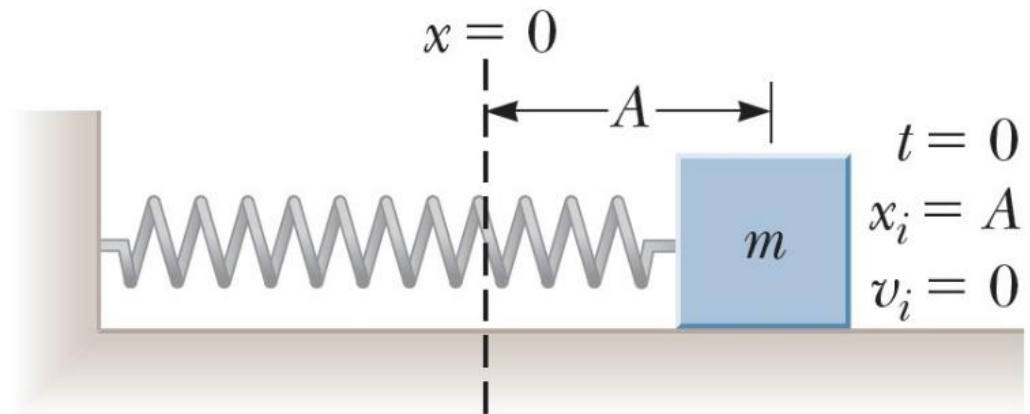
- Παρατηρήστε ότι:
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **ταχύτητα** συμβαίνει όταν $x = 0$
 - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** του!
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **επιτάχυνση** συμβαίνει όταν $x = \pm A$
 - Δηλ. όταν το σύστημα βρίσκεται στη **μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) απομάκρυνση** από τη θέση ισορροπίας του!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα:

- ο Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
 - ο Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
 - ο Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
 - ο Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
 - ο Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

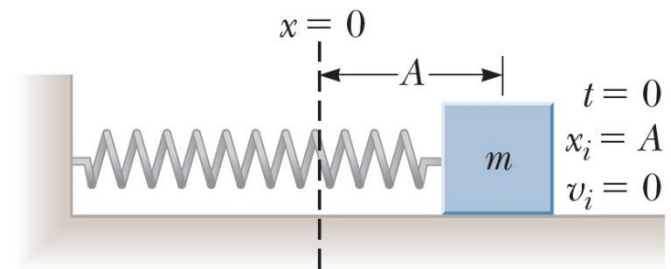
- A) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
- B) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{0.2}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \textcircled{1}$$

$$A) T = \frac{2\pi}{\omega} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi}{5} \text{ sec}$$

$$B) v_{\max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Γ) a_{\max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.05 = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
- Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

$$\text{Ξέρω} \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(5t + \varphi).$$

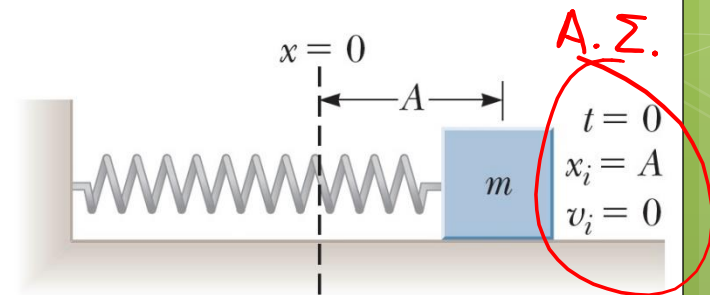
$$\text{Θέτω } t=0 \Rightarrow x(0) = A \cos(0 + \varphi) = A \cos(\varphi) \stackrel{\text{Α.Σ.}}{=} A \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\text{Άρα } x(t) = A \cos(5t) = 0.05 \cos(5t).$$

Παραγωγίζοντας :

$$u(t) = -0.25 \sin(5t)$$

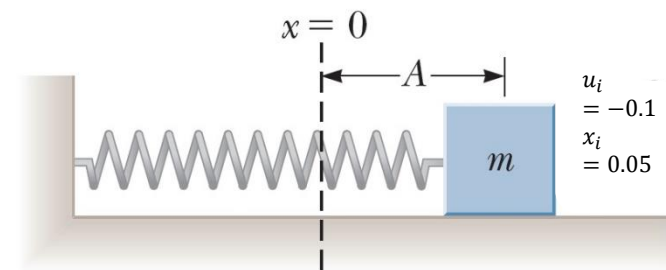
$$a(t) = -1.25 \cos(5t).$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$**
 - ◉ Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$
- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

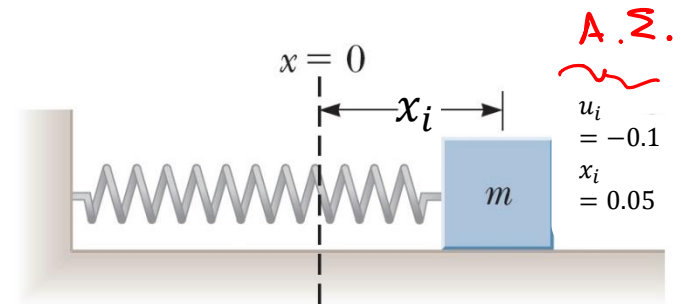
A) Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, άρα $T = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$

B) $u_{\max} = \omega A = 5A$? δε γνωρίζω το A .

Γ) $a_{\max} = \omega^2 A = 25A$? ——— || ———

Δ) Ξέρω ε ία

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(5t + \varphi) \\ u(t) &= -\omega A \sin(5t + \varphi) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{t=0}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$

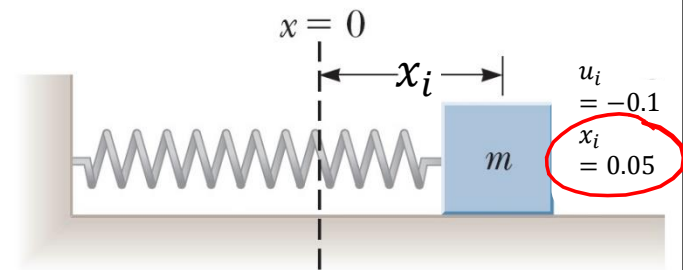
- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\begin{aligned} \xRightarrow{t=0} \quad & \begin{cases} x(0) = A \cos(\varphi) = 0.05 \\ u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos(\varphi) = 0.05 \\ 5A \sin(\varphi) = 0.1 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} (:) \\ \Rightarrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{(:)} \quad \frac{5A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{0.1}{0.05} \Leftrightarrow 5 \tan(\varphi) = 2 \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{2}{5}$$

Βρίσκουμε ότι $\varphi \cong 0.12 \text{ rad}$

$$\text{Άρα } A \cos(0.12 \text{ rad}) = 0.05 \Rightarrow$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παράδειγμα – Λύση:

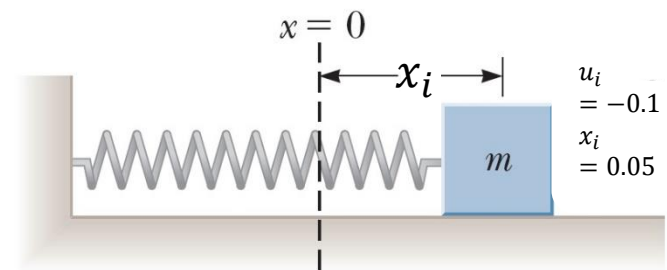
- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$
- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\Rightarrow A = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \simeq 0.054 \text{ m} . \text{ Άρα τελικά :}$$

$$\text{Β)} \quad u_{\max} = \omega A = 5 \cdot 0.054 = 0.269 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Γ)} \quad a_{\max} = \omega^2 A = 25 \cdot 0.054 = 1.35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta) \quad x(t) &= 0.054 \cos(5t + 0.12\pi) \\ u(t) &= -0.269 \sin(5t + 0.12\pi) \\ a(t) &= -1.35 \cos(5t + 0.12\pi) \end{aligned}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\u(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

● Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

● Κινητική Ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \overset{\frac{k}{m}}{m} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

● Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

- Το σύστημα του ταλαντωτή είναι απομονωμένο
- Η δύναμη του ελατηρίου είναι **συντηρητική!!**

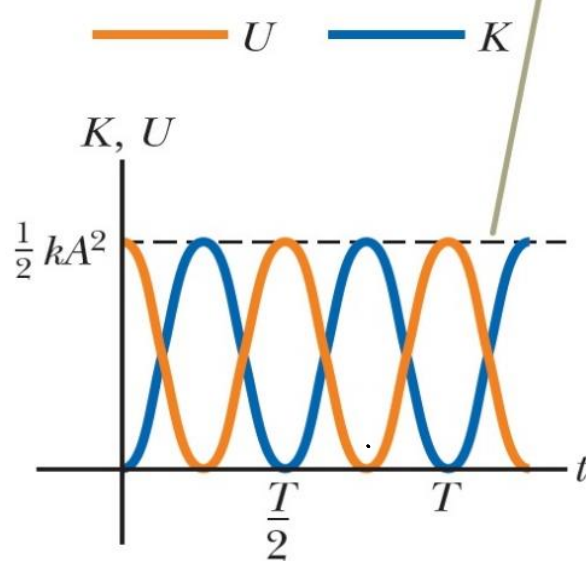
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

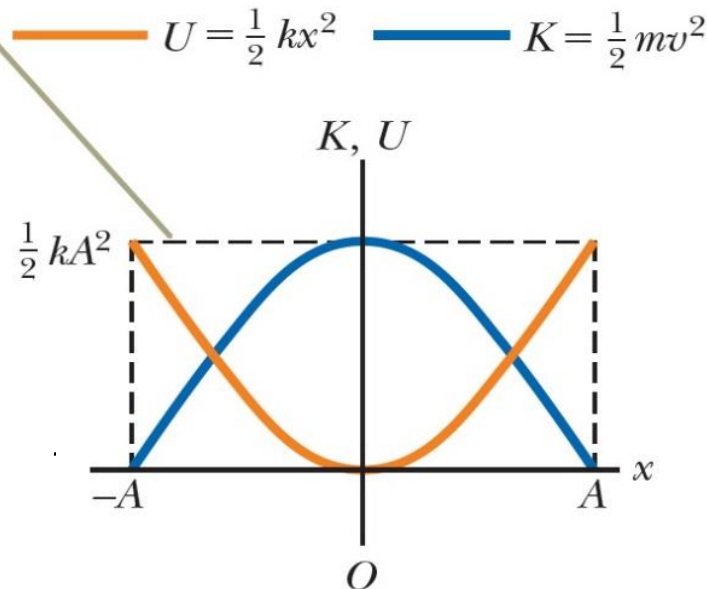
- Μηχανική Ενέργεια $K + U$ σταθερή - **ΑΔΜΕ**

$$E_{\text{mech}} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

Το άθροισμα $K + U$ είναι
σταθερό και στα δυο
γραφήματα



a

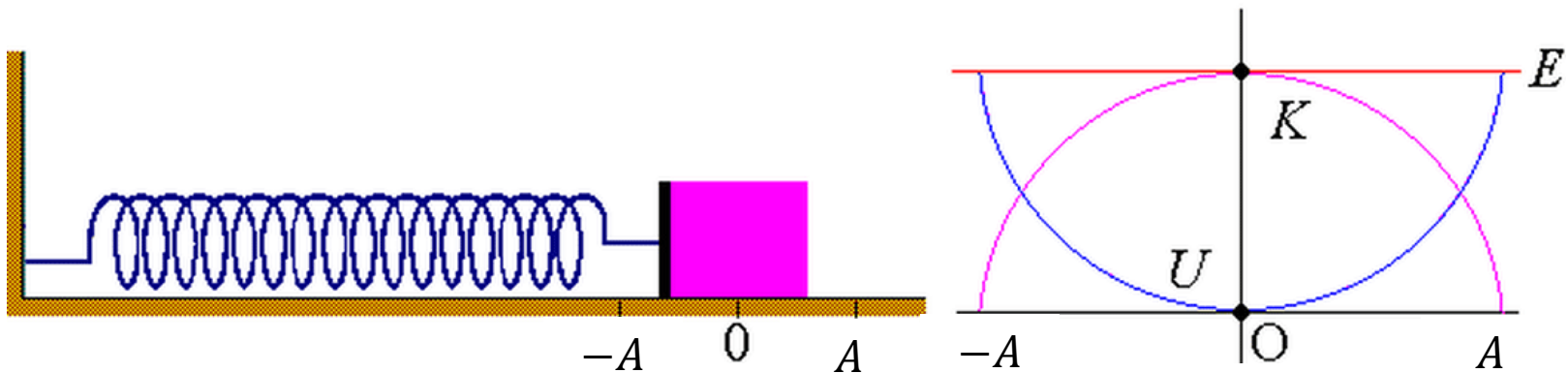


b

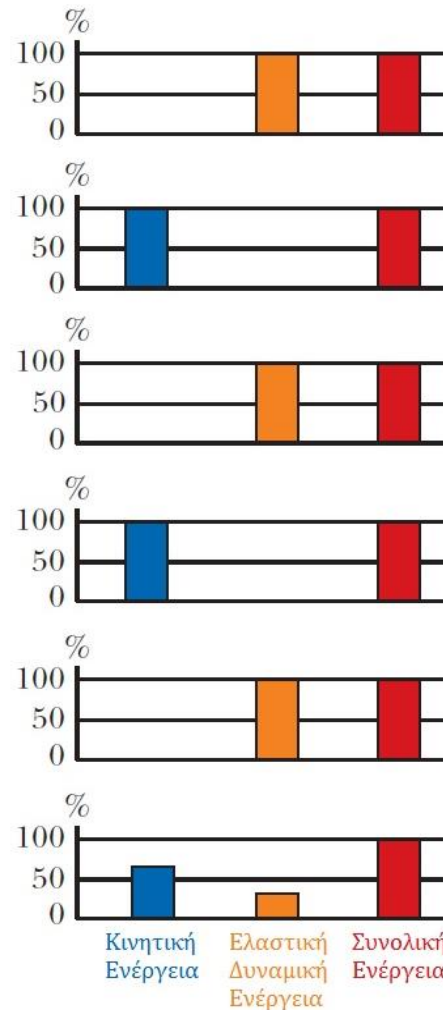
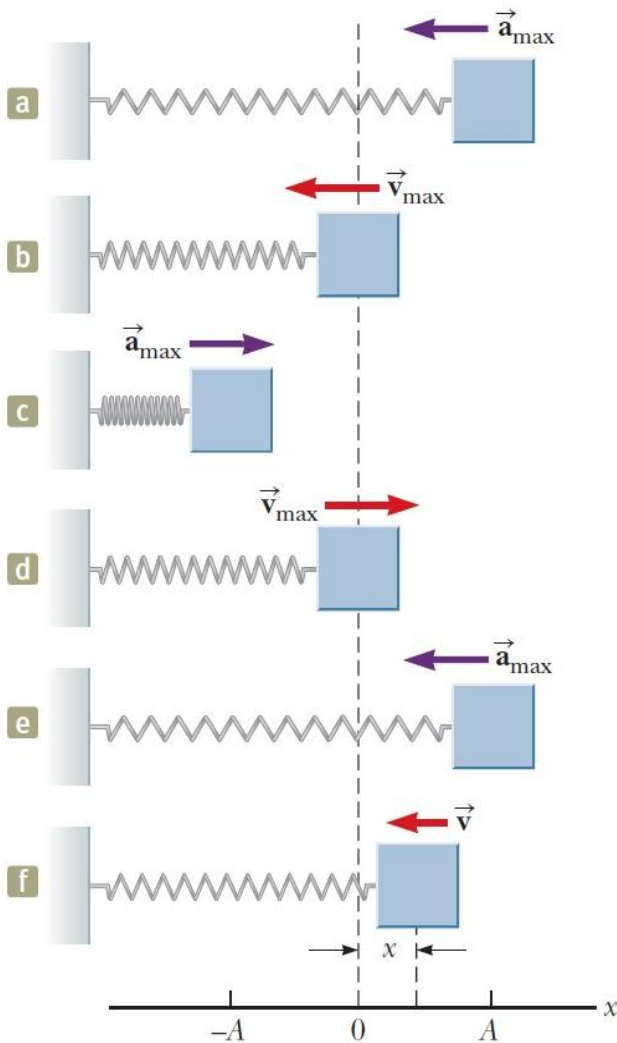
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή
 - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

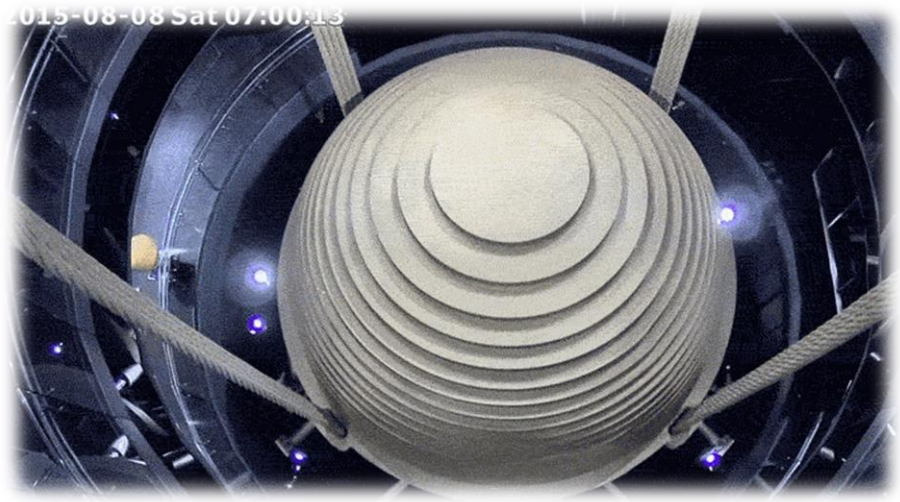


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί ισχυρά από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - ◉ Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - ◉ Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?

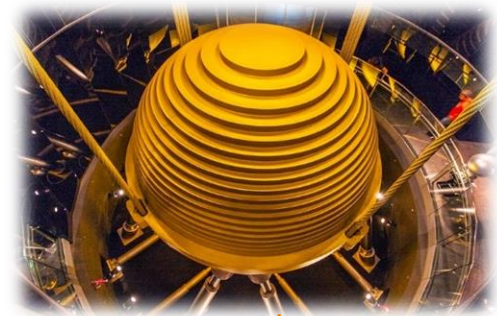
Α) Γνωρίζουμε ότι $E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k A^2$, αλλά δεν ξέρουμε το k . Όμως,
 $f = 10 = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, άρα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m \Rightarrow$
 $\Rightarrow k = (20\pi)^2 \cdot 2.72 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 1.073 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Άρα $E_{\text{mech}} = 2.14 \times 10^7 \text{ J}$

Β) Στο σημείο ισορροπίας, $u = u_{\text{max}}$ και άρα $K = K_{\text{max}}$ και $U_s = 0$!

Οπότε $E_{\text{mech}} = K + U_s = K + 0 = \frac{1}{2} k A^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} k A^2 = E_{\text{mech}} \Rightarrow$

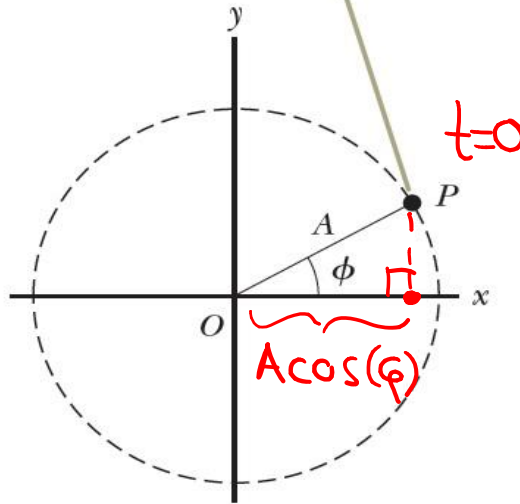
$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2 E_{\text{mech}}}{m}} \simeq 12.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

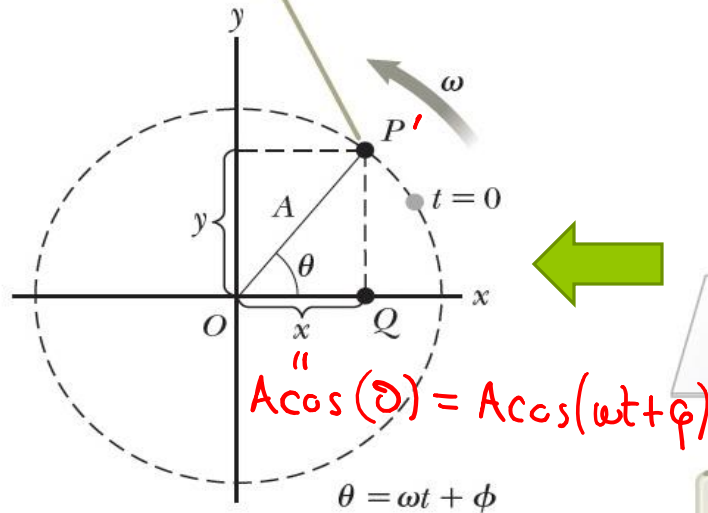
● Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



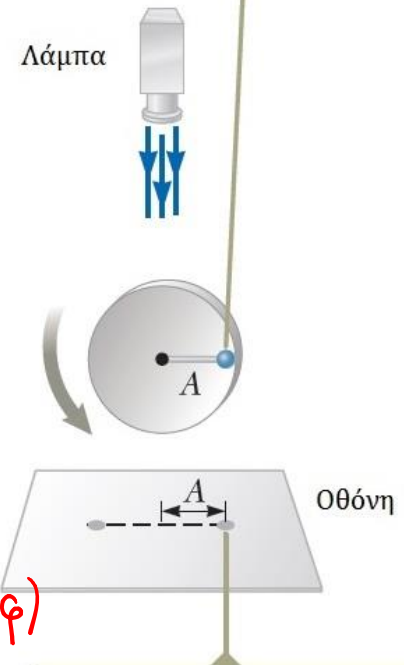
a

Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t , οι x -συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



b

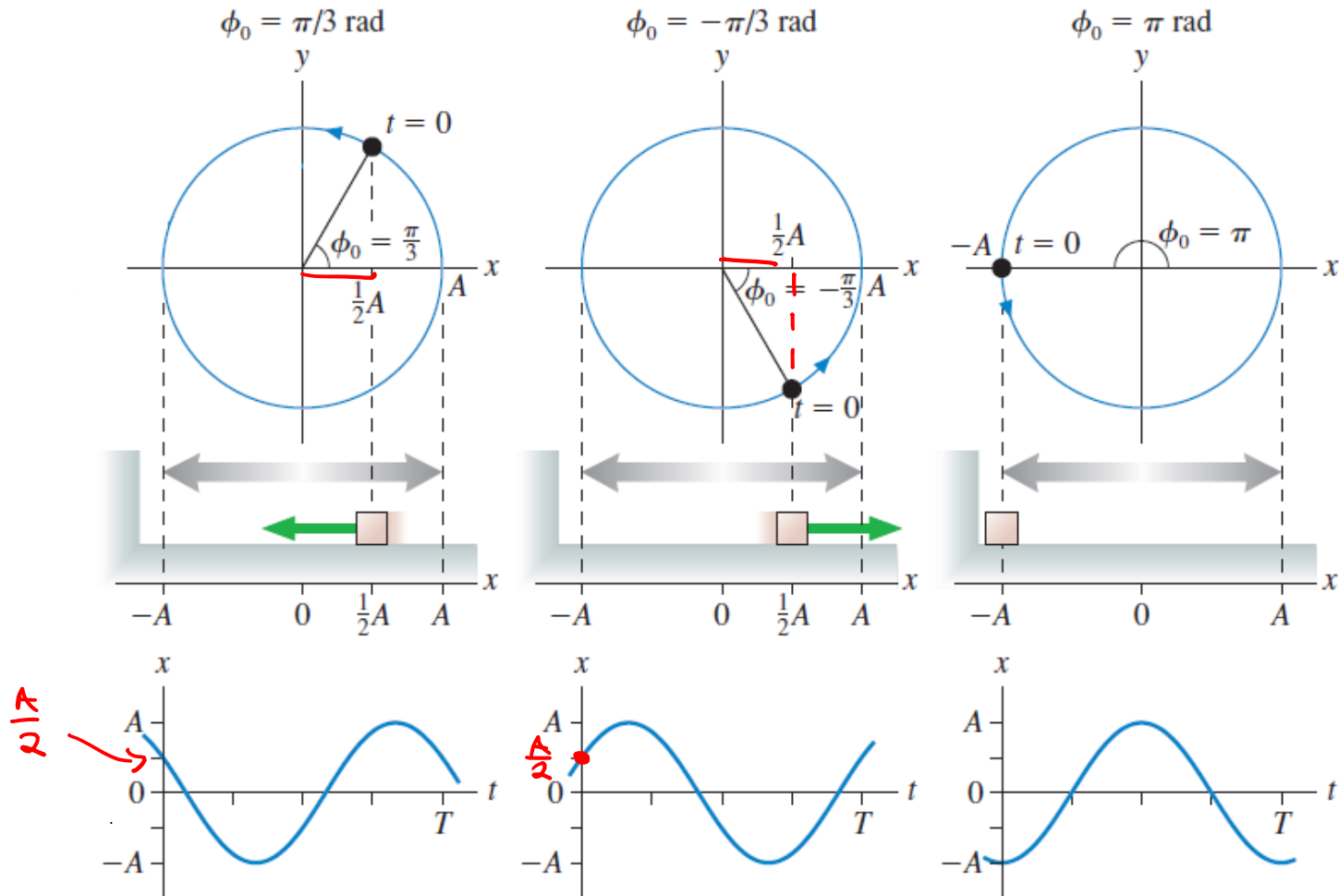
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

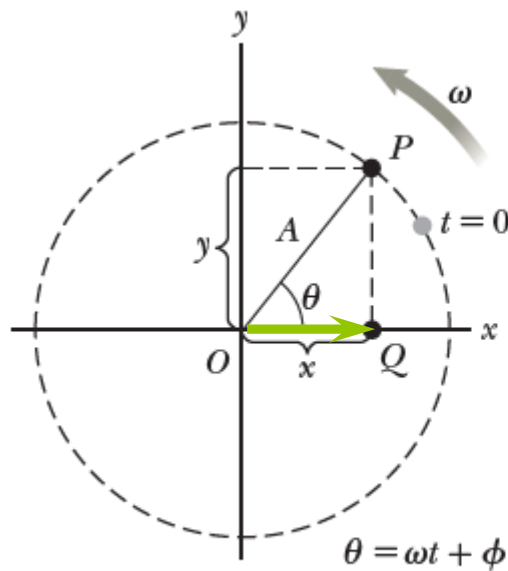
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

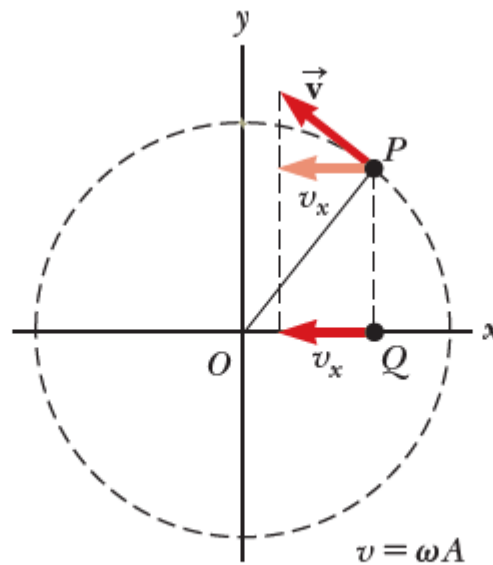


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

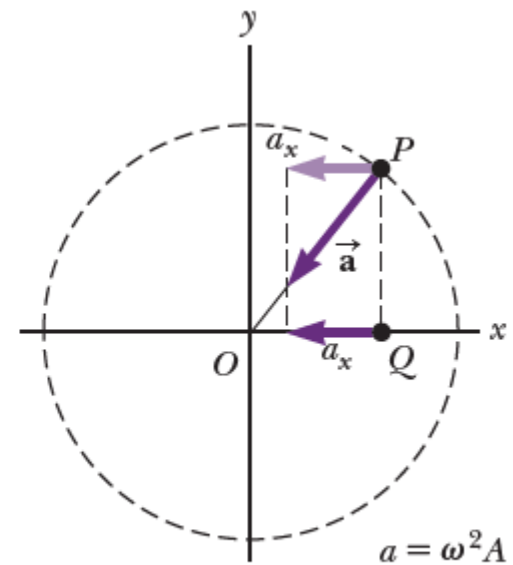
- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



b



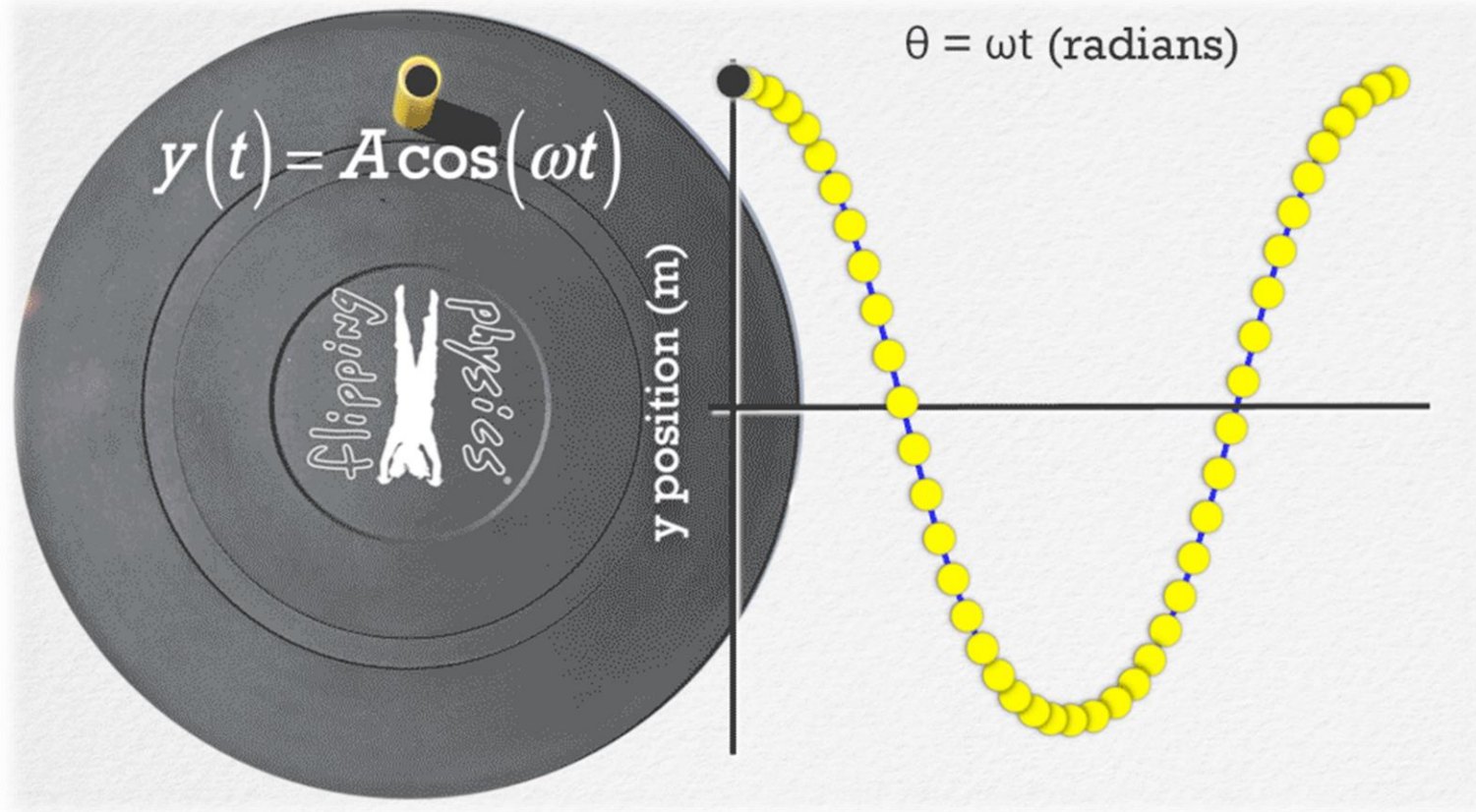
c



d

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ

- Ας κατασκευάσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a}_x \Rightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

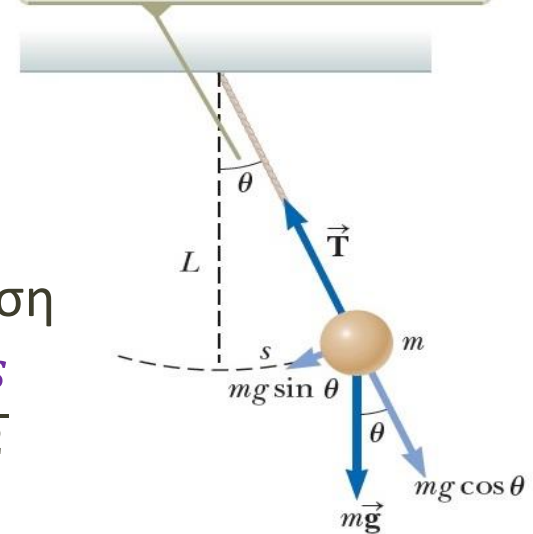
- Επειδή $s = L\theta$,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

- Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση
 $\sin(\theta) \approx \theta$

για μικρές τιμές του θ (σε rad), έχουμε: $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
- Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση **για μικρό θ ($< 10^\circ$)!**

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

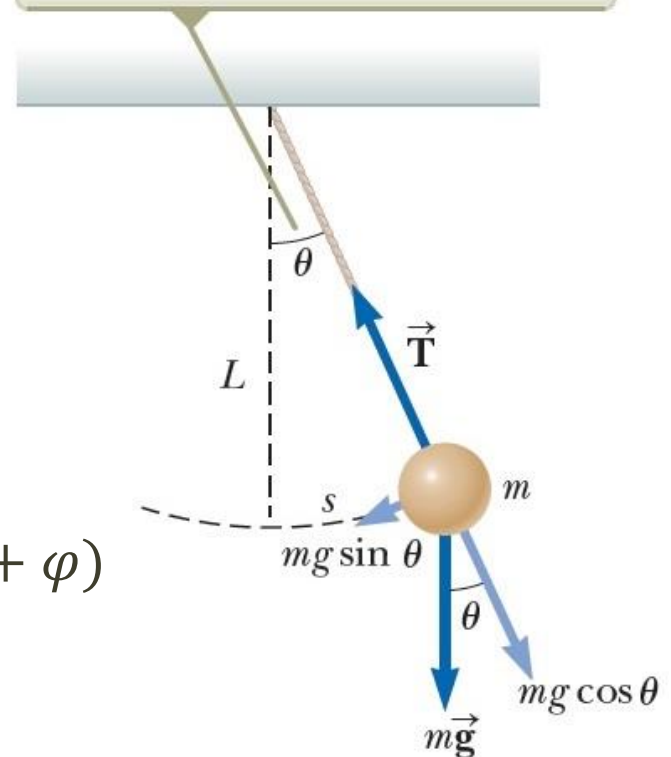
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

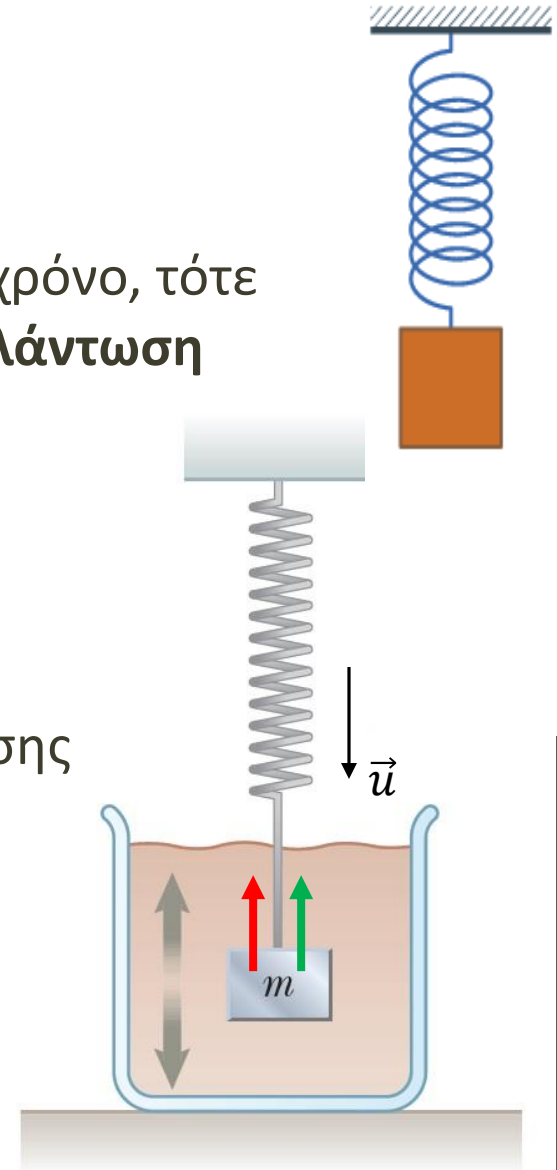
- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι **φθίνουσα ταλάντωση**

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
 - τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{u} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b
- Δρα πάντα **αντίθετα στην ταχύτητα** του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

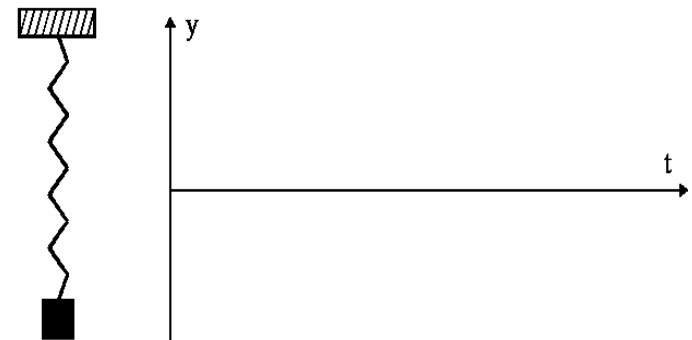
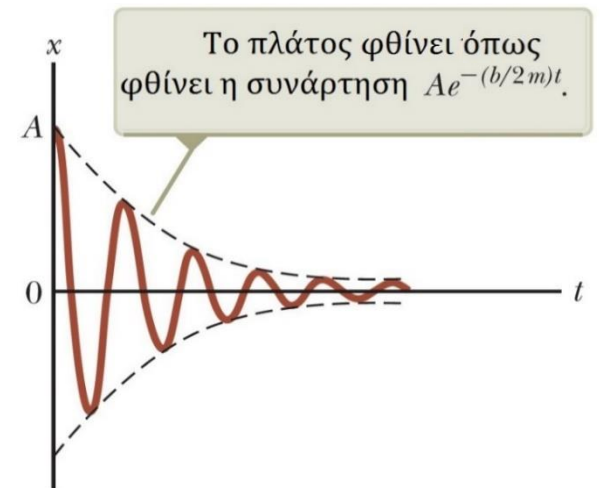
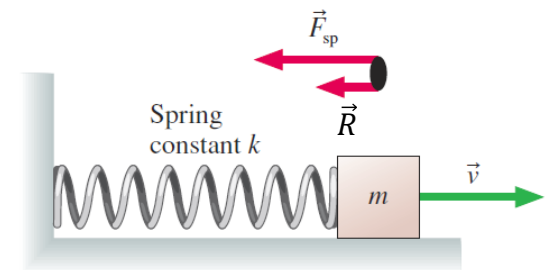
$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Εναλλακτικά,

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

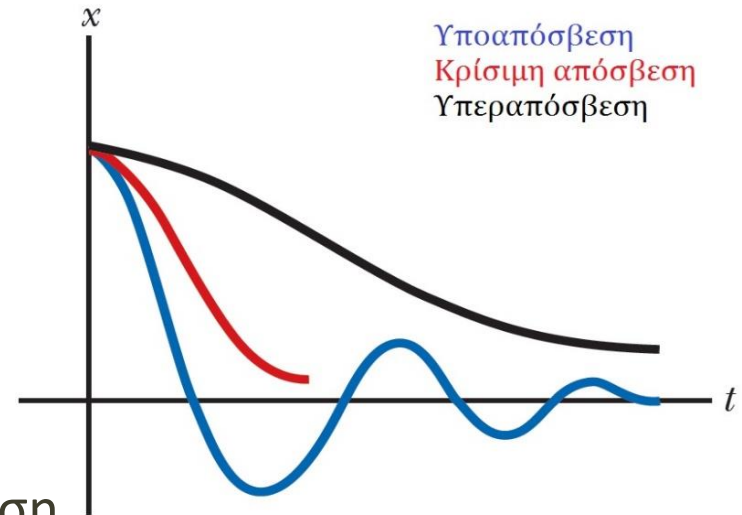
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

• Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση

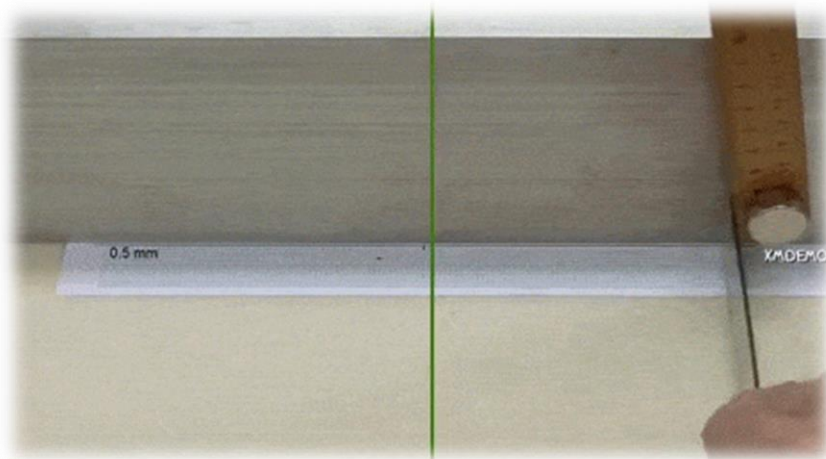
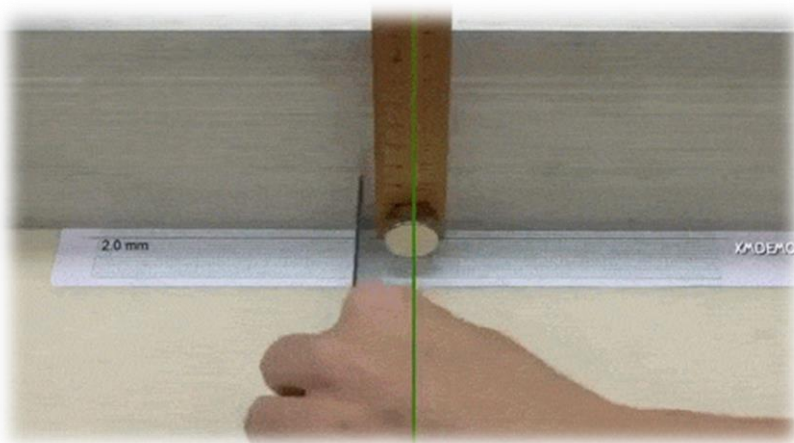
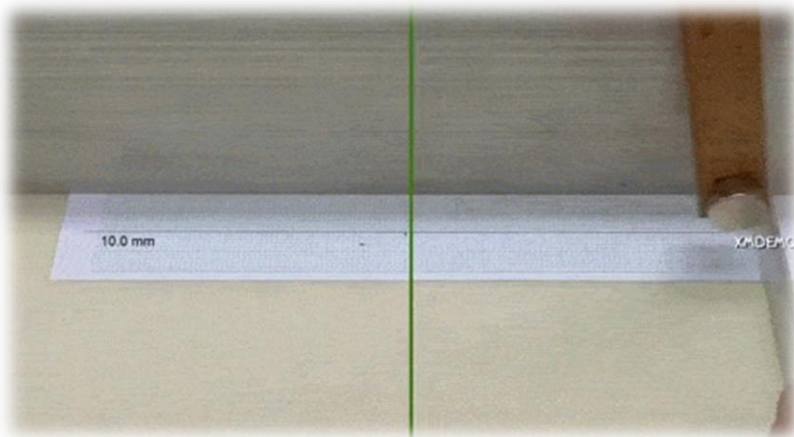
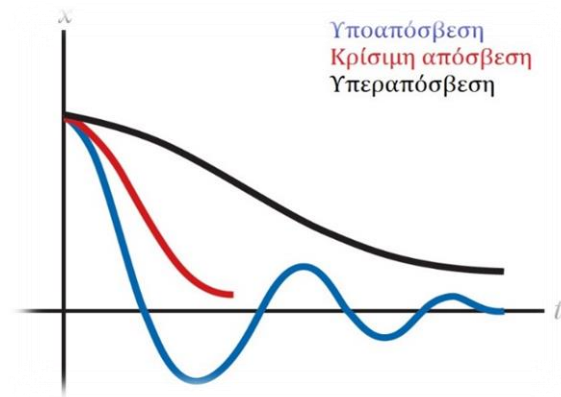
• Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

• Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$ που βρήκαμε δεν ισχύει.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μηχανική Ενέργεια
- Η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή παραμένει

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A^2(t)$$

- Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

που δείχνει ότι πράγματι η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή φθίνει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- ◉ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης επιβράδυνσης
 - ◉ Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
 - ◉ Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την κίνηση του
 - ◉ Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
 - ◉ Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα
- ◉ Μοντέλο εξωτερική δύναμη διέγερσης: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
- ◉ Τότε

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Λύση:

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

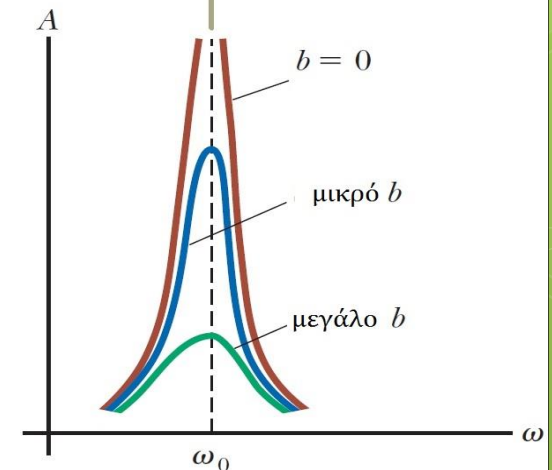
με

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Συντονισμός: Όταν $\omega \approx \omega_0$ το A γίνεται πολύ μεγάλο

- ω_0 : συχνότητα συντονισμού

Όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Μηχανική:



AP Photos



© Topham/The Image Works

- ο Η αρχική υπόθεση ήταν ότι ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

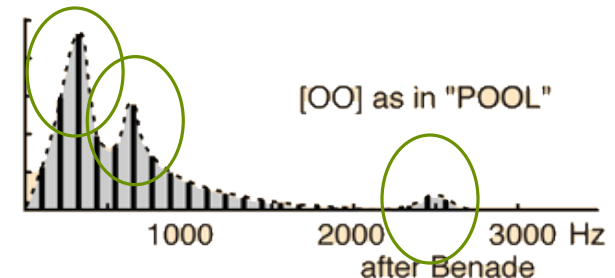
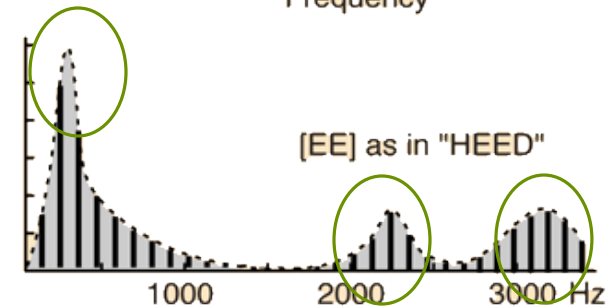
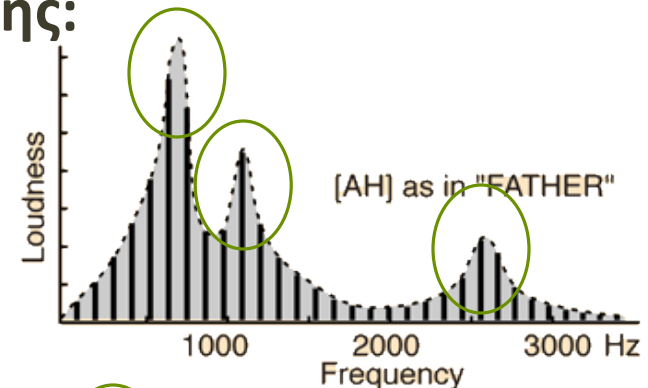
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

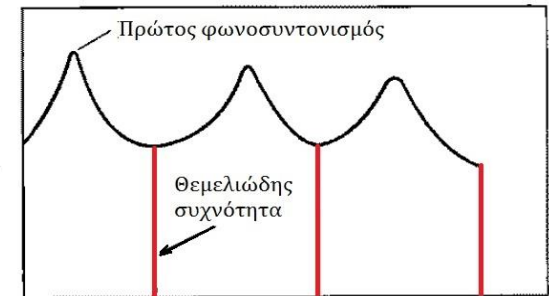
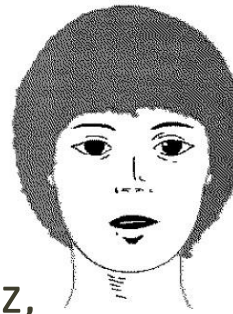
- ο Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα διαφορετικά φωνήματα
 - ο /ου/, /α/, /ι/
- ο Φωνοσυντονισμός (formant)
 - ο Υψηλά πλάτη σε περιοχές συγκεκριμένων συχνοτήτων



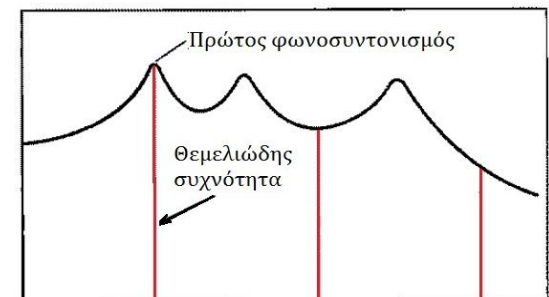
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

- ο Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
- ο Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων 2500 – 3000 Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα



Συχνότητα



Συχνότητα



Εικόνα: Ναυαγосώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
 - Μηχανικά & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα **μέσο διάδοσης**
- Θα μελετήσουμε πρώτα τα μηχανικά κύματα
 - (Πολύ) ...αργότερα (κι αν...) τα ηλεκτρομαγνητικά
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
 - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
 - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας
 - **Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!**

Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν

- Α) Κάποια πηγή διαταραχής

- Β) Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν

- Γ) Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

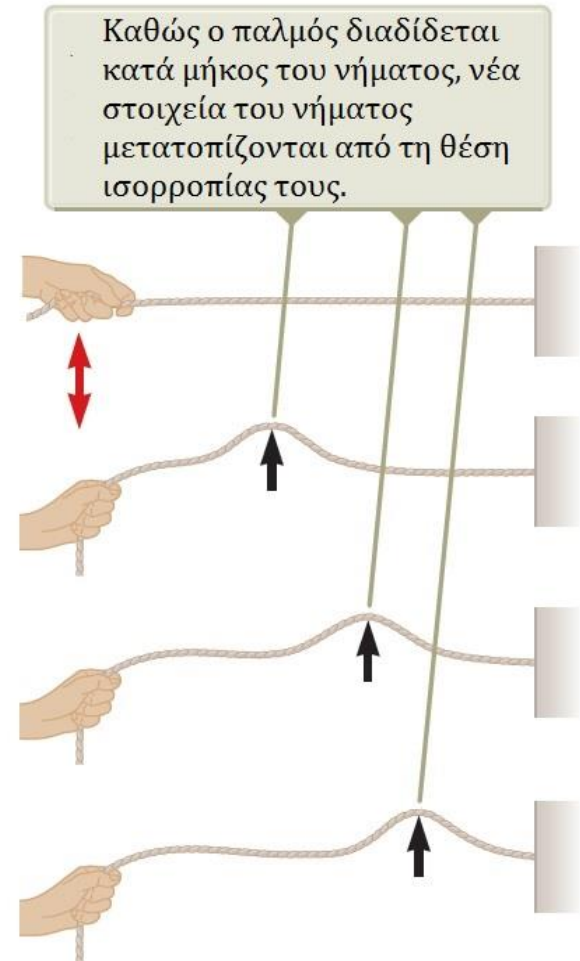
- Κίνηση κύματος

- Παλμός = διαταραχή

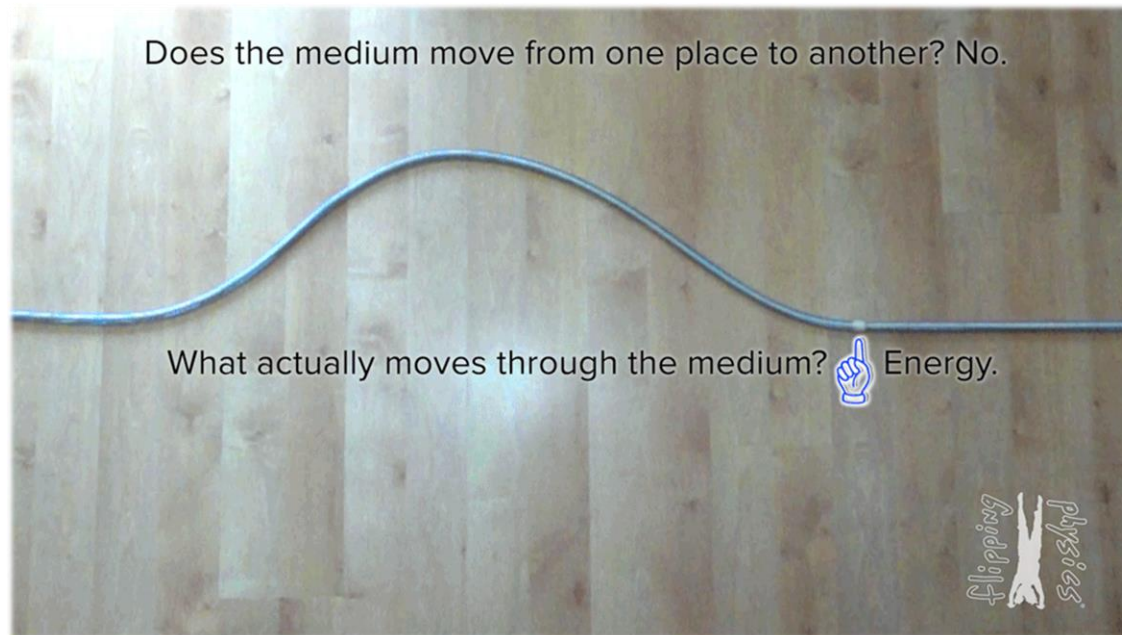
- Σχήμα σχεδόν απaráλλαχτο

- Ύψος και ταχύτητα παλμού

- Ύψος == κατακόρυφη μετατόπιση



Κύματα



Κύματα

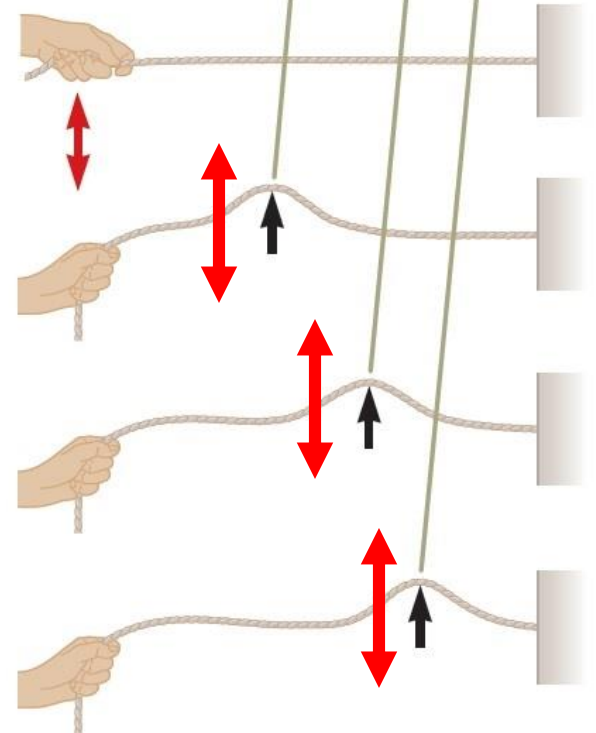
- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος
 - Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Εγκάρσιο κύμα**
- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου
 - Είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Διάμηκες κύμα**

Το χέρι κινείται γρήγορα μπρος-πίσω μια φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.

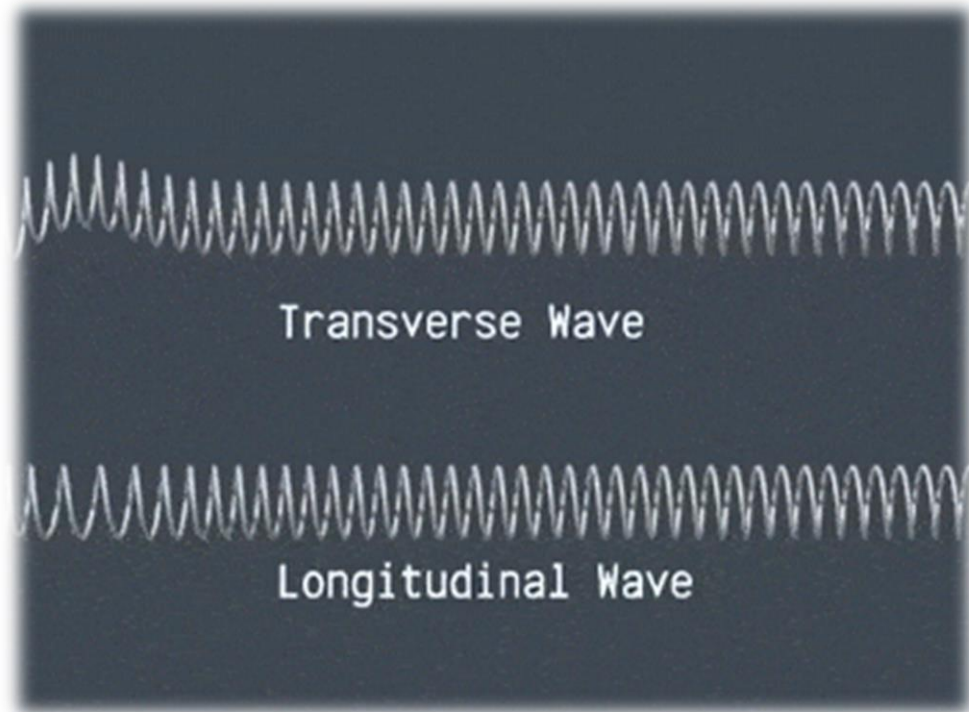


Καθώς ο παλμός διαδίδεται κατά μήκος του νήματος, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Κύματα

Εγκάρσιο κύμα



Διάμηκες κύμα

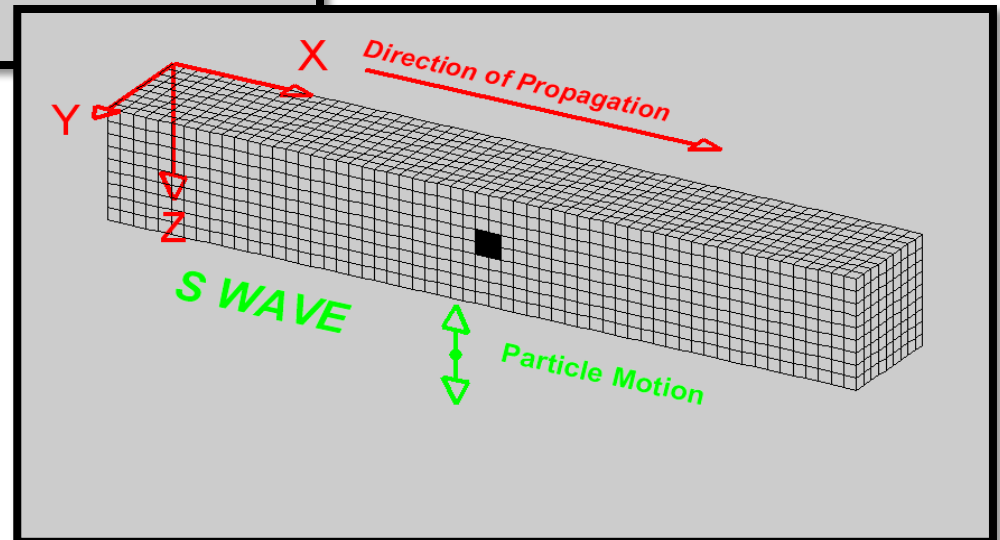
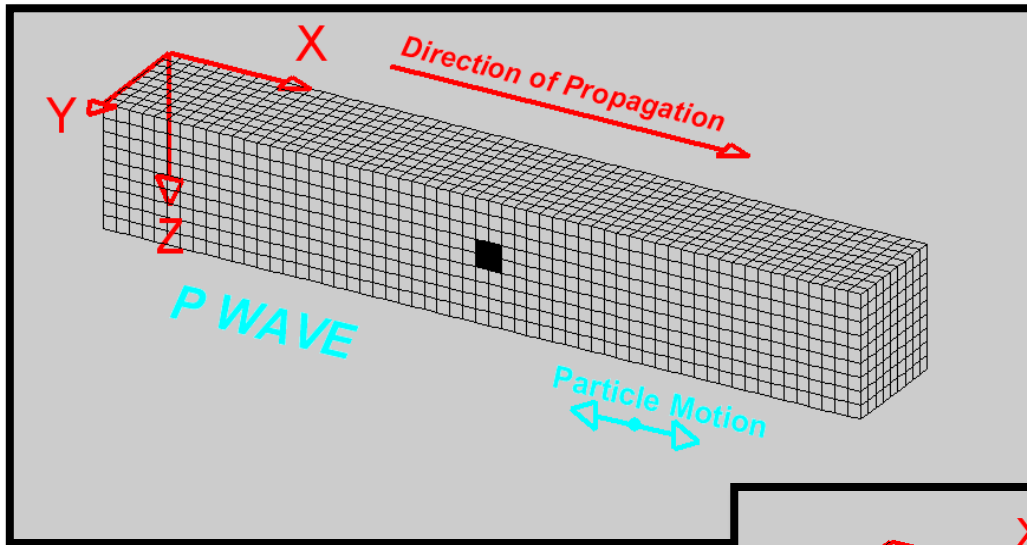
Κύματα

Σεισμικά Κύματα (εκτός ύλης)

- Υπάρχουν τριών ειδών σεισμικά κύματα: **P-κύματα, S-κύματα και Κύματα Επιφάνειας**
- **P-κύματα (Primary/Pressure Waves)**
 - Ταξιδεύουν με τη μεγαλύτερη ταχύτητα απ'όλα
 - Είναι τα πρώτα κύματα που καταγράφονται από έναν σειсмоγράφο
 - Διαφέρουν από τα S-κύματα στον τρόπο διάδοσης (διαμήκη)
- **S-κύματα (Secondary Waves)**
 - Δεν ταξιδεύουν στο νερό ή στον αέρα
 - Πιο καταστροφικά από τα κύματα P λόγω του μεγαλύτερου πλάτους τους
 - Διαφέρουν από τα P-κύματα στον τρόπο διάδοσης (εγκάρσια)

Κύματα

Σεισμικά Κύματα



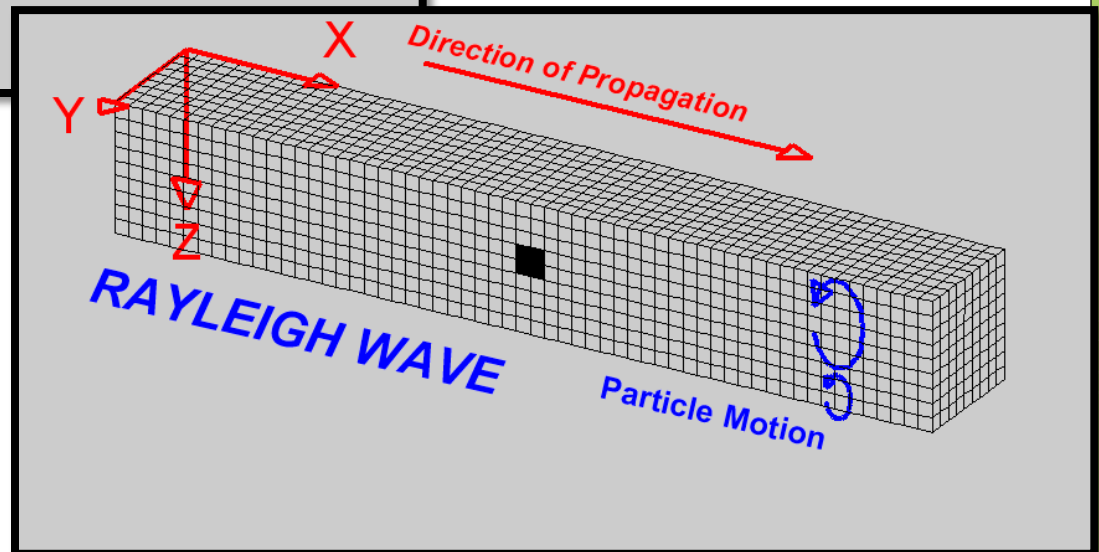
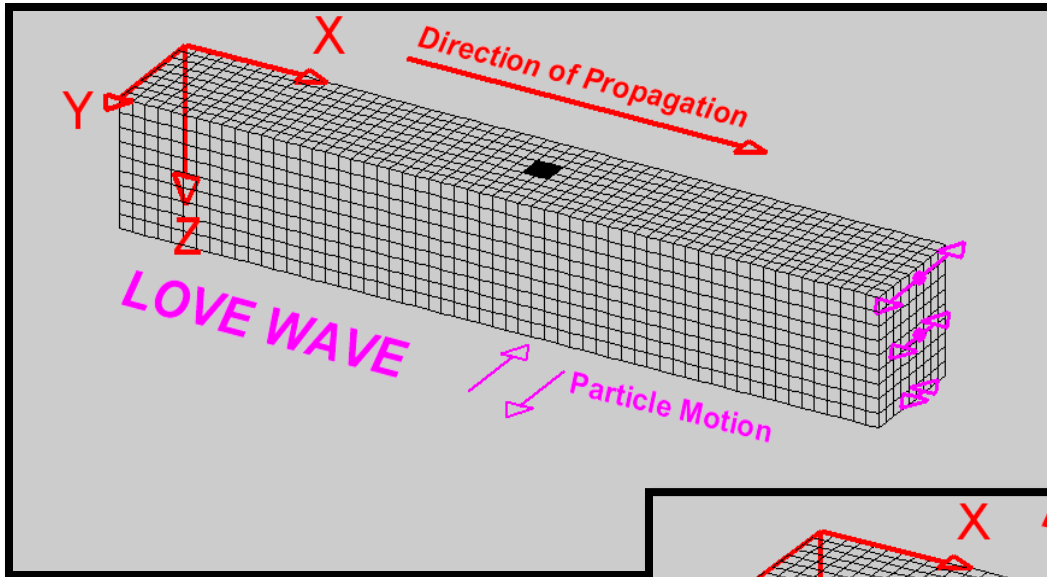
Κύματα

Σεισμικά Κύματα (εκτός ύλης)

- Υπάρχουν τριών ειδών σεισμικά κύματα: **P-κύματα, S-κύματα και Κύματα Επιφάνειας**
- **Κύματα Επιφάνειας**
 - Μοιάζουν με κύματα στο νερό και ταξιδεύουν ακριβώς κάτω από την επιφάνεια της Γης
 - Παράγονται όταν το επίκεντρο είναι σχετικά κοντά στην επιφάνεια
 - Ταξιδεύουν πιο αργά από τα S-κύματα, αλλά μπορεί να έχουν πολύ μεγαλύτερο πλάτος και να είναι το πιο καταστροφικό είδος σεισμικών κυμάτων
- Υπάρχουν δυο ειδών κύματα επιφάνειας
 - **Κύματα Rayleigh**
 - **Κύματα Love**

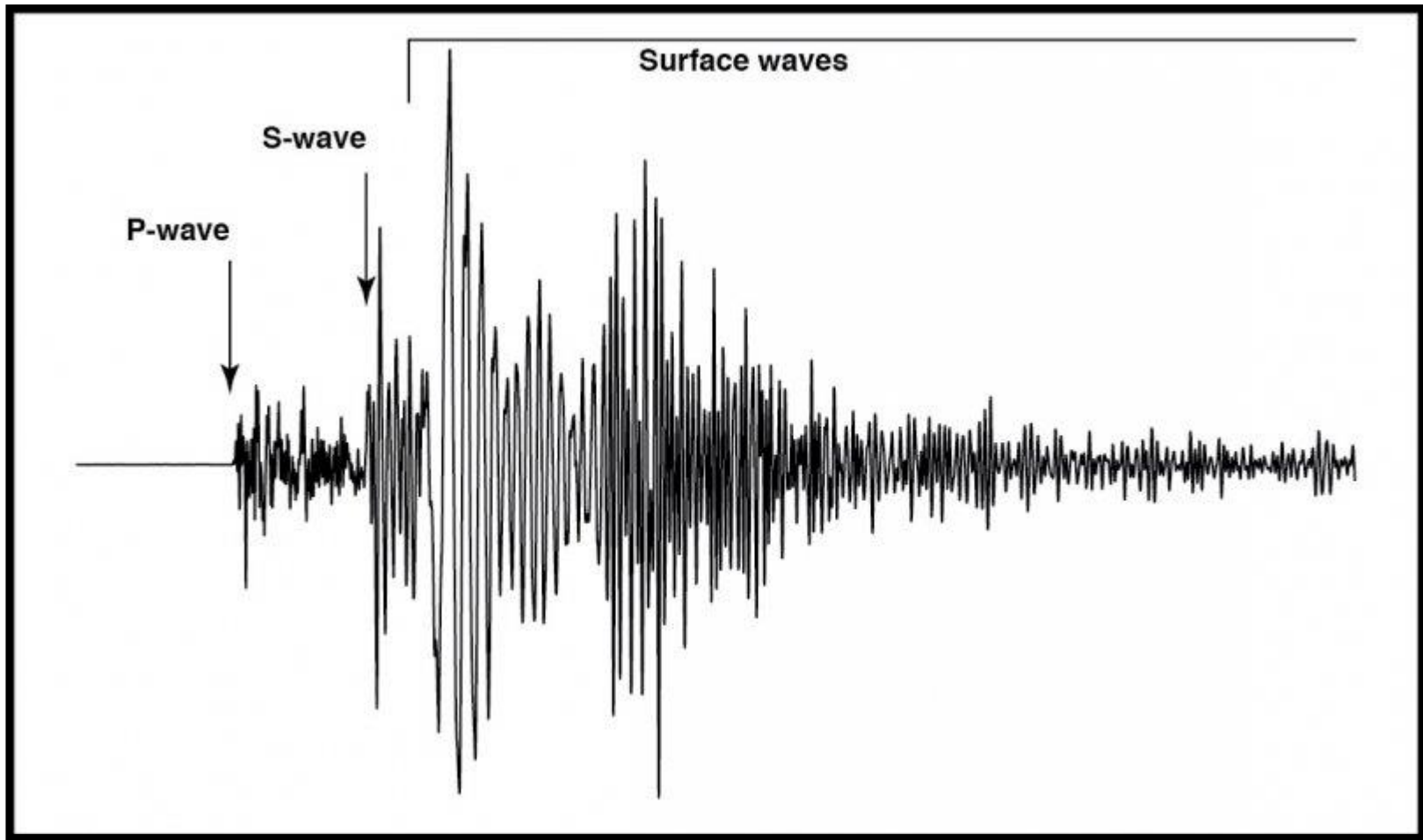
Κύματα

Σεισμικά Κύματα



Κύματα

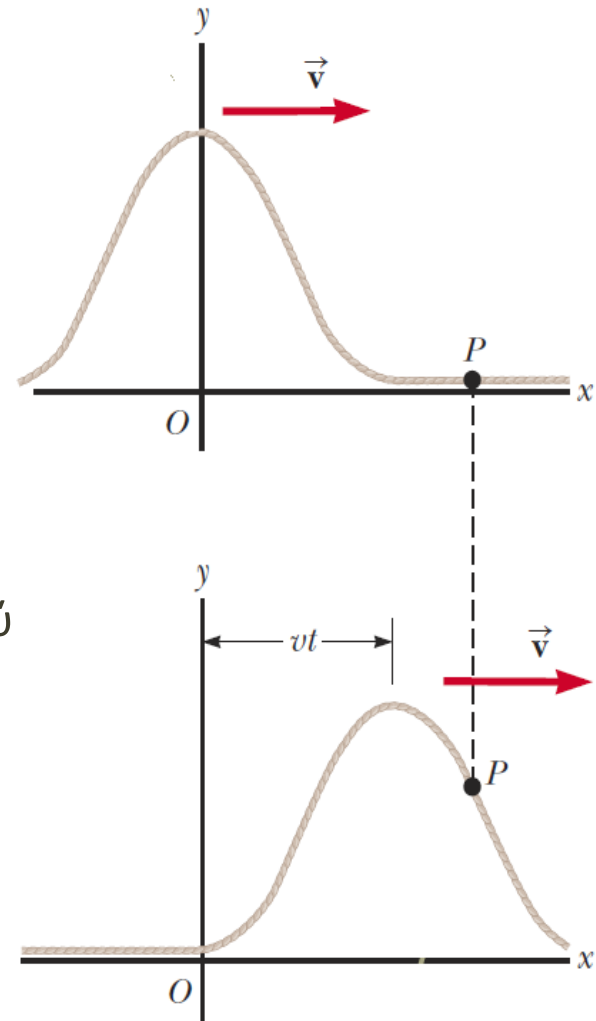
Σεισμικά Κύματα



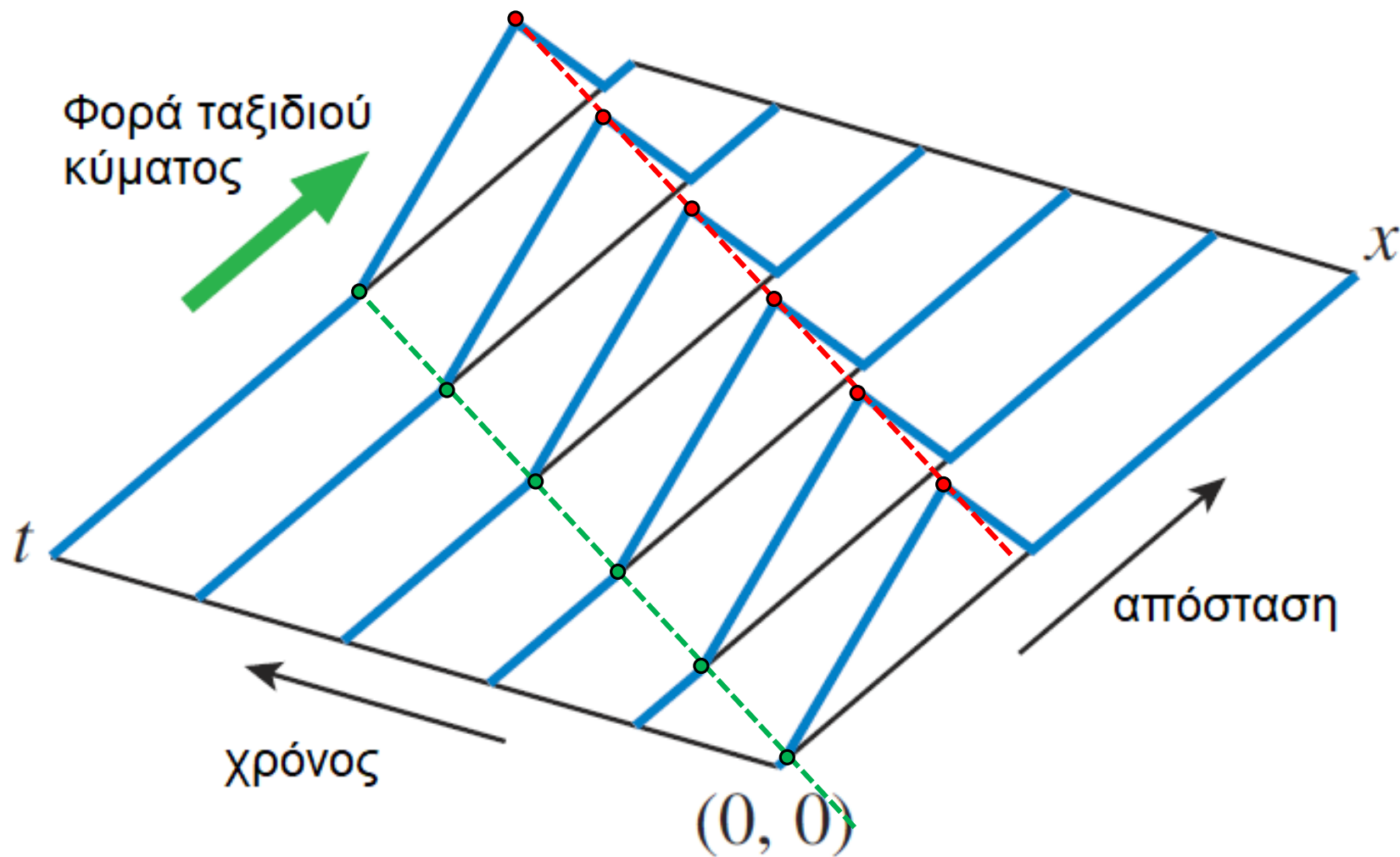
<https://www.exploratorium.edu/faultline/basics/waves.html>

Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Μετατόπιση y του στοιχείου x ενός κύματος τη χρονική στιγμή t
 - $y(x, t) = f(x - ut, t)$ ➡ κίνηση προς τα δεξιά
 - $y(x, t) = f(x + ut, t)$ ➡ κίνηση προς τα αριστερά
 - όπου u η ταχύτητα διάδοσης του παλμού
- Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «**φωτογραφία**» του **όλου** κύματος για μια χρονική στιγμή
- Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση **ενός στοιχείου** του κύματος με την πάροδο του χρόνου



Κύματα



Κύματα

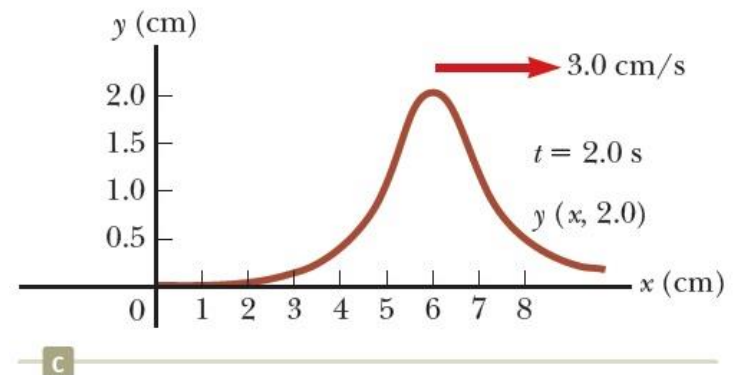
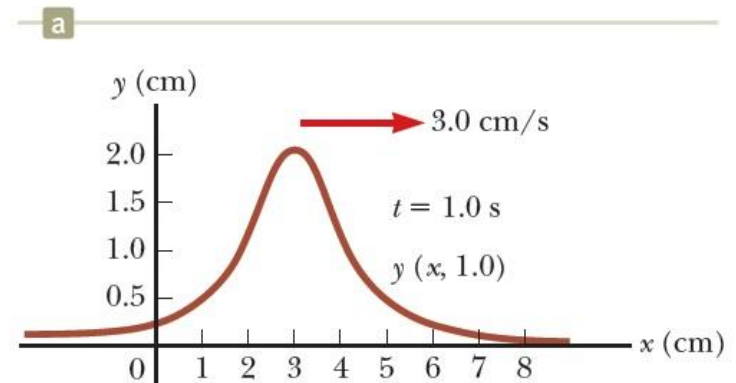
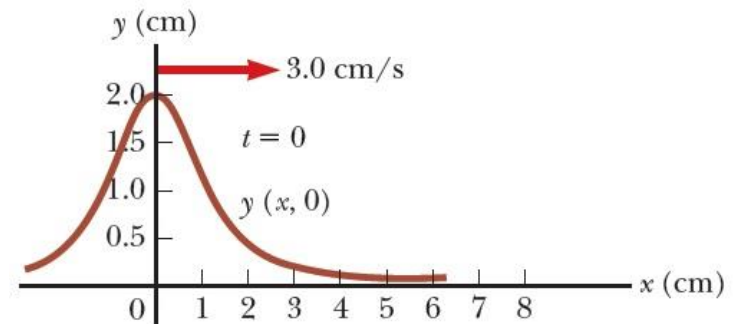
- Παράδειγμα:

- Έστω ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

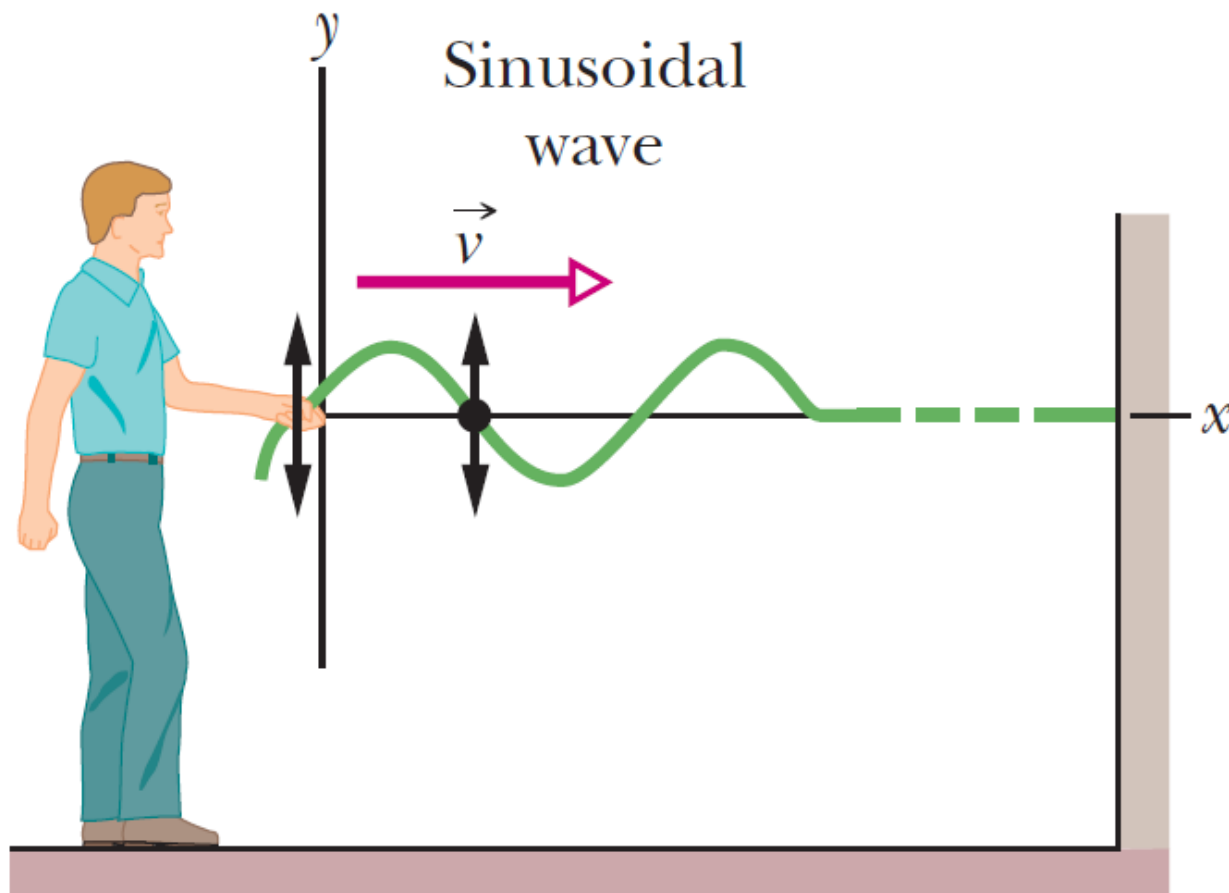
όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

- Παλμοί για $t = 0, 1, 2$



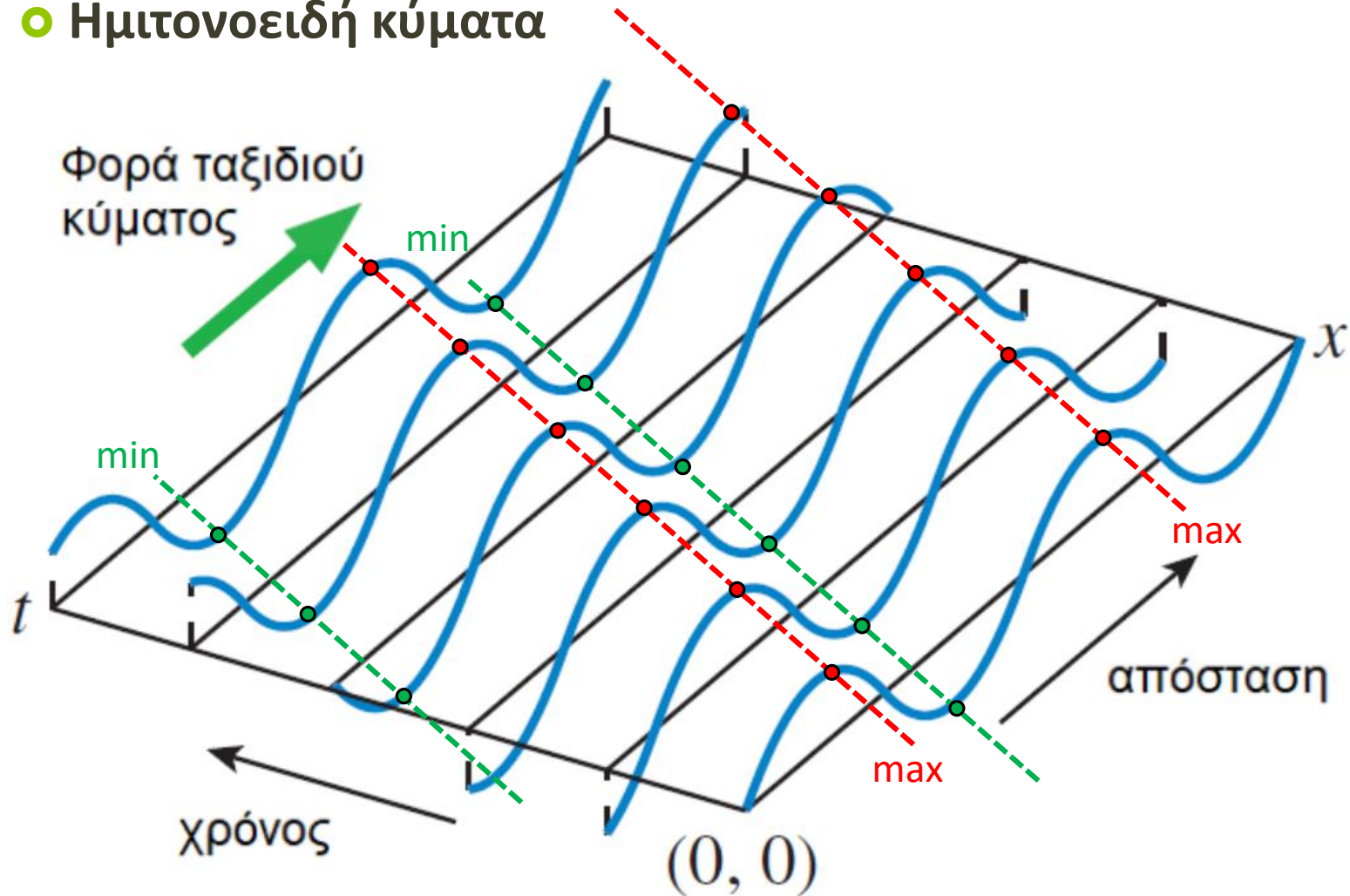
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

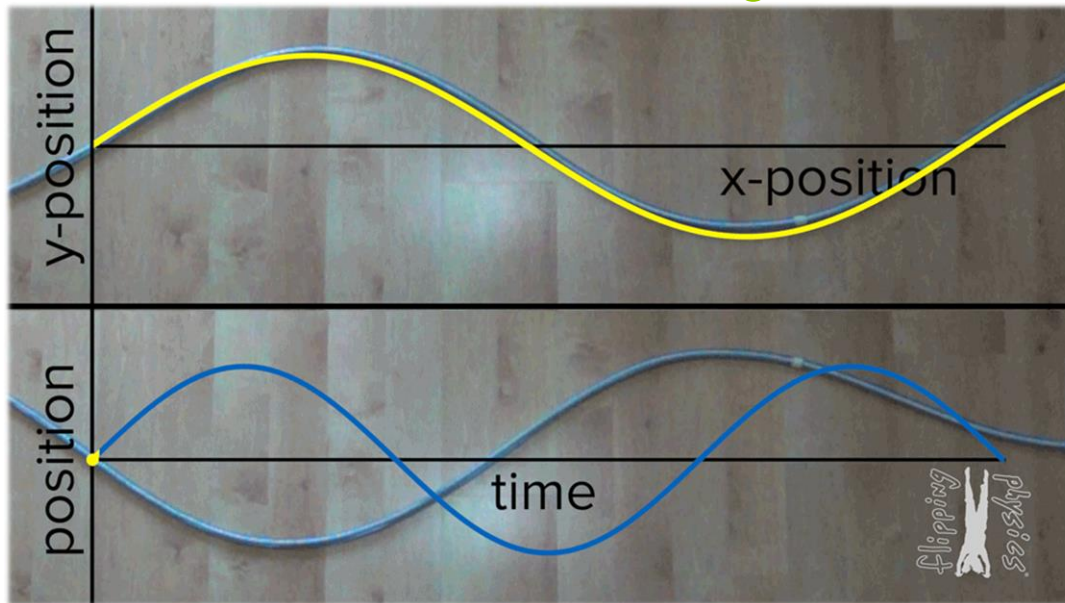
○ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα

t σταθερό:
βλέπουμε όλα τα στοιχεία
για αυτό το t



x σταθερό:
βλέπουμε ένα στοιχείο
για κάθε t

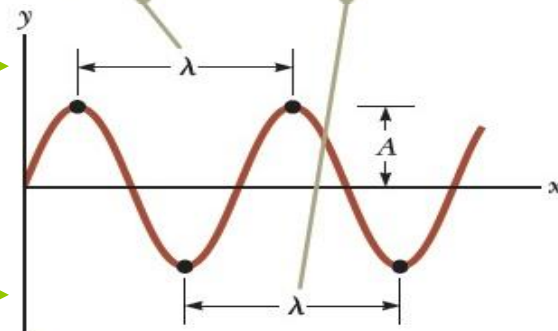
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα

- Μήκος κύματος λ

- Απόσταση!

Το μήκος κύματος λ ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων.

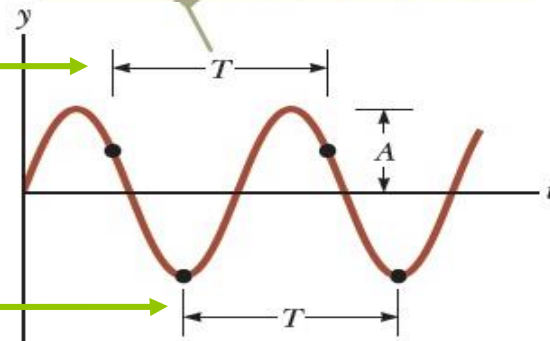


a

- Περίοδος T

- Χρόνος!

Η περίοδος T ενός κύματος είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το στοιχείο για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος.



b

- Συχνότητα f

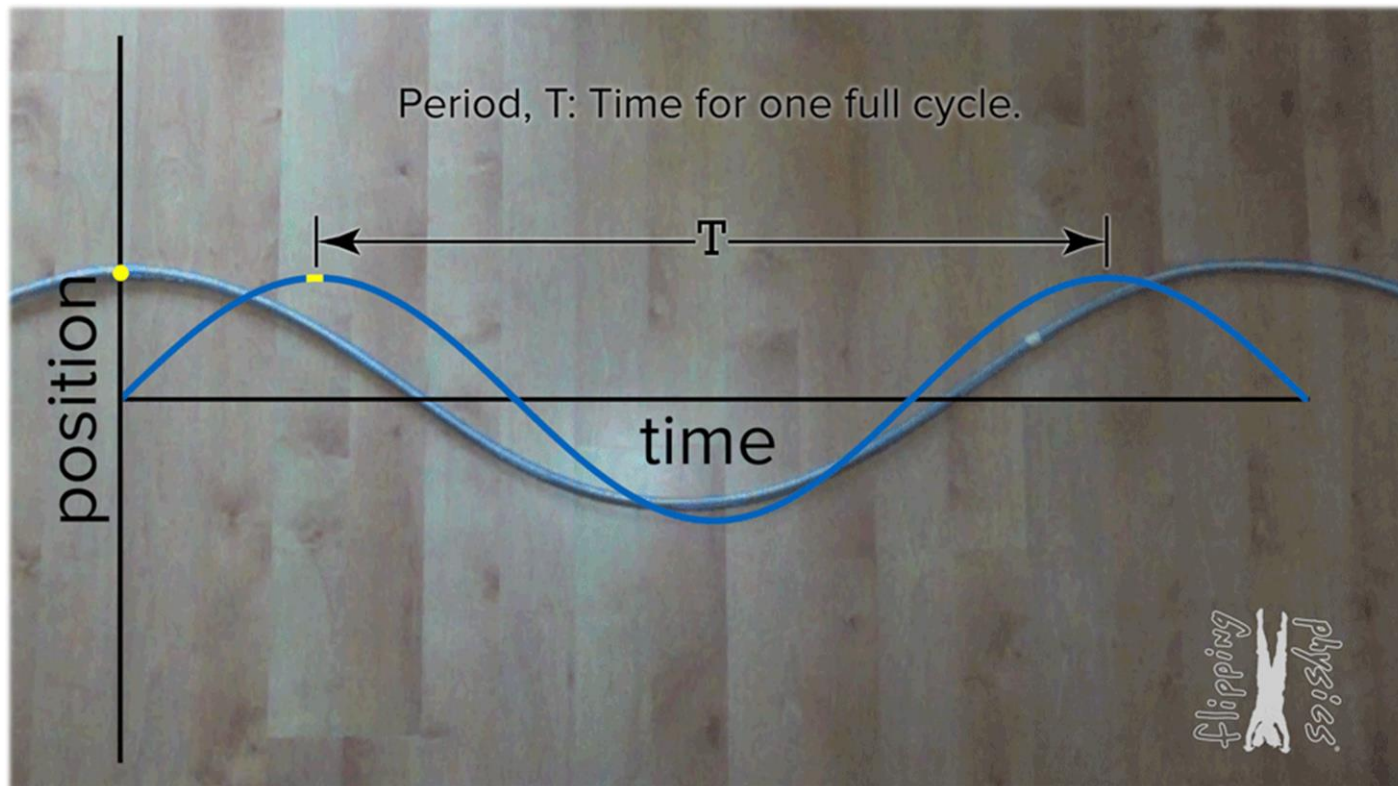
- Αριθμός κορυφών ανά μονάδα χρόνου

- $f = 1/T$

- Μετρείται σε Hertz (Hz)

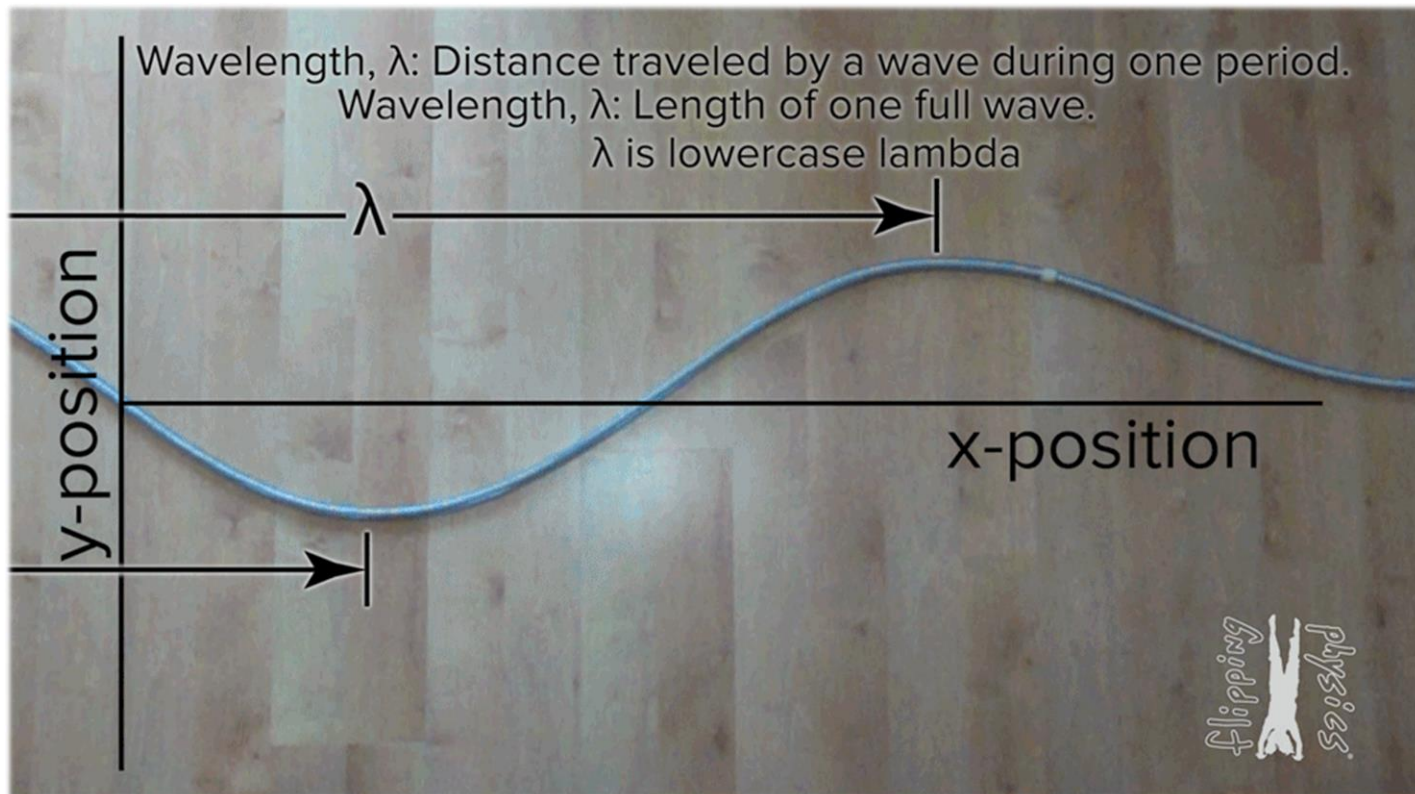
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

◉ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x \pm ut) + \varphi \right)$$

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- Κυματαριθμός

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

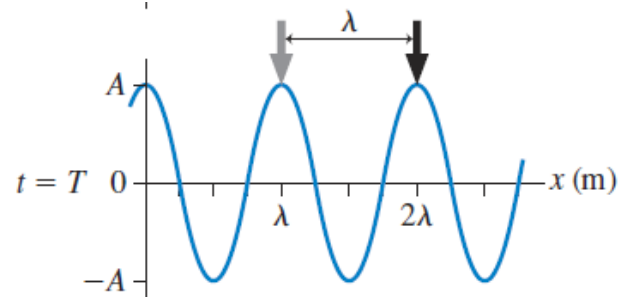
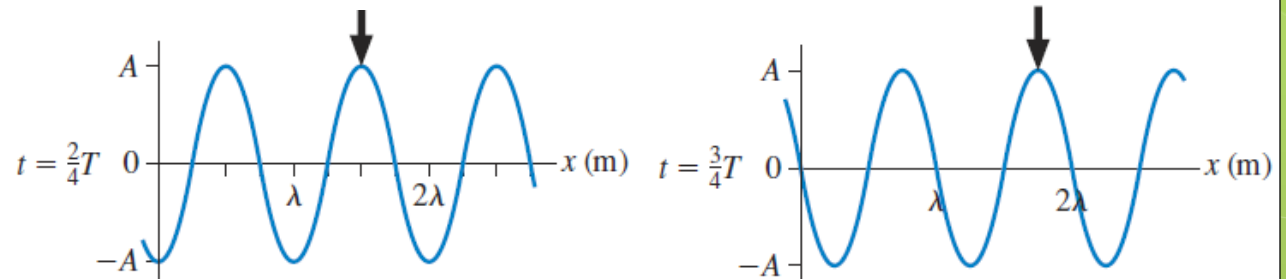
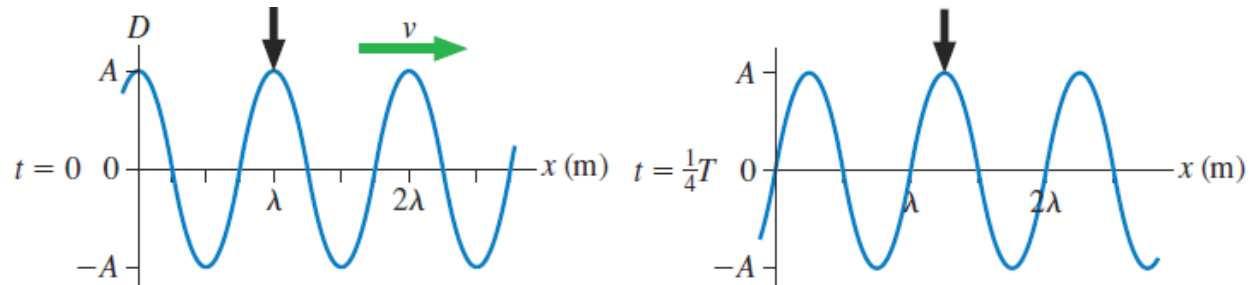
- Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Κύματα

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$



Το μήκος κύματος αποτελεί «συνέπεια» ενός κύματος συχνότητας f που ταξιδεύει σε μέσο στο οποίο η ταχύτητα του κύματος ισούται με u

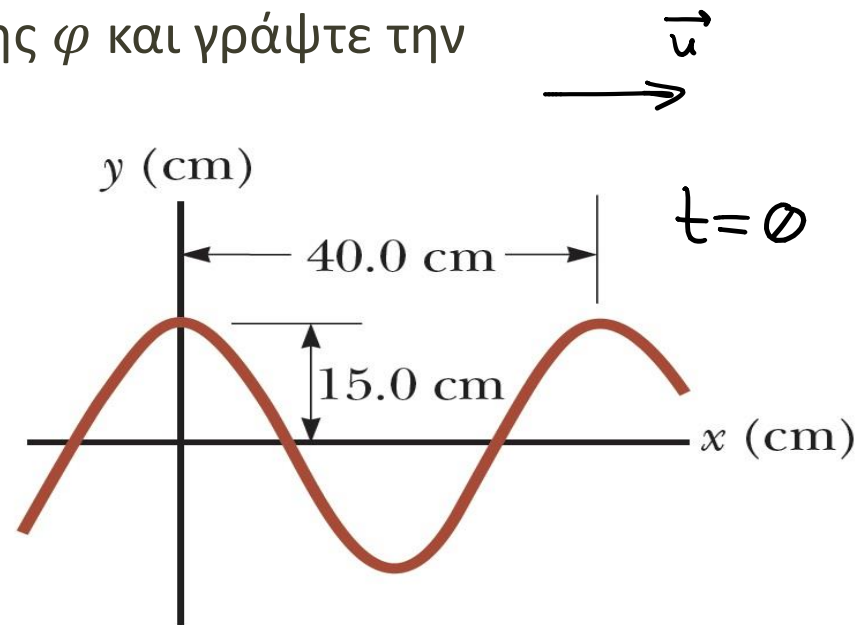
Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.

- ◉ A) Βρείτε τα k , T , ω , u .

- ◉ B) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.



Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

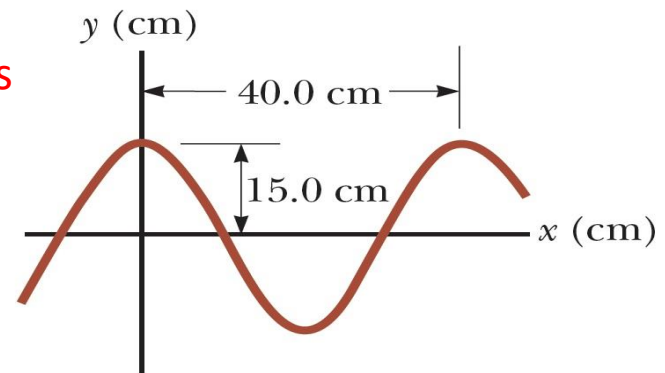
- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- ◉ Α) Βρείτε τα k , T , ω , u .

Είναι: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \text{ rad/s}$$

$$u = \lambda f = 0.4 \times 8 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$* y(x,t) = 0.15 \sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.

- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

Είναι $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi) = 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \varphi)$

Έχουμε $y(x,0) = 0.15 \sin(kx - 0 + \varphi) = 0.15 \sin(kx + \varphi)$

Για $x=0$, βλέπω ότι $y(0,0) = A$ από το σχήμα, δηλ. $y(0,0) = 0.15$.

Άρα

$$y(0,0) = 0.15 \sin(\varphi) \stackrel{\text{σχήμα}}{=} 0.15$$

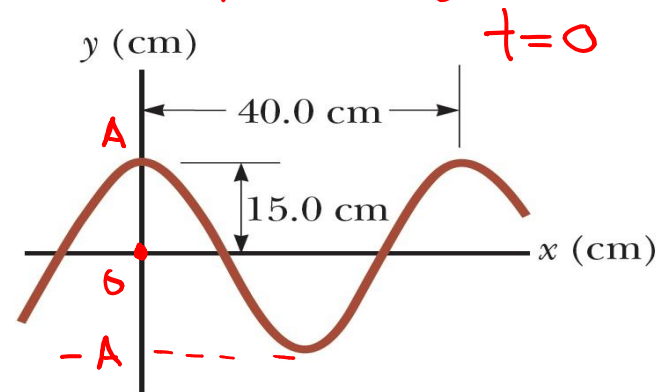
$$\sin \varphi = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } *$$

$$A = 0.15 \text{ m}$$

$$\lambda = 0.4 \text{ m}$$

$$f = 8 \text{ Hz}$$



Κύματα

$$(1) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow 2\pi = k\lambda$$

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

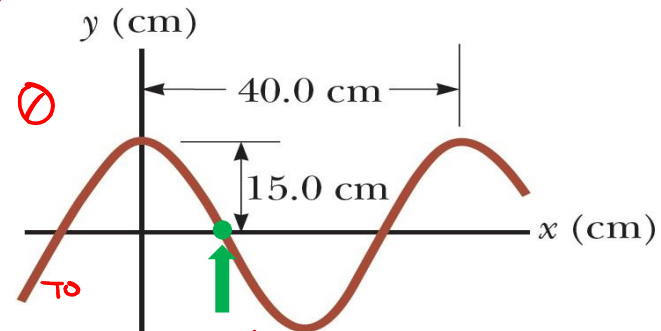
Στην ερώτηση «**αν παίρναμε άλλο σημείο στο σχήμα, θα παίρναμε την ίδια απάντηση?**», η απάντηση είναι «**ναι**», αν και δεν έχουμε πληροφορία για όλα τα υπόλοιπα σημεία. Μπορούμε όμως να πάρουμε για παράδειγμα το «**πράσινο**» σημείο στο σχήμα. Έχει $x = \lambda/4$ και $y = 0$ και έτσι μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς:

$$\text{Για } x = \frac{\lambda}{4}, \quad y\left(\frac{\lambda}{4}, 0\right) = A \sin\left(k\frac{\lambda}{4} + \varphi\right) = 0$$

$$\text{δηλ. } 0.15 \sin\left(\frac{k\lambda}{4} + \varphi\right) \stackrel{(1)}{=} 0.15 \sin\left(\frac{2\pi}{4} + \varphi\right) = 0$$

Οπότε :

$$0.15 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ , επιλέγουμε το } +\pi/2 \text{ γιατί το σχήμα είναι ως συνημιτόνου (μη-ανεστραμμένο).}$$



Κύματα

● Ημιτονοειδή κύματα

- Κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα του διπλανού σχήματος:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

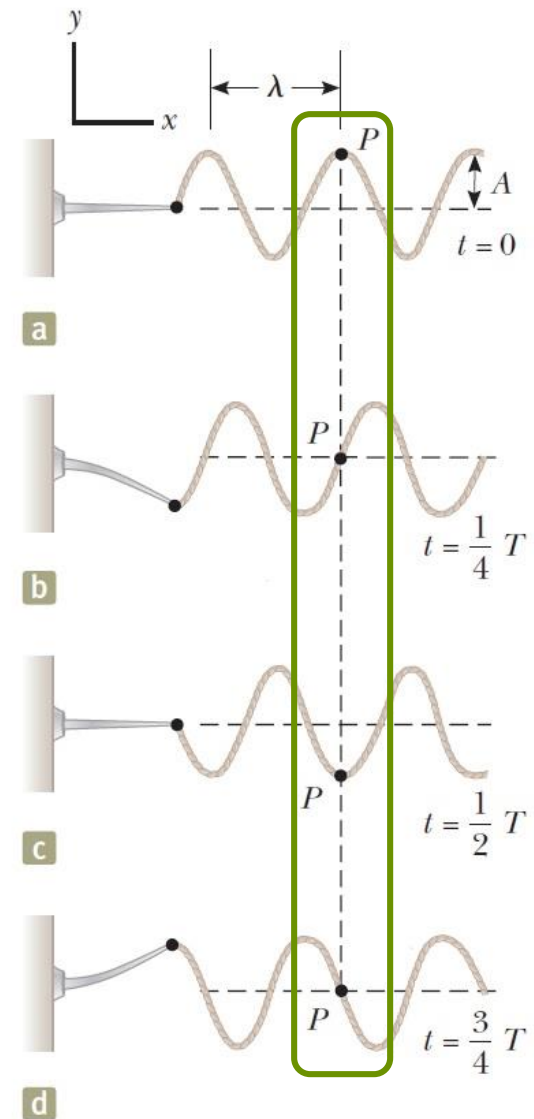
- Άρα περιγράφει και την κίνηση κάθε σημείου του, όπως π.χ. το P
- Εγκάρσια μετατόπιση του στοιχείου P από τη θέση ισορροπίας

$$y(t) = y(x_P, t) = A \sin(kx_P - \omega t)$$

- Εγκάρσια ταχύτητα και επιτάχυνση του στοιχείου P

$$v_y(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx_P - \omega t)$$

$$a_y(t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx_P - \omega t)$$



Κύματα

- Ταχύτητα Διάδοσης u κύματος σε τεντωμένο νήμα

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

όπου T η τάση του νήματος, και μ η μάζα του νήματος ανά μονάδα μήκους

- Μάζα ανά μονάδα μήκους

$$\mu = \frac{m}{l}$$

- Λέγεται και γραμμική πυκνότητα μάζας

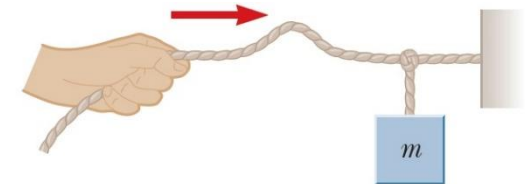
Κύματα

● Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Είπαμε (και είδαμε) ότι στα μηχανικά κύματα μεταφέρεται ενέργεια
- Που πηγαίνει αυτή η ενέργεια;

● Παράδειγμα:

- Έστω το {σώμα + Γη} ως μη απομονωμένο σύστημα
- Ενέργεια λόγω έργου (χέρι)
 - Εξωτερική στο σύστημα
- Διάδοση κατά μήκος του νήματος
- Ανύψωση σώματος
 - Μεταβολή δυναμικής ενέργειας συστήματος Γη-σώμα



a

Ο παλμός ανυψώνει το σώμα. Αυξάνεται έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα-Γη.



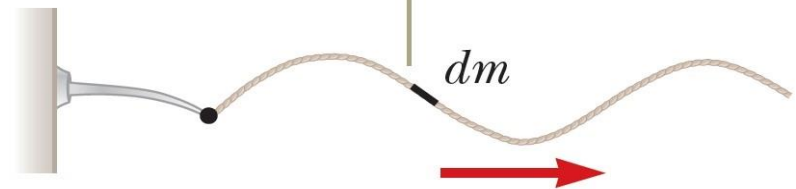
b

Κύματα

- Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα του νήματος μήκους dx και μάζας dm
- Εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (y -άξονα)!
- Άρα έχει **κινητική και δυναμική** ενέργεια!

Κάθε απειροστά μικρό (στοιχειώδες) τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, και άρα έχει δυναμική και κινητική ενέργεια.



Κύματα

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

- Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Κινητική ενέργεια για ένα στοιχείο νήματος

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2 \quad (t=0) \quad = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx$$

- Ολοκληρώνοντας για ένα μήκος κύματος

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

- Δυναμική ενέργεια (με όμοιο τρόπο)

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

- Η συνολική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής

$$E_{mech} = K_{\lambda} + U_{\lambda} = E_{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

- **Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (= Μέση Ισχύς)**

$$P = \frac{E_{μηχ.κυμ.}}{\Delta t} = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u$$

με u την ταχύτητα διάδοσης του κύματος



Εικόνα: Τα αυτιά του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί να ακούν και να ερμηνεύουν ηχητικά κύματα ως φωνή ή ως ήχους. Κάποια ζώα, όπως το είδος αλεπούς με τα αυτιά νυχτερίδας, έχουν αυτιά που είναι προσαρμοσμένα να ακούν πολύ αδύναμους ήχους.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηχητικά Κύματα

Ηχητικά Κύματα

- Τρεις κατηγορίες ηχητικών κυμάτων

- **Ακουστικά κύματα**

- Μουσική, φωνή

- **Κύματα υποήχων (υπόηχοι)**

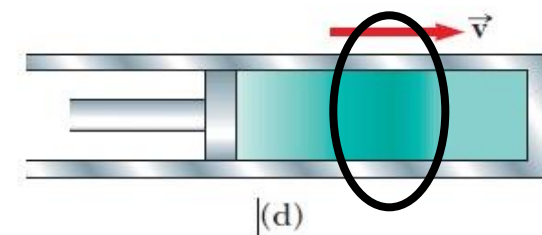
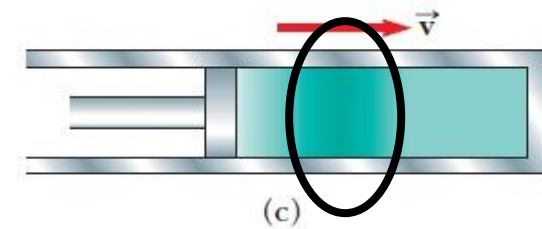
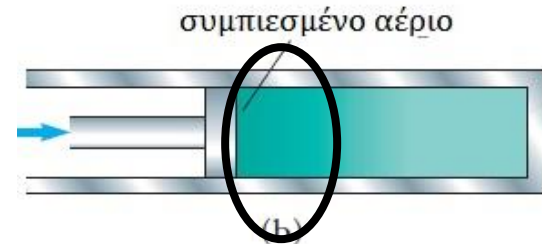
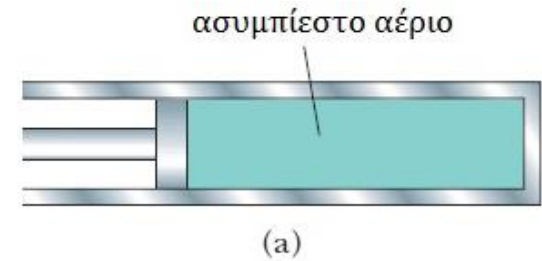
- Ελέφαντες, φάλαινες, και άλλα ζώα επικοινωνούν με υπόηχους
 - Έντονα φυσικά φαινόμενα παράγουν υπόηχους
 - Καταιγίδες, κατολισθήσεις, σεισμοί, ηφαιστειακή δραστηριότητα κ.α.

- **Κύματα υπερήχων (υπέρηχοι)**

- Σφυρίχτρες σκύλων, επικοινωνία νυχτερίδων
 - Ιατρική απεικόνιση

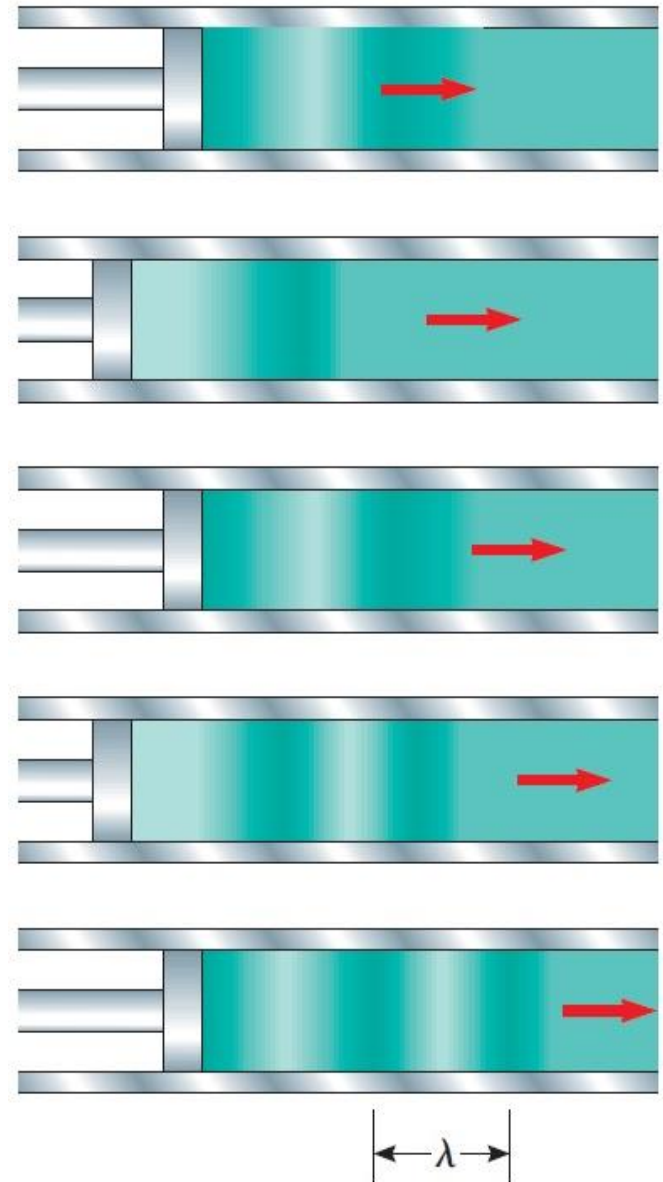
Ηχητικά Κύματα

- Έμβολο σε ακινησία – (a)
 - Αέριο ασυμπίεστο και σε ομοιόμορφη κατανομή
- Έμβολο σε κίνηση προς τα δεξιά – (b)
 - Πίεση και πυκνότητα αερίου μπροστά στο έμβολο είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στο υπόλοιπο μέρος του
- Έμβολο σε ακινησία – (c)
 - Διάμηκες κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\vec{u}$
- Η διάδοση συνεχίζεται – (d)



Ηχητικά Κύματα

- Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση
 - Πίεση προς τα εμπρός
 - Περιοχές συμπίεσης (σκούρο)
 - Πυκνώματα
 - Τράβηγμα προς τα πίσω
 - Περιοχές αραιώσης (ανοιχτό)
 - Αραιώματα
- Διάδοση με ταχύτητα ήχου στο μέσο

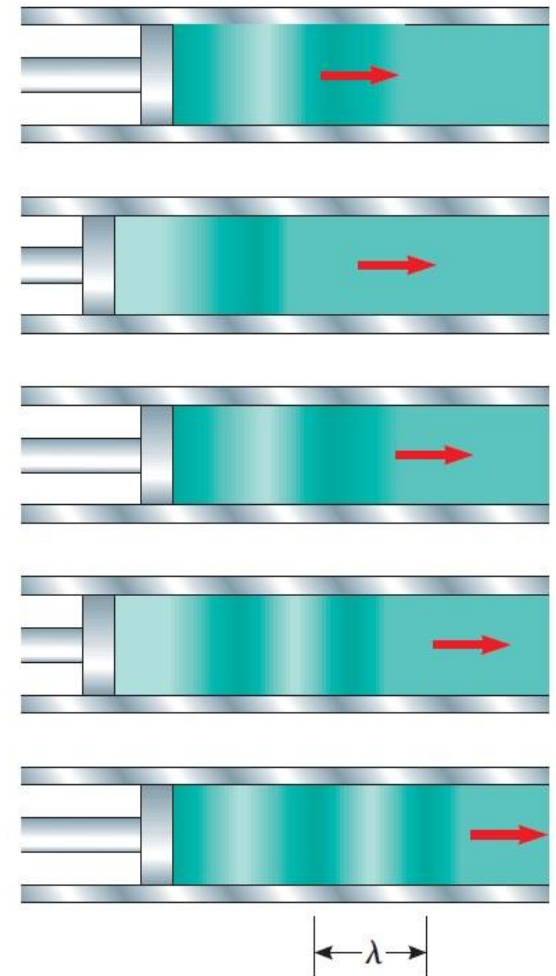


Ηχητικά Κύματα

- ◉ Έμβολο σε απλή αρμονική ταλάντωση
- ◉ Απόσταση μεταξύ διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων
 - ◉ Μήκος κύματος λ
- ◉ Κάθε μικρός όγκος αερίου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση **παράλληλη** προς τη διεύθυνση διάδοσης

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t)$$

- ◉ Ο όρος s_{max} δηλώνει το πλάτος μετατόπισης
 - ◉ Είναι η μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου από τη θέση ισορροπίας



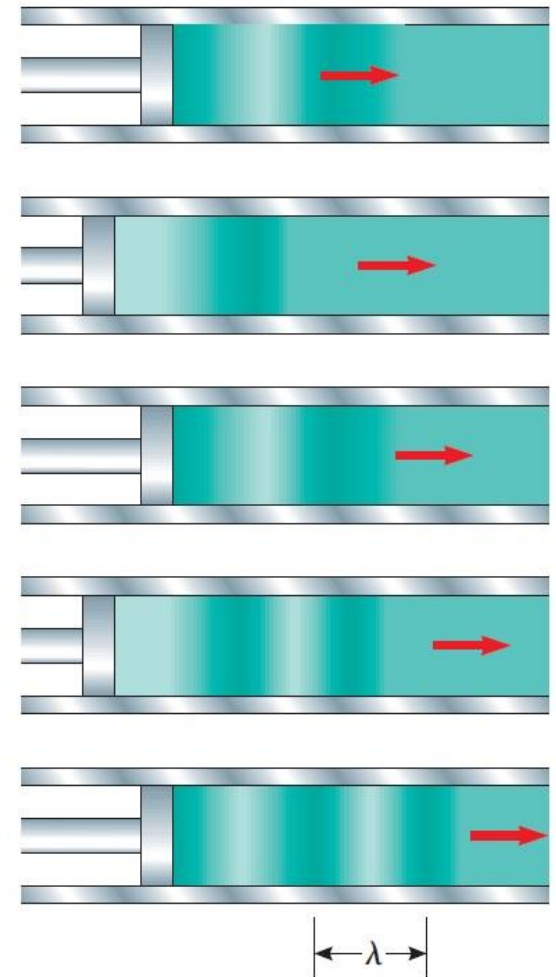
Ηχητικά Κύματα

- Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP

$$\Delta P(x, t) = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t)$$

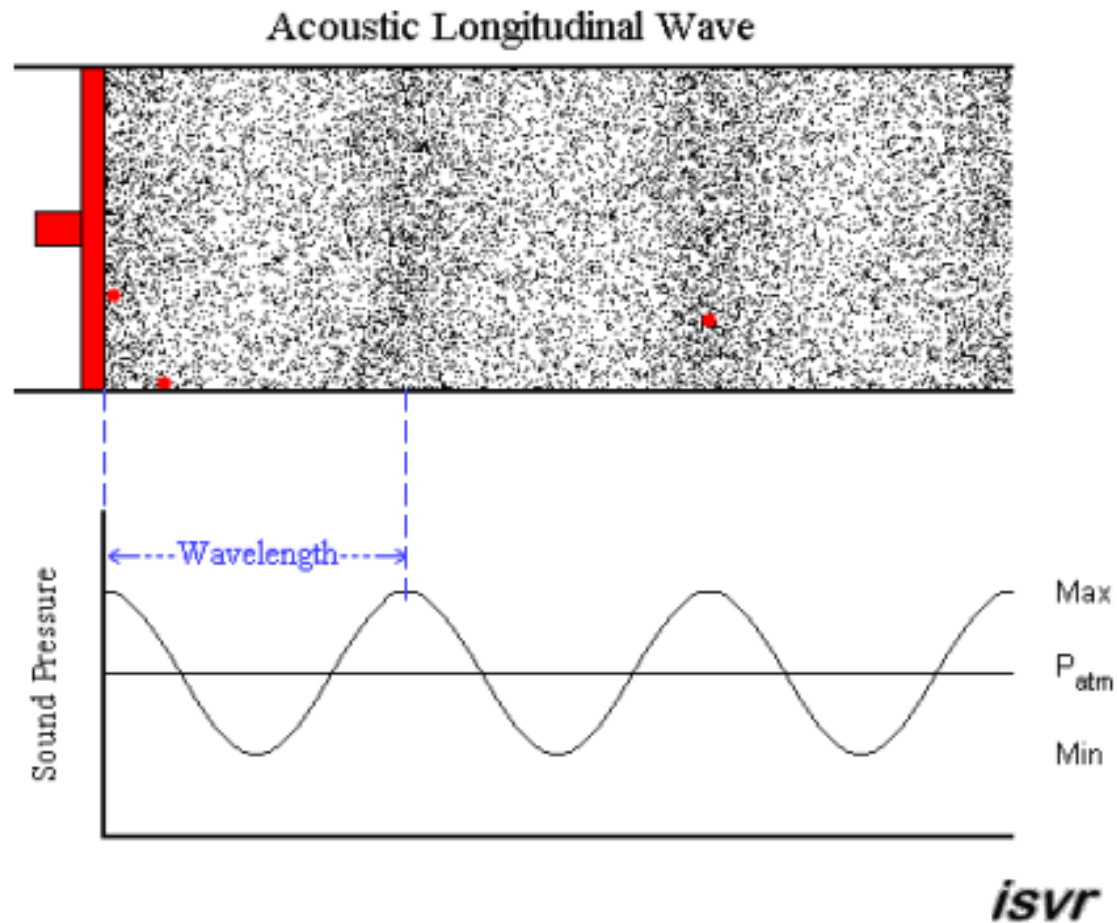
όπου ΔP_{max} η μέγιστη μεταβολή της πίεσης γύρω από την τιμή ισορροπίας

- Ο όρος ΔP_{max} ονομάζεται πλάτος πίεσης



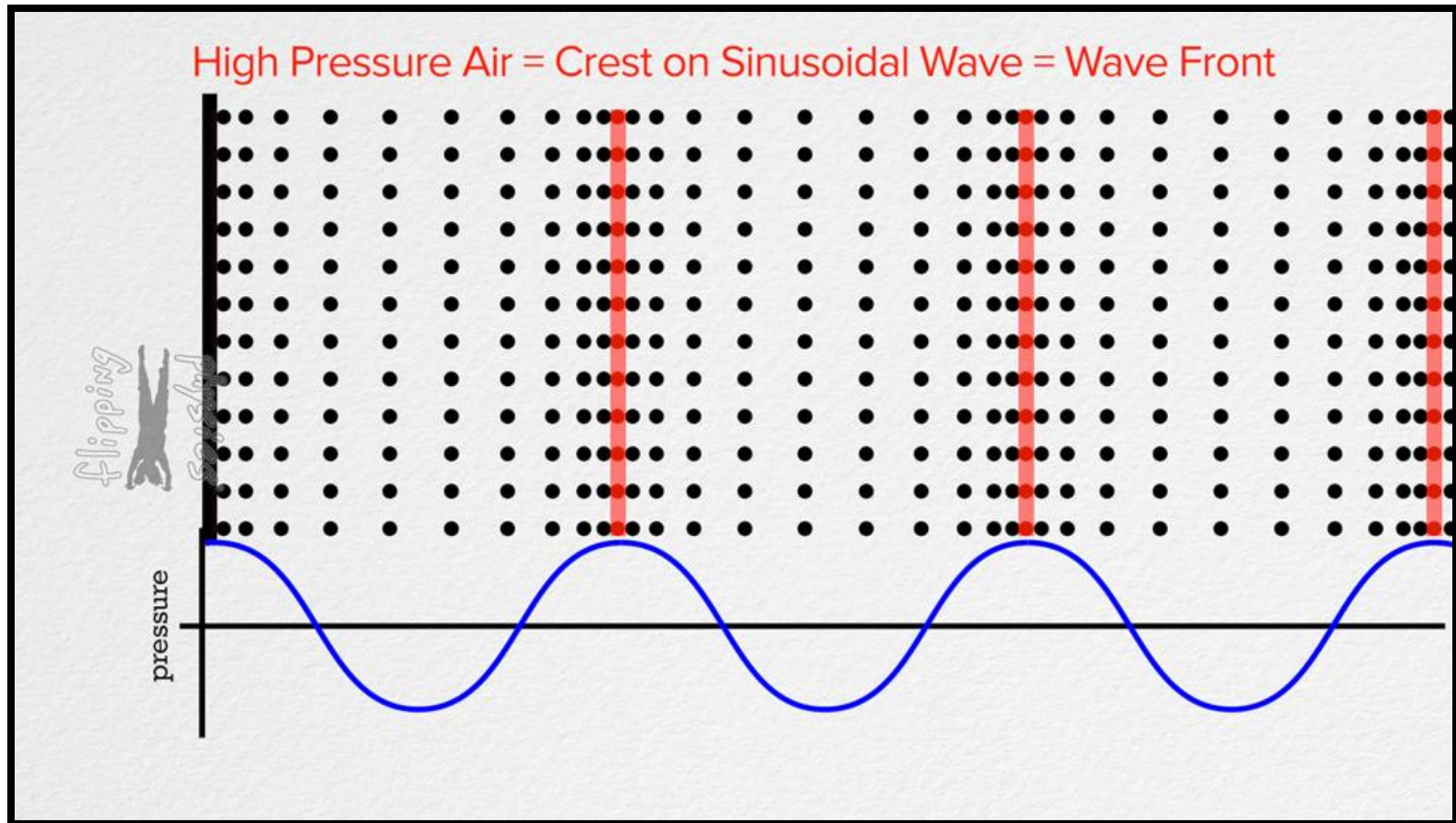
Ηχητικά Κύματα

- Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP



Ηχητικά Κύματα

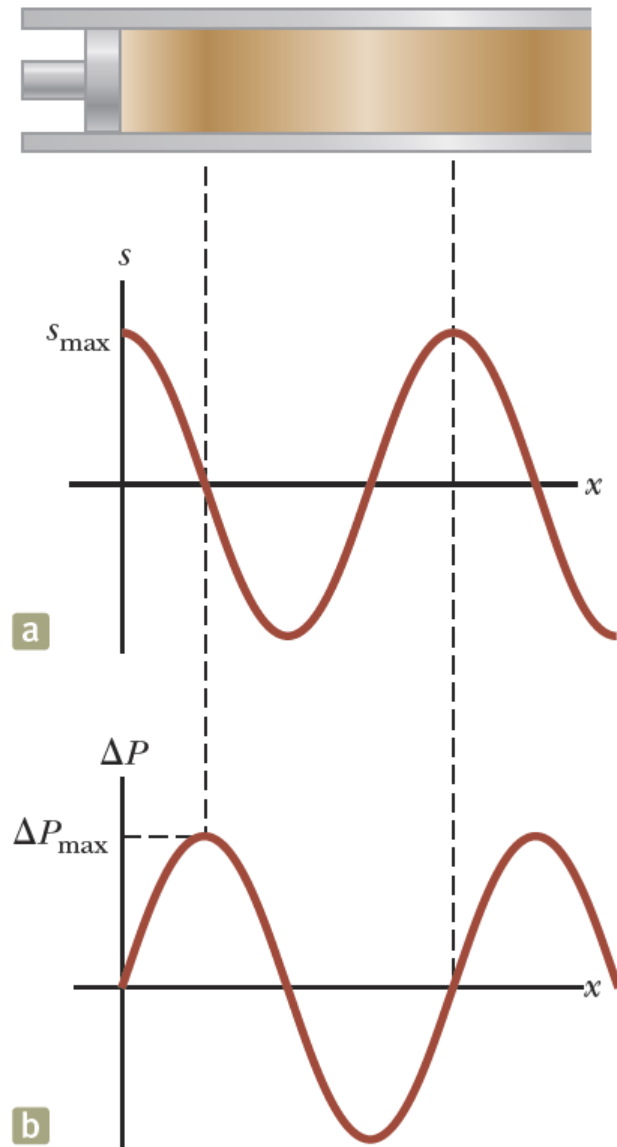
- Μεταβολή πίεσης αερίου ΔP



Ηχητικά Κύματα

- Μεταβολή πίεσης αερίου $\Delta P(x, t)$ και μετατόπισης $s(x, t)$

- Η μετατόπιση που περιγράψαμε ως συνημιτονοειδής συνάρτηση οδηγεί σε μεταβολή πίεσης ως ημιτονοειδή συνάρτηση
- Διαφορά φάσης $\pi/2$
- Μεταβολή πίεσης μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) $\rightarrow$ μετατόπιση μηδενική!
- Μετατόπιση μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) $\rightarrow$ μεταβολή πίεσης μηδενική!



Ηχητικά Κύματα

- Ταχύτητα διάδοσης ήχου στον αέρα

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}}$$

όπου T_c η θερμοκρασία του αέρα (σε βαθμούς C)

- Παράδειγμα:

- Πώς θα μετρήσουμε σε πόση απόσταση από μας έπεσε ένας κεραυνός που μόλις είδαμε, αν ακούσουμε τον κρότο του σε t δευτ/πτα?



Ηχητικά Κύματα

Αύξηση θερμοκρασίας $\Rightarrow$ αύξηση κινητικής ενέργειας μορίων

• Ταχύτητα διάδοσης ήχου σε άλλα υλικά

Table 17.1 Speed of Sound in Various Media

Medium	v (m/s)	Medium	v (m/s)	Medium	v (m/s)
Gases		Liquids at 25°C		Solids^a	
Hydrogen (0°C)	1 286	Glycerol	1 904	Pyrex glass	5 640
Helium (0°C)	972	Seawater	1 533	Iron	5 950
Air (20°C)	343	Water	1 493	Aluminum	6 420
Air (0°C)	331	Mercury	1 450	Brass	4 700
Oxygen (0°C)	317	Kerosene	1 324	Copper	5 010
		Methyl alcohol	1 143	Gold	3 240
		Carbon tetrachloride	926	Lucite	2 680
				Lead	1 960
				Rubber	1 600

^aValues given are for propagation of longitudinal waves in bulk media. Speeds for longitudinal waves in thin rods are smaller, and speeds of transverse waves in bulk are smaller yet.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B = μέτρο ελαστικότητας όγκου
 ρ = πυκνότητα

Ηχητικά Κύματα

- ◉ Ένταση περιοδικών ηχητικών κυμάτων

$$I = \frac{\text{Μέση Ισχύς}}{A} = \frac{P_{\text{avg}}}{A}$$

όπου A το εμβαδό της επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης

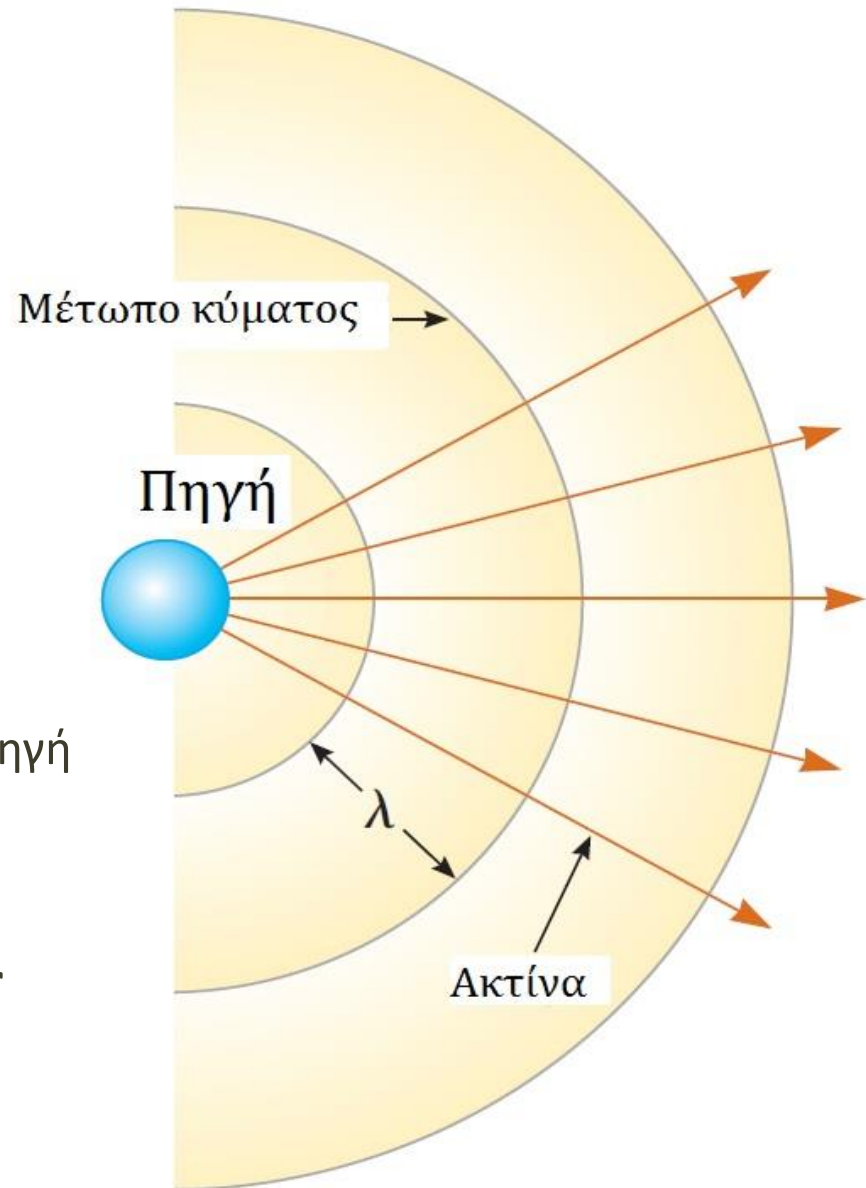
- ◉ Τα κύματα που είδαμε ως τώρα μοντελοποιούνταν ως διαμήκη κύματα
 - ◉ Διαδίδονταν σε ευθεία γραμμή
- ◉ Στην πράξη, τα ηχητικά κύματα διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις
 - ◉ Σφαιρικά κύματα

Ηχητικά Κύματα

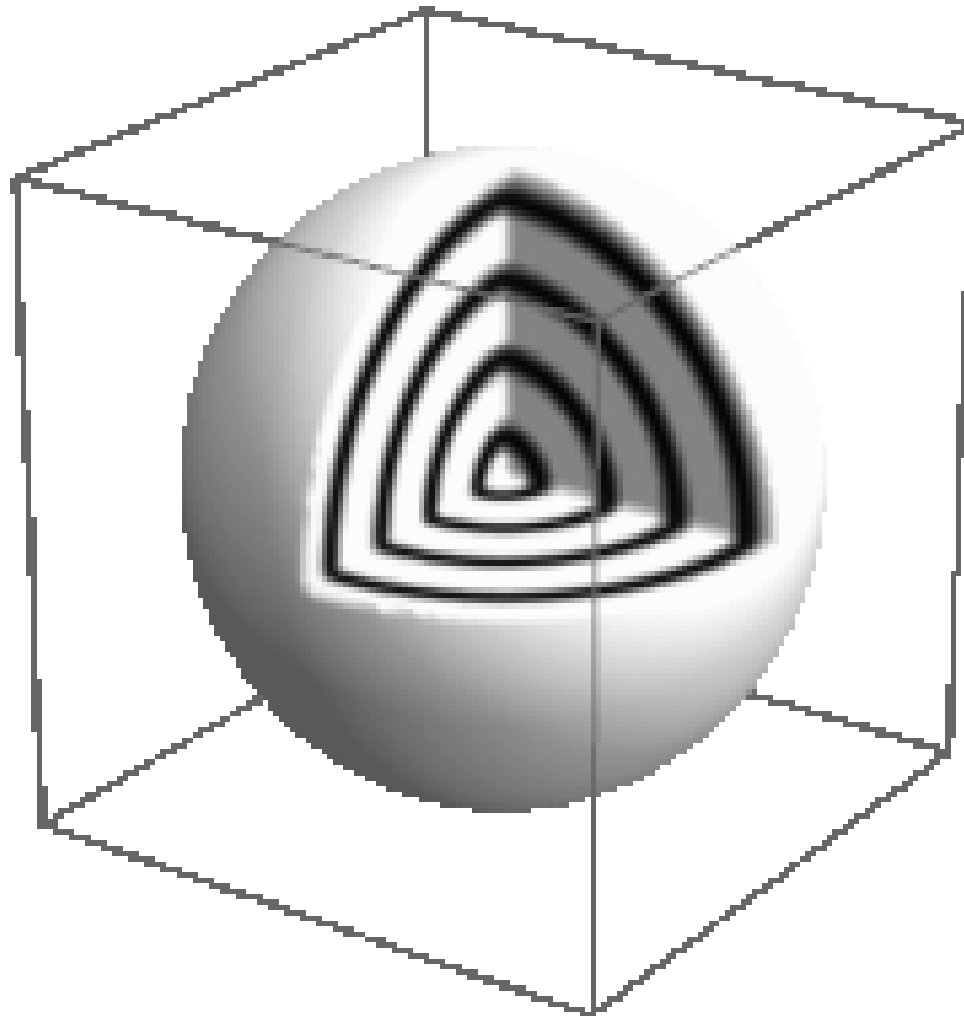
- Σφαιρικό κύμα
 - Ομόκεντρα κυκλικά τόξα
- Μέτωπο κύματος
 - Επιφάνεια όπου η φάση $(kx - \omega t + \varphi)$ του κύματος έχει ίδια τιμή
- Ακτίνες
 - Ευθείες που ξεκινούν απ' την πηγή
 - Δείχνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος
- Ένταση κύματος σε απόσταση r

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Εμβαδό μετώπου



Ηχητικά Κύματα



Ηχητικά Κύματα

Εμβαδό σφαίρας

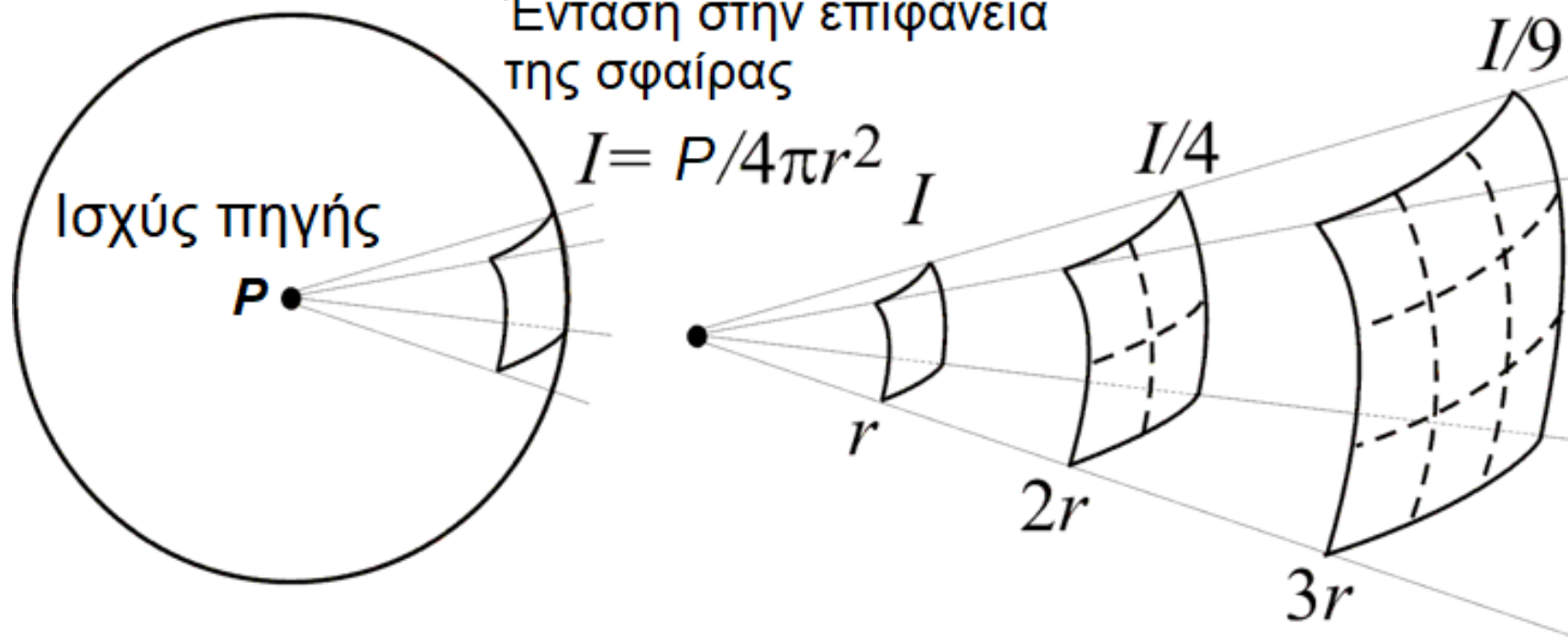
$$A = 4\pi r^2$$

Ένταση στην επιφάνεια
της σφαίρας

$$I = P / 4\pi r^2$$

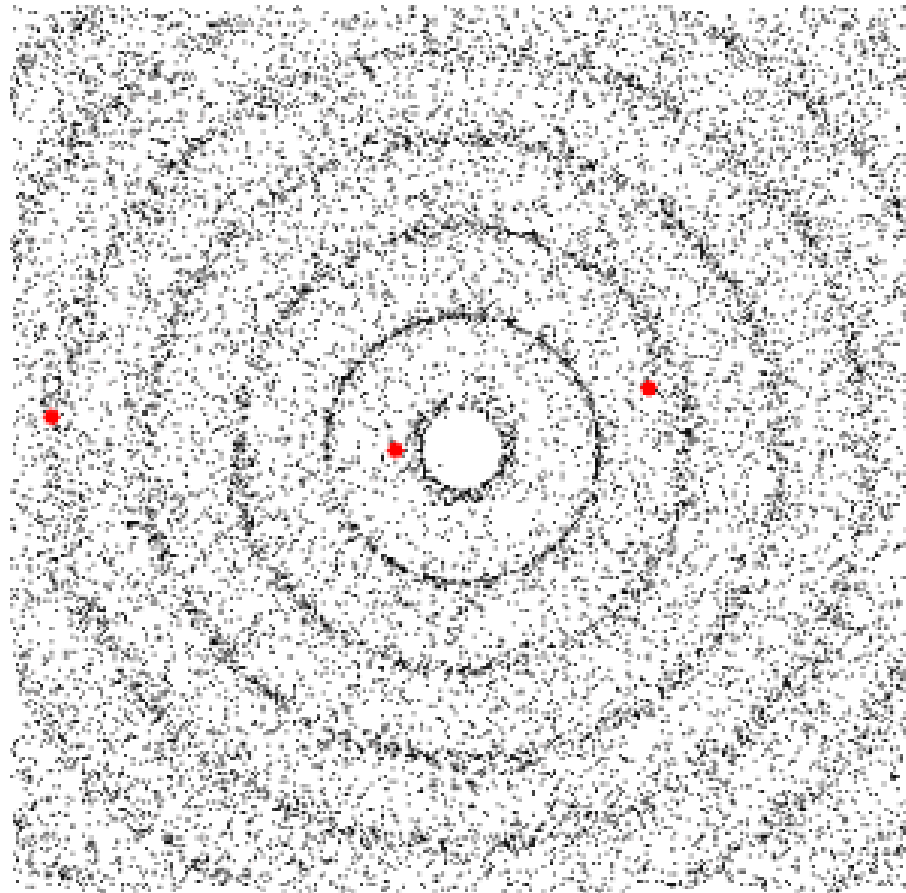
Ισχύς πηγής

P



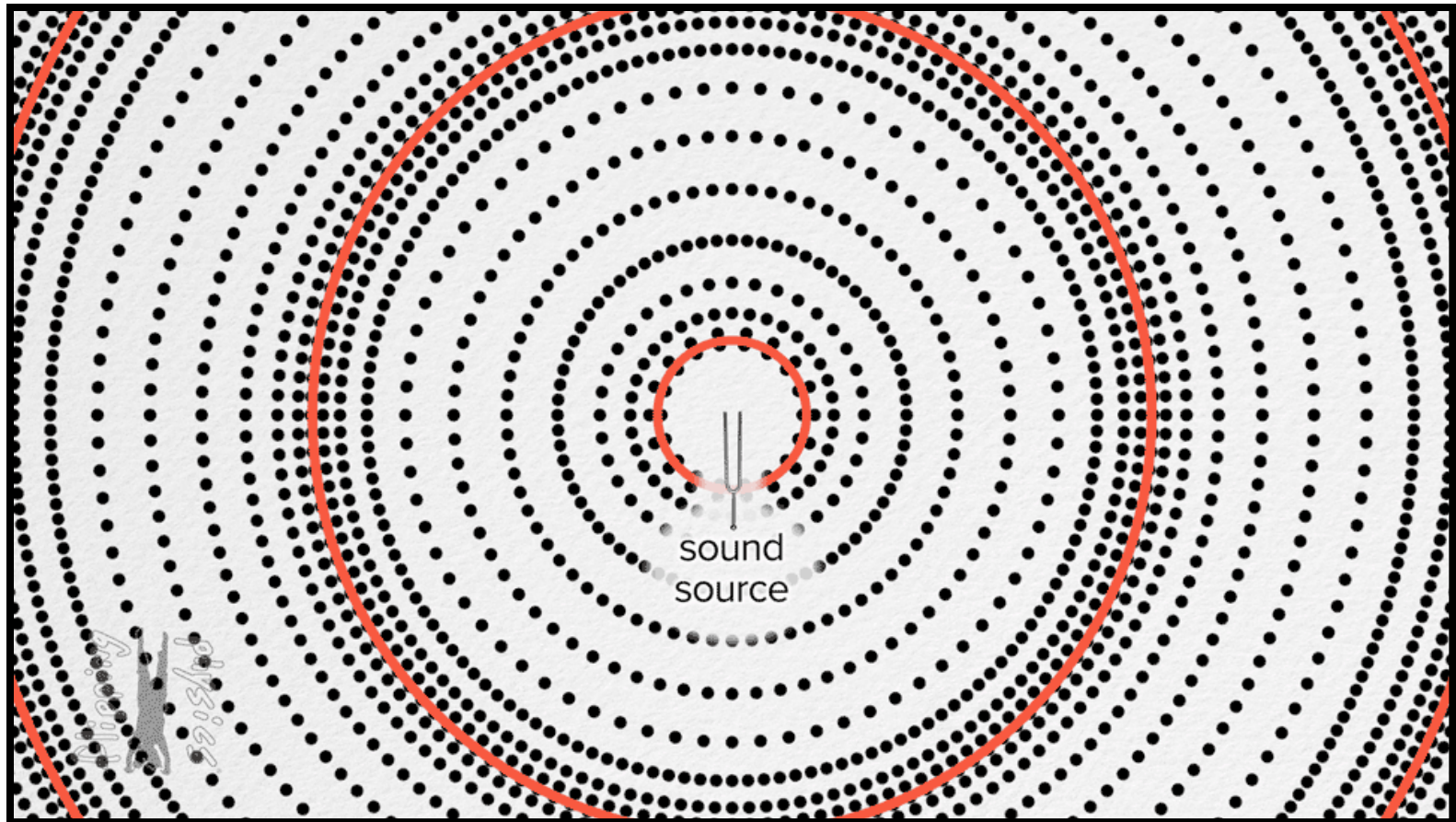
Ηχητικά Κύματα

Acoustic Monopole



isvr

Ηχητικά Κύματα



Ηχητικά Κύματα

- Οι ασθενέστεροι ήχοι που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα των 1000 Hz έχουν ένταση περίπου $10^{-12} \frac{W}{m^2}$
- Αυτό είναι το λεγόμενο **κατώφλι ακοής** (στα 1000 Hz).
- Οι δυνατότεροι ήχοι που μπορούμε να ακούσουμε (χωρίς πόνο) είναι έντασης $1 \frac{W}{m^2}$

Ηχητικά Κύματα

More interesting dB range :)

◉ Ηχοστάθμη

- ◉ Μεγάλο εύρος εντάσεων αντιληπτό απ' το αυτί μας
- ◉ Μια λογαριθμική κλίμακα είναι βολικότερη
- ◉ **Ηχοστάθμη**

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

- ◉ I_0 : ένταση αναφοράς (κατώφλι ακοής)
- ◉ $I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$
 - ◉ Για συχνότητες 1000 Hz
 - ◉ Στην πραγματικότητα, είναι μεταβλητή
- ◉ β : μετρείται σε Decibel (dB)
 - ◉ Προς τιμήν του A. G. Bell
- ◉ Κατώφλι ακοής: 0 dB
- ◉ Όριο πόνου: 120-130 dB

Sound Levels	
Source of Sound	β (dB)
Nearby jet airplane	150
Jackhammer; machine gun	130
Siren; rock concert	120
Subway; power lawn mower	100
Busy traffic	80
Vacuum cleaner	70
Normal conversation	60
Mosquito buzzing	40
Whisper	30
Rustling leaves	10
Threshold of hearing	0

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου που λαμβάνει ο εργάτης κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.
 - A) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.
 - B) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.
 - Γ) Αν ο εργάτης δε λαμβάνει την ίδια ένταση ήχου από κάθε μηχανή και γνωρίζει ότι αυτές βρίσκονται σε απόσταση $r_1 = 10 \text{ m}$ και $r_2 = 20 \text{ m}$ αντίστοιχα, τότε ποιος είναι ο λόγος των εντάσεών τους?

Ηχητικά Κύματα

• Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

A) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.

$$\text{Έίναι } \beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow \beta = 10 \log_{10} \frac{2 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} =$$

$$= 10 \log_{10} (2 \cdot 10^5)$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^5$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 50 \cdot \log_{10} 10$$

$$= 50 + 10 \log_{10} 2 \approx 53 \text{ dB}$$

$\log_{10} 2 \approx 0.3$

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$\rightarrow \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\rightarrow \log(a^b) = b \log(a)$$

Ηχητικά Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

Β) Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.

$$\begin{aligned} \text{Δίνονται: } \beta &= 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \\ I &= 4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ I_0 &= 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \beta &= 10 \log_{10} \frac{4 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} \\ &= 10 \log_{10} (4 \cdot 10^5) \\ &= 10 \log_{10} 4 + 10 \log_{10} 10^5 \\ &= 10 \log_{10} 4 + 50 \log_{10} 10 \quad \rightarrow 1 \\ &= 50 + 10 \cdot \underbrace{\log_{10} 4}_{\approx 6} \approx 56 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \\ \log(ab) &= \log(a) + \log(b) \\ \log(a^b) &= b \log(a) \end{aligned}$$

Ηχητικά Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Γ) Αν ο εργάτης δε λαμβάνει την ίδια ένταση ήχου από κάθε μηχανή και γνωρίζει ότι αυτές βρίσκονται σε απόσταση $r_1 = 10 \text{ m}$ και $r_2 = 20 \text{ m}$ αντίστοιχα, τότε ποιος είναι ο λόγος των εντάσεών τους?

Θα είναι

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{P_{avg}}{4\pi r_1^2} \\ I_2 &= \frac{P_{avg}}{4\pi r_2^2} \\ r_1 &= 10 \text{ m} \\ r_2 &= 20 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{4\pi r_1^2}}{\frac{1}{4\pi r_2^2}} = \frac{\frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{r_2^2}}$$

ή

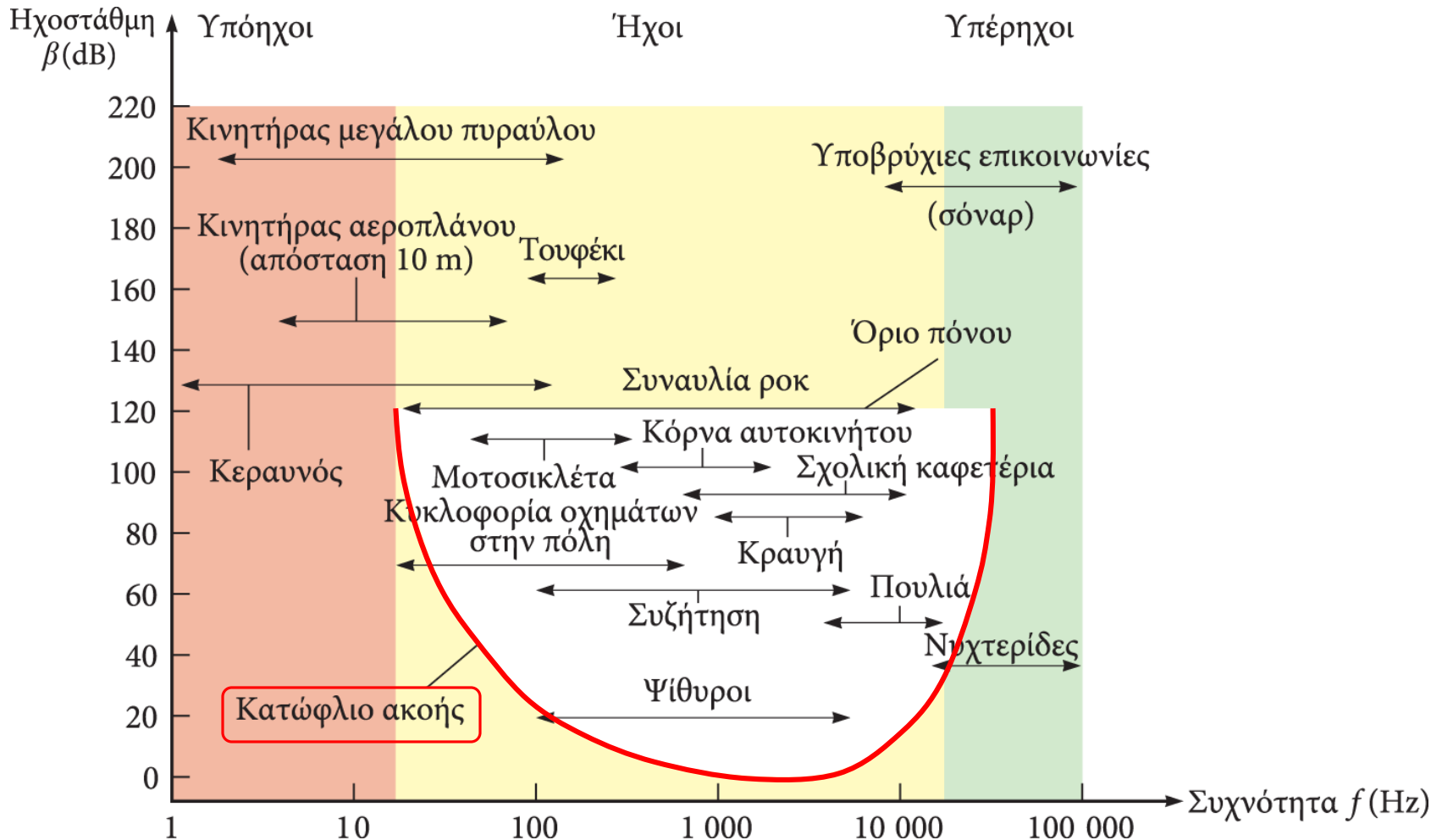
$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{20^2}{10^2} = \\ &= \frac{400}{100} = 4 \end{aligned}$$

Άρα $\frac{I_1}{I_2} = 4.$

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2}$$

Ηχητικά Κύματα

Ακουστότητα και Συχνότητα – Ψυχοακουστική



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπίεση ήχου (MPEG3 standard – MP3)

- Τρεις σημαντικοί παράγοντες

- Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται ($<$ κατώφλι ακοής)

- Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε (μην αποθηκεύσουμε)

- Β. Κάποιοι ήχοι είναι πιο «ευαίσθητοι» από άλλους

- Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)

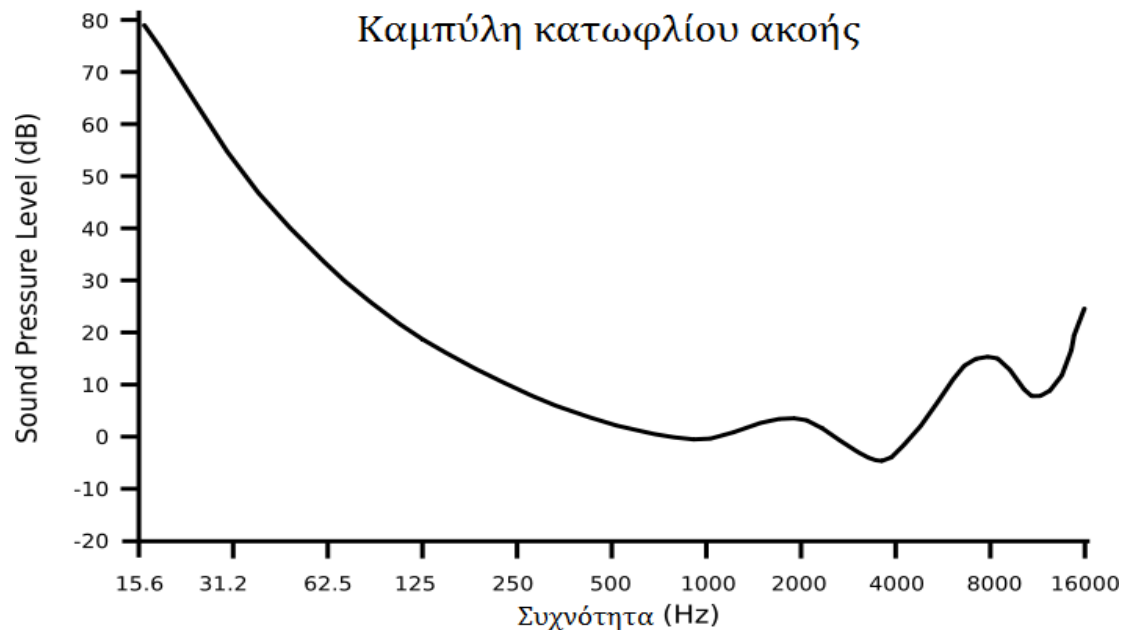
- Γ. Κάποιοι ήχοι επικαλύπτουν άλλους γειτονικούς

- Το φαινόμενο του masking (masking effect)

Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

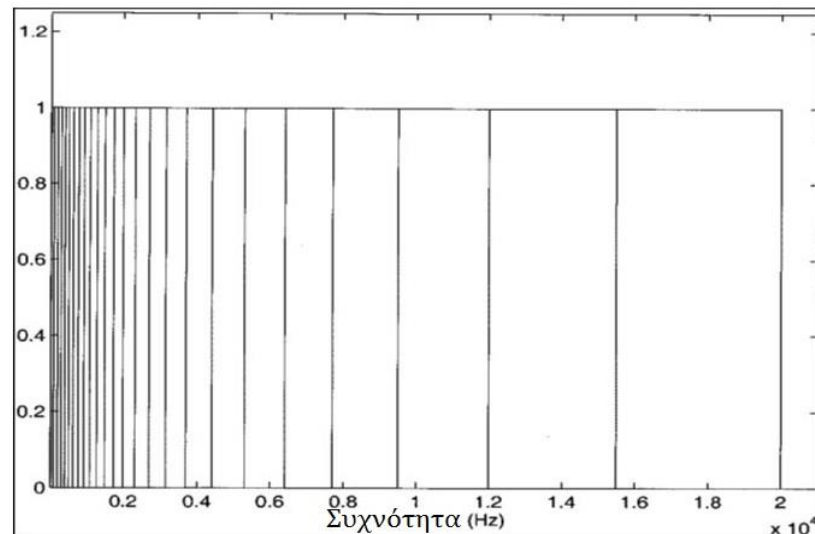
- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- Α. Εξάλειψη ήχων που δεν ακούγονται ($<$ κατώφλι ακοής)
 - Μπορούμε να τους αφαιρέσουμε
 - Ό,τι βρίσκεται κάτω από το κατώφλι, δε χρειάζεται να αποθηκευτεί



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

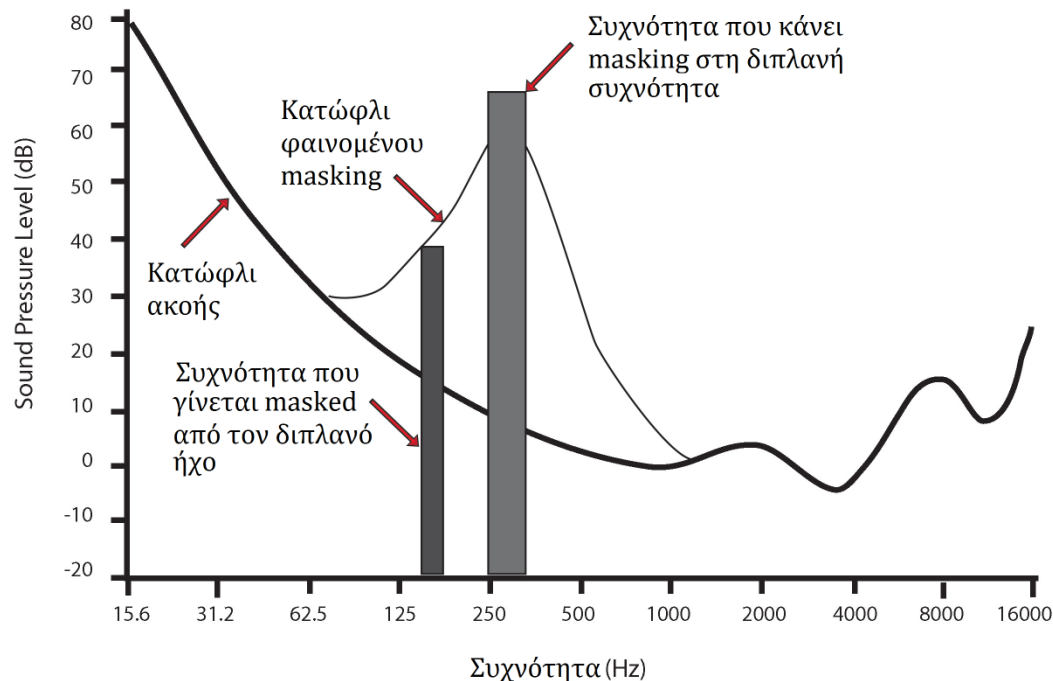
- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- Β. Κάποιοι ήχοι είναι πιο «ευαίσθητοι» από άλλους
 - Χρήση κρίσιμων ευρών ζώνης (critical bands)
 - Διαφορετική «βαρύτητα» σε κάθε ζώνη
 - Διαφορετική «ευαισθησία» του αυτιού σε κάθε ζώνη



Ηχητικά Κύματα

ο Παράδειγμα εφαρμογής:

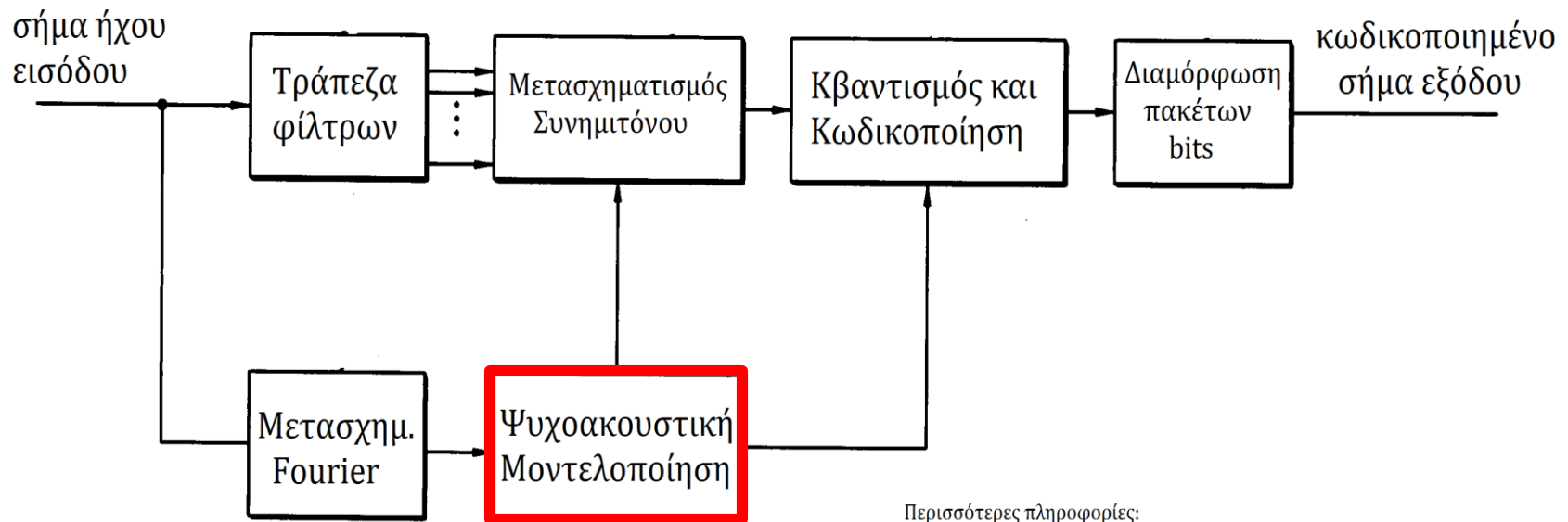
- ο Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- ο Γ. Masking effect
 - ο Ένας πιο δυνατός ήχος μπορεί να επικαλύψει ένα γειτονικό του
 - ο Η πληροφορία του γειτονικού ήχου δε χρειάζεται να αποθηκευτεί



Ηχητικά Κύματα

- Παράδειγμα εφαρμογής:

- Συμπίεση ήχου (MP3 standard)
- Απλοποιημένο διάγραμμα

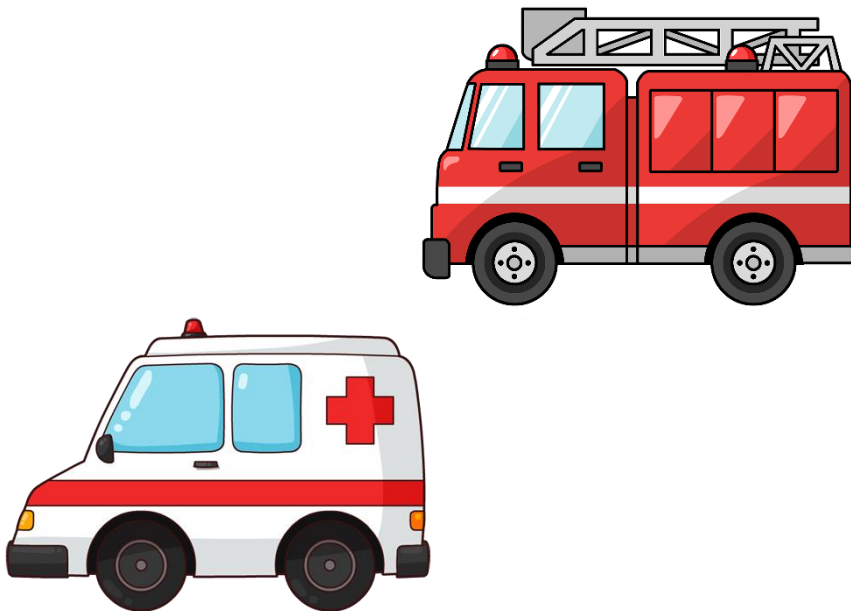


Περισσότερες πληροφορίες:
<http://www.cns.nyu.edu/~msl/courses/2223/Readings/IEEEXplore-1.pdf>

Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Άκρως συχνή εμπειρία!
- Ένα όχημα με σειρήνα μας πλησιάζει και απομακρύνεται από μας
 - Το ακούμε με υψηλότερη συχνότητα καθώς έρχεται προς εμάς
 - Το ακούμε με χαμηλότερη συχνότητα καθώς απομακρύνεται



Doppler effect

Στάσιμη πηγή ήχου



Πηγή ήχου που πλησιάζει



Παρατηρητής

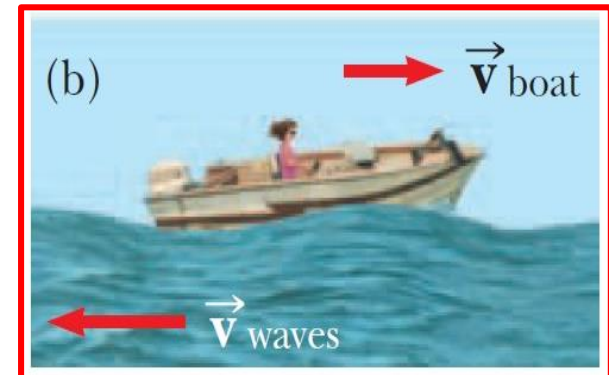
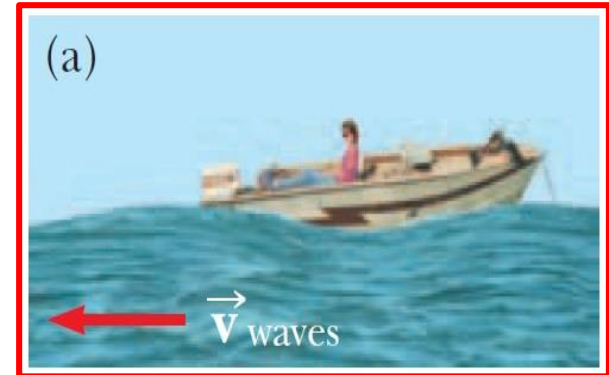
Πηγή ήχου που απομακρύνεται



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

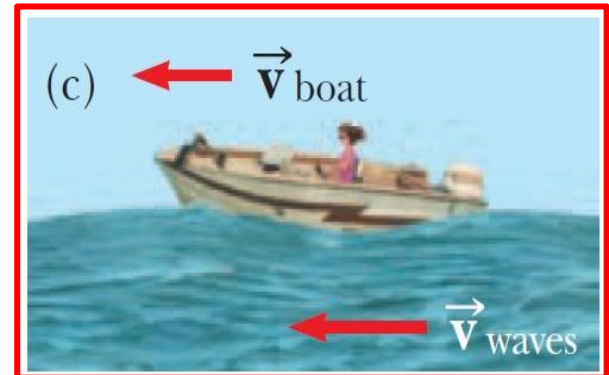
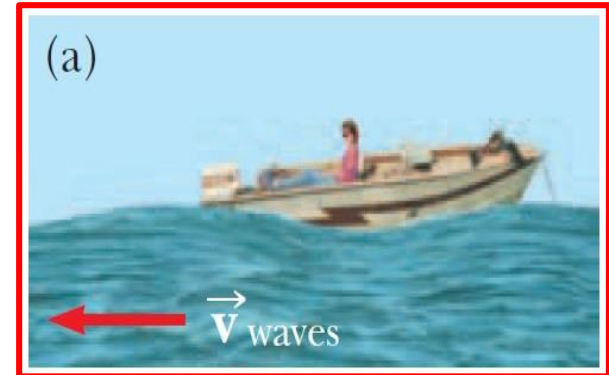
- Διαισθητική κατανόηση
 - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
 - Αν προχωρήσει η βάρκα προς την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει γρηγορότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας προς την πηγή
 - Μετράμε περίοδο $T' < T$
- Τα κύματα φτάνουν «πιο συχνά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' > f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Διαισθητική κατανόηση
 - Κύματα χτυπούν την ακίνητη βάρκα με περίοδο T
 - Αν προχωρήσει η βάρκα μακριά από την πηγή, κάθε κυματισμός θα φτάνει αργότερα απ' ό,τι πριν
 - Λόγω της κίνησής μας μακριά από την πηγή
 - Μετράμε περίοδο $T' > T$
- Τα κύματα φτάνουν «πιο αραιά» στη βάρκα
 - $f' = 1/T' < f = 1/T$



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

- Ευθέως ανάλογα για μια ηχητική πηγή



Ηχητικά Κύματα

- Το φαινόμενο Doppler

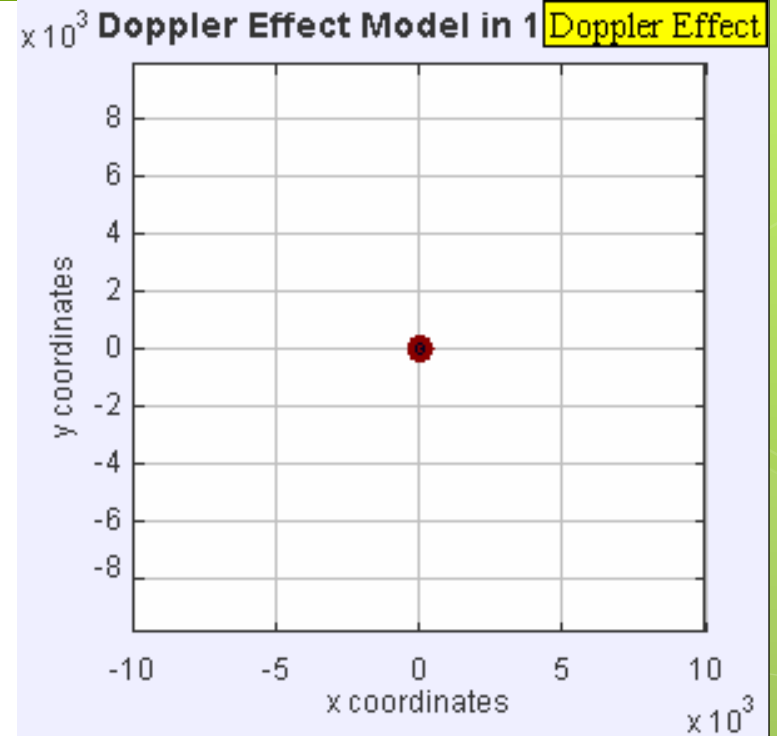
- Στάσιμη πηγή

- Συχνότητα πηγής f

- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τη συχνότητα f της πηγής



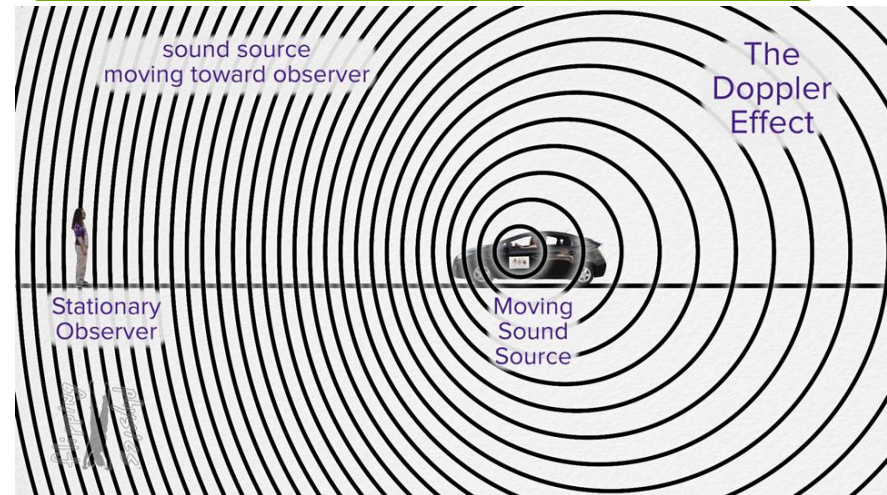
Ηχητικά Κύματα

● Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενη πηγή
 - Προς τον παρατηρητή
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα πηγής u_s

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) - \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u - u_s}\right) f = \left(\frac{1}{1 - u_s/u}\right) f$$



Ηχητικά Κύματα

○ Το φαινόμενο Doppler

○ Κινούμενη πηγή

○ Μακριά από τον παρατηρητή

○ Συχνότητα πηγής f

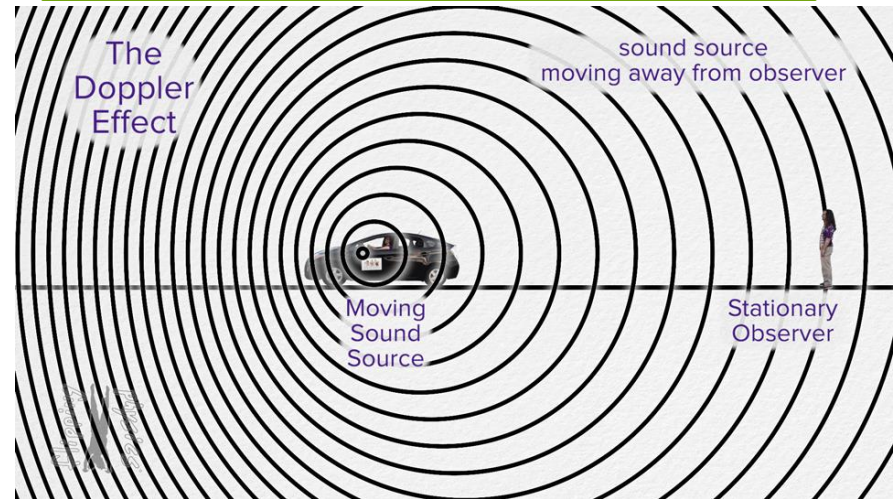
○ Περίοδος T

○ Μήκος κύματος λ

○ Ταχύτητα πηγής u_s

○ Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda + \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\left(\frac{u}{f}\right) + \left(\frac{u_s}{f}\right)} = \left(\frac{u}{u + u_s}\right) f = \left(\frac{1}{1 + u_s/u}\right) f$$



Ηχητικά Κύματα

○ Το φαινόμενο Doppler

○ Κινούμενος παρατηρητής

○ Πλησιάζει την πηγή

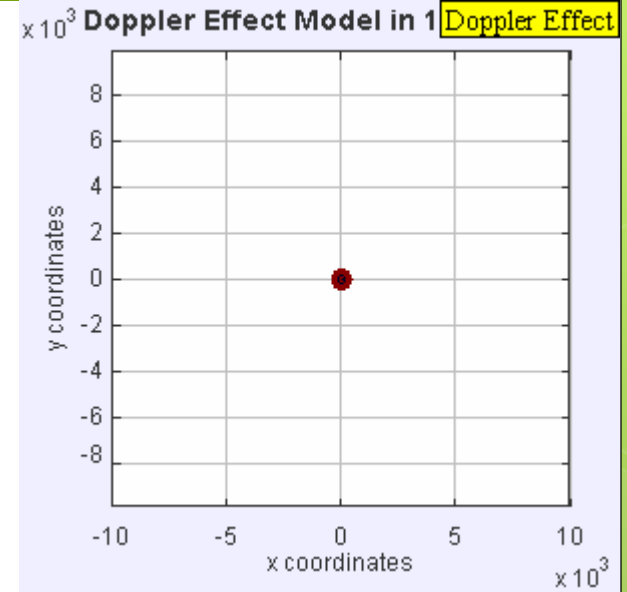
○ Συχνότητα πηγής f

○ Περίοδος T

○ Μήκος κύματος λ

○ Ταχύτητα παρατηρητή u_o

○ Ένας κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

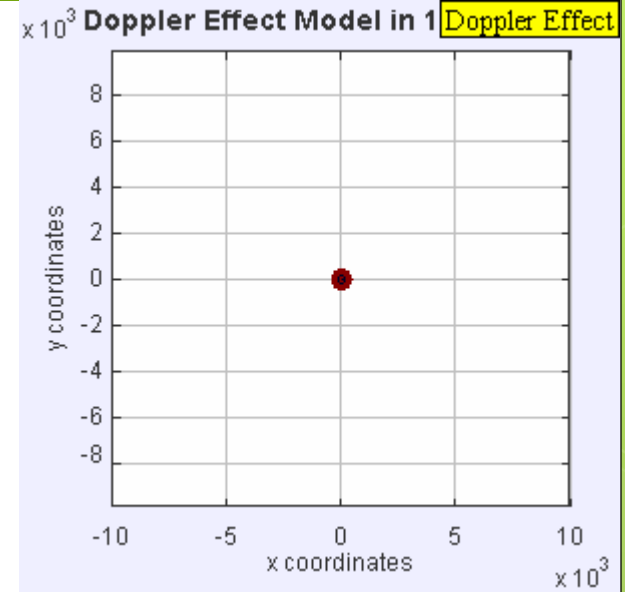


$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u + u_o}{u} \right) f = \left(1 + \frac{u_o}{u} \right) f$$

Ηχητικά Κύματα

○ Το φαινόμενο Doppler

- Κινούμενος παρατηρητής
 - Απομακρύνεται από την πηγή
- Συχνότητα πηγής f
- Περίοδος T
- Μήκος κύματος λ
- Ταχύτητα παρατηρητή u_o



- Ένας κινούμενος παρατηρητής που απομακρύνεται από την πηγή αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u - u_o}{u} \right) f = \left(1 - \frac{u_o}{u} \right) f$$

Ηχητικά Κύματα

• Το φαινόμενο Doppler

- Κίνηση και των δυο

- Συχνότητα πηγής f

- Περίοδος T

- Μήκος κύματος λ

- Ταχύτητα παρατηρητή u_o

- Ταχύτητα πηγής u_s

- Ένας **κινούμενος** παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα μιας **κινούμενης** πηγής

Συχνότητα αντίληψης παρατηρητή $f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f$ Συχνότητα εκπομπής πηγής

Ταχύτητα παρατηρητή (blue)

Ταχύτητα ήχου (red)

Ταχύτητα πηγής (purple)

Πώς επιλέγουμε πρόσημα στη σχέση αυτή?

1. Πηγή και παρατηρητής **κινούνται ο ένας προς τον άλλο**: πρόσημα που αυξάνουν το f'

2. Πηγή και παρατηρητής **απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο**: πρόσημα που μειώνουν το f'

3. Οι ταχύτητες εννοούνται πάντα κατά **μέτρο**!

Ηχητικά Κύματα

● Παράδειγμα:

- Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί, «κολλάει» και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε («αφήνετε») από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4^ο όροφο (15 m από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;



Ηχητικά Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Στην απελπισία σας, το πετάτε (αφήνετε) από το παράθυρο. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και βρίσκεστε 15 m από το έδαφος, τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Η συχνότητα που θα ακούσατε είναι μικρότερη γιατί έχετε πηγή ήχου αποβαρυνόμενη από τον αέρα. Χρειαζόμαστε την ταχύτητα του ξυπνητηριού για να εφαρμόσουμε τον τύπο του Doppler. Είτω κίνηση ελεύθερα επιταχυνόμενη από το $A \rightarrow B$.

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g \Delta y \Leftrightarrow u_B^2 = u_A^2 - 2g(y_B - y_A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_B^2 = 0 - 2g(0 - h) = 2gh \Rightarrow u_B = -\sqrt{2gh}$$

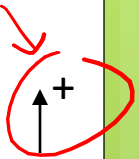
Άρα $|u_B| = \sqrt{2gh} \cong 17.14 \frac{m}{s}$. Άρα $f \in$ Doppler

θα έχουμε:

$$f' = \frac{343}{343 + 17.14} \cong 571 \text{ Hz.}$$

$$f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f$$

θετική φορά

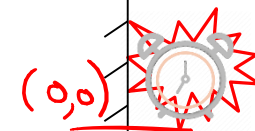


(A)



$$u_A = 0$$
$$f_A = 600 \text{ Hz}$$

$$h = 15 \text{ m}$$



$$u_B = ?$$
$$f_B = ?$$

(B)



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Βασική διαφορά κυμάτων από σωματίδια
 - Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου
 - Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα
 - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο!
- **Σημαντικό:** τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην **ίδια** θέση του χώρου!
 - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η **αρχή της υπέρθεσης**

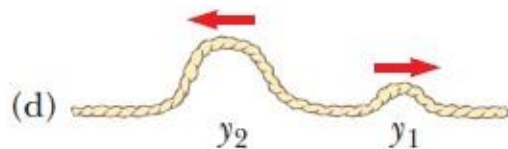
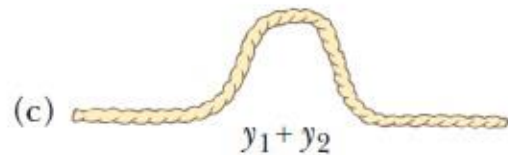
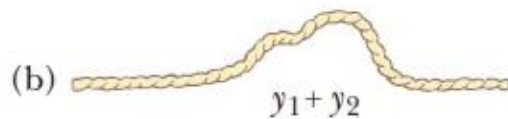
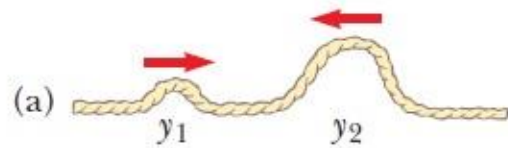
Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

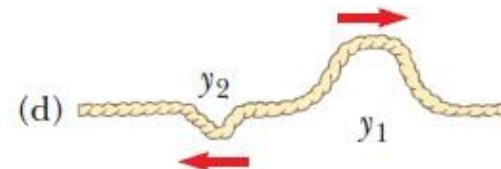
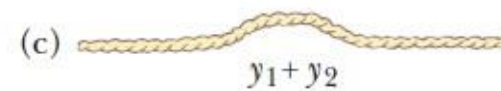
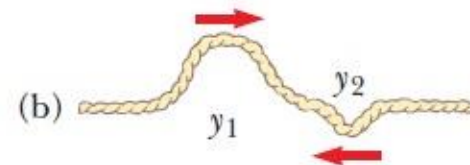
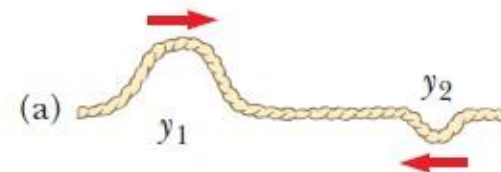
- Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων
- Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**
- Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται **συμβολή**

Υπέρθεση

○ Αρχή της υπέρθεσης



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

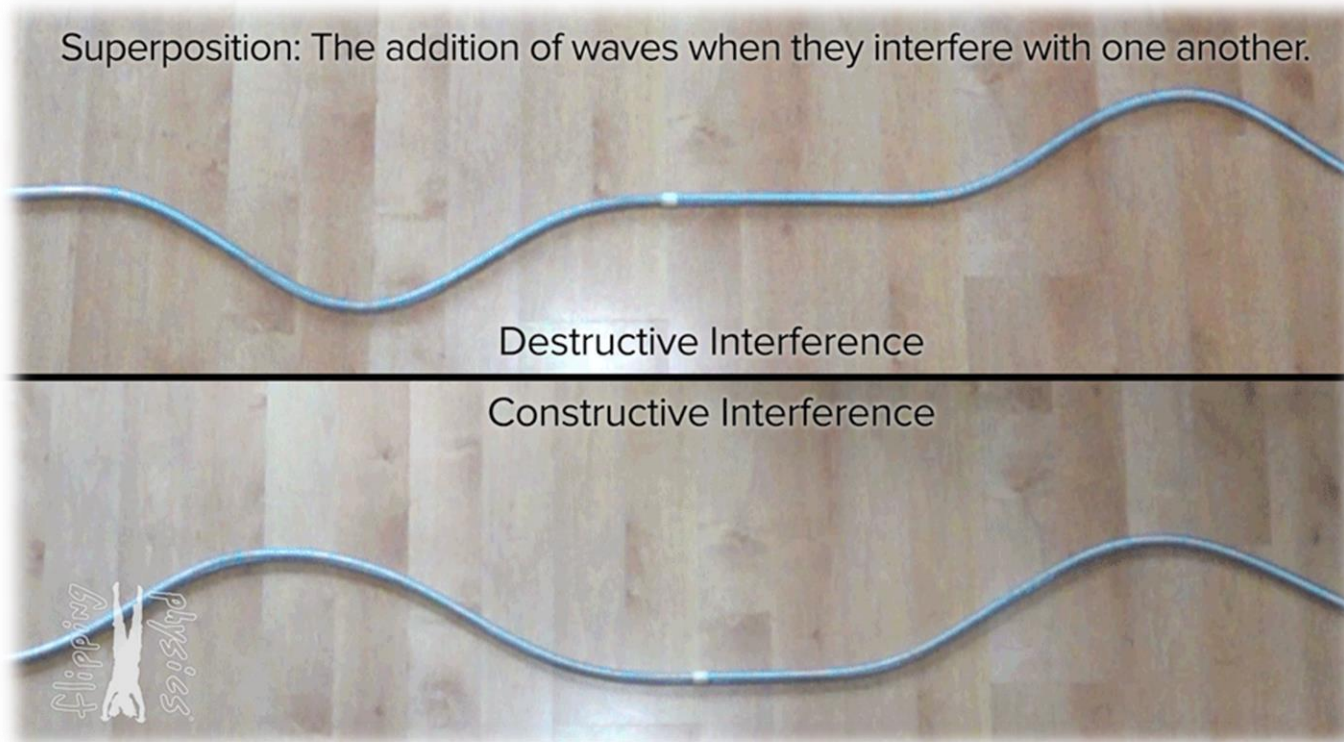
Υπέρθεση

- Αρχή της υπέρθεσης

isvr

Υπέρθεση

○ Αρχή της υπέρθεσης



Υπέρθεση

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς μια κατεύθυνση
 - Ίδια συχνότητα ω , μήκος κύματος λ , και πλάτος A
 - Διαφορετική αρχική φάση φ

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- $$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$= \left[2A \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Υπέρθεση

Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- $y(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$

- Ίδια συχνότητα

- Ίδιο μήκος κύματος

- (α) $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

- Πλάτος $2A$

- Κύματα **σε φάση**

- **Ενισχυτική συμβολή**

- (β) $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

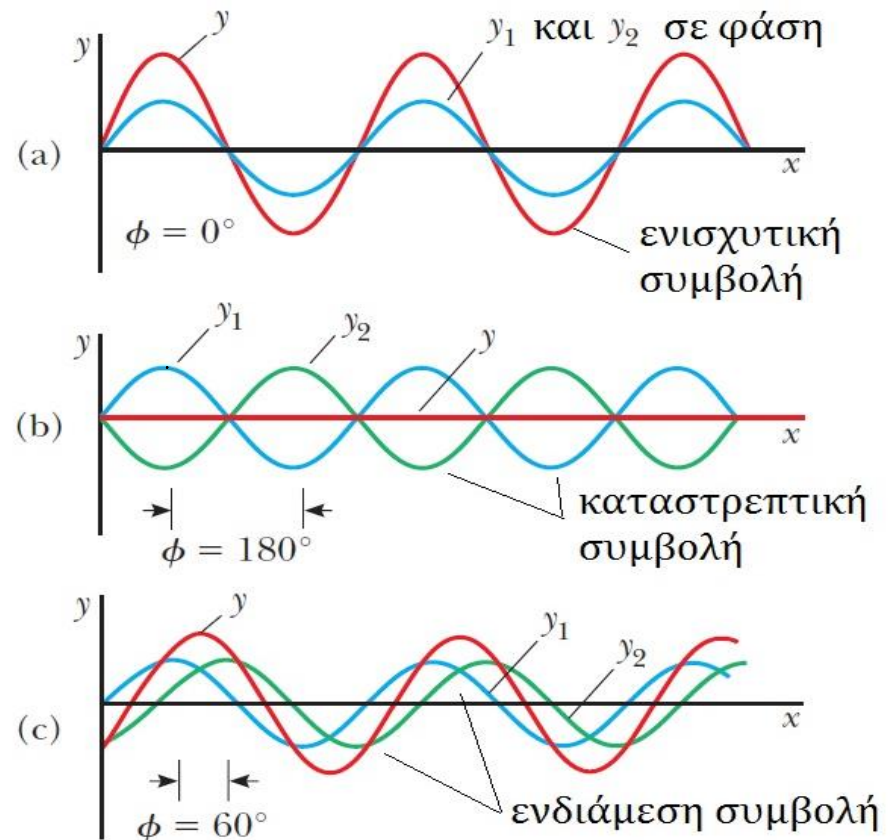
- Πλάτος 0

- Κύματα **εκτός φάσης**

- **Καταστρεπτική συμβολή**

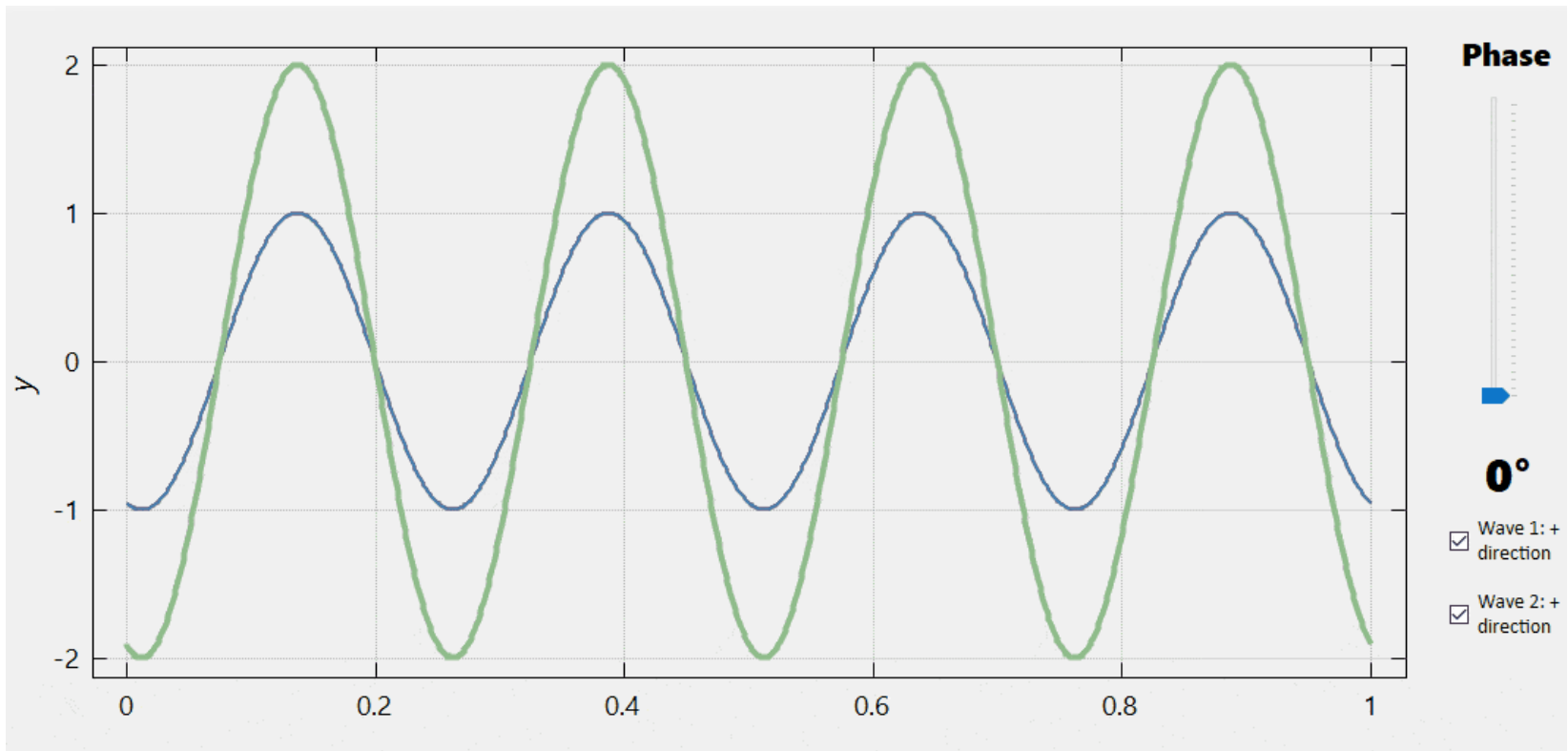
- (γ) Άλλες περιπτώσεις

- $0 < \text{Πλάτος} < 2A$



Υπέρθεση

○ Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων



Υπέρθεση

• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Τα κύματα έχουν εν γένει τη δική του αρχική φάση
 - ...ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
- Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
 - Έχουν το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω
 - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**

• Διαφορά διαδρομής

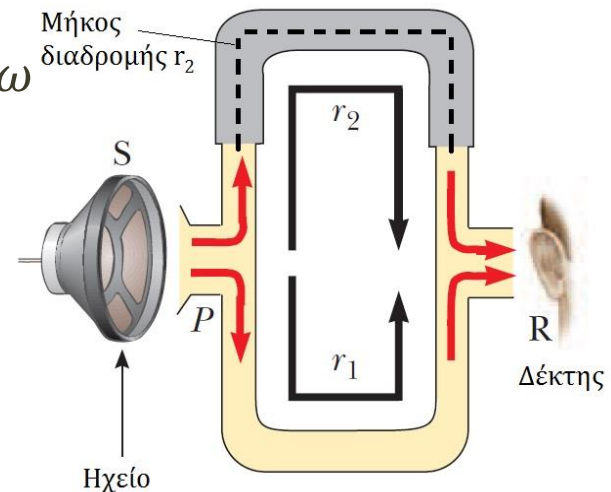
$$\Delta r = |r_2 - r_1|$$

• Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

• Τότε

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθεση

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Έστω

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$$

- Αν $\Delta\Phi = 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **ενισχυτικά**

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A$$

- Αν $\Delta\Phi = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ τότε τα κύματα συμβάλλουν **καταστρεπτικά**

- Αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{(2m + 1)\pi}{2}\right) = 2A \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Υπέρθεση

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

- Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Επίσης

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\varphi$$

- Αν η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. κοινή πηγή ήχου):

$$\Delta\varphi = 0$$

- Ενισχυτική συμβολή:

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Καταστρεπτική συμβολή:

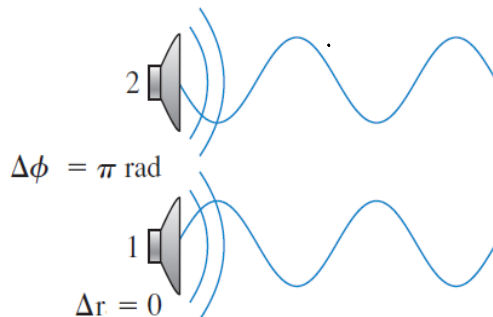
$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow \Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Υπέρθεση

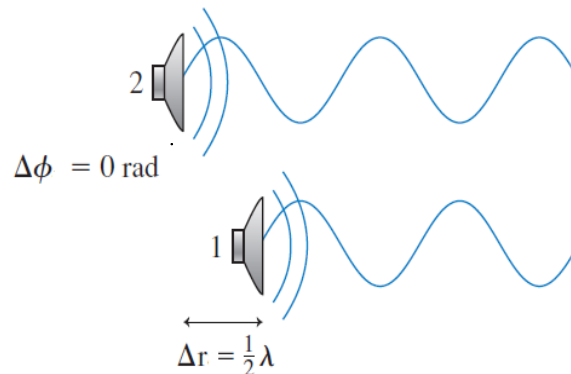
• Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Καταστρεπτική συμβολή – πότε συμβαίνει?
 - Λόγω διαφοράς αρχικής φάσης $\Delta\phi$ - (a)
 - Λόγω διαφορετικής θέσης της πηγής - (b)
 - Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr
 - Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)
- Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε $\Delta\Phi = \pi$ σε κάθε περίπτωση

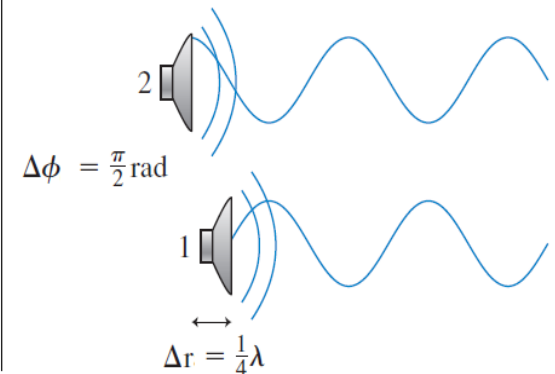
(a) Οι πηγές είναι εκτός φάσης



(b) Ιδίες πηγές διαφέρουν από μισό μήκος κύματος



(c) Οι πηγές είναι ξεχωριστές και (μερικώς) εκτός φάσης

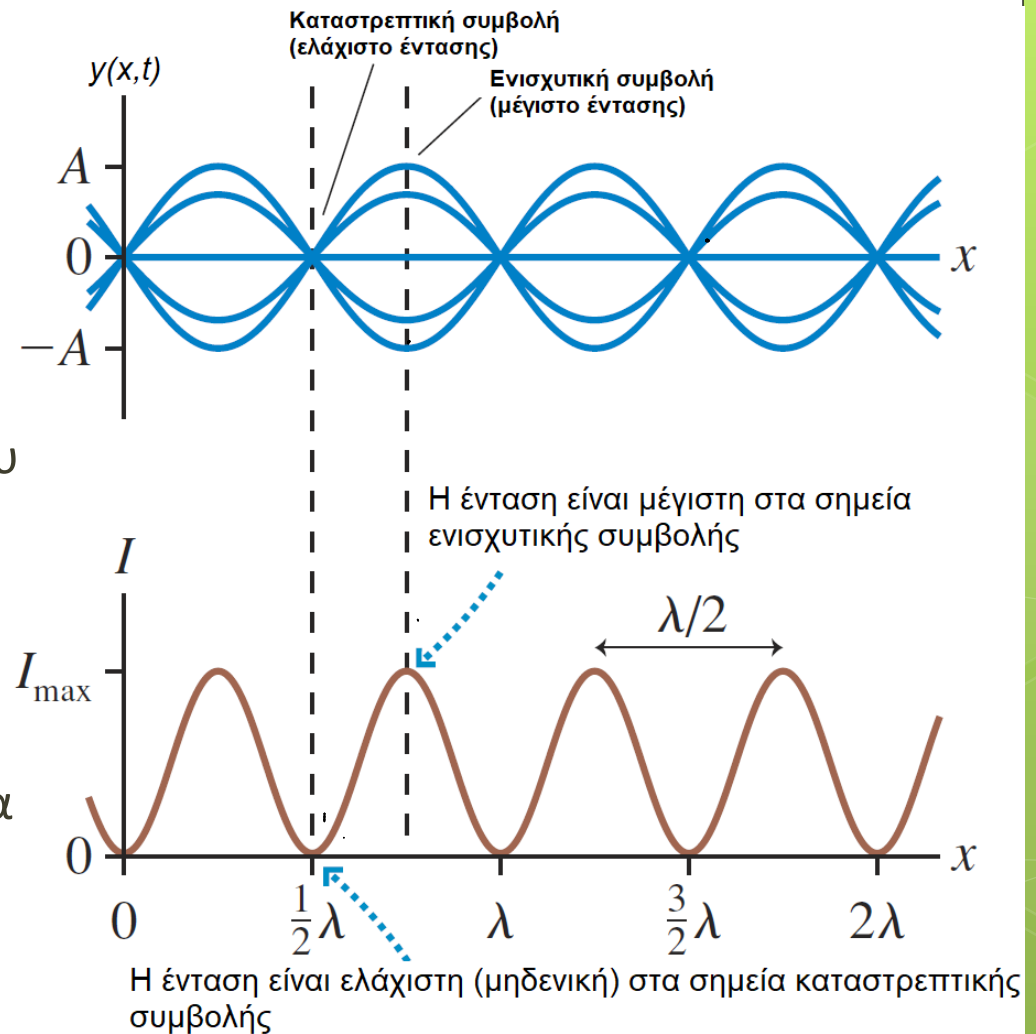


Υπέρθεση

● Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος, A^2

- Η ένταση I του ήχου είναι μέγιστη στα σημεία ενισχυτικής συμβολής και μηδενική (ελάχιστη) στα σημεία καταστρεπτικής συμβολής

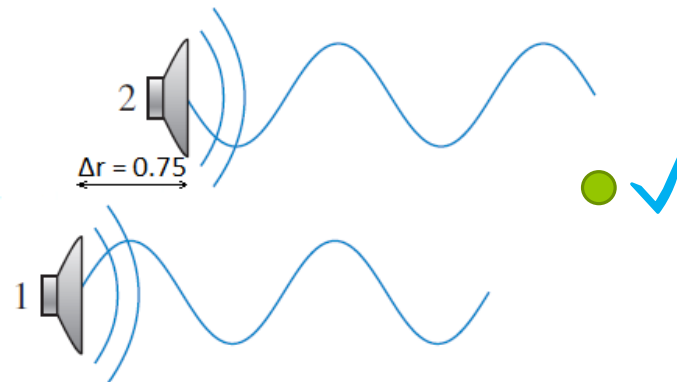
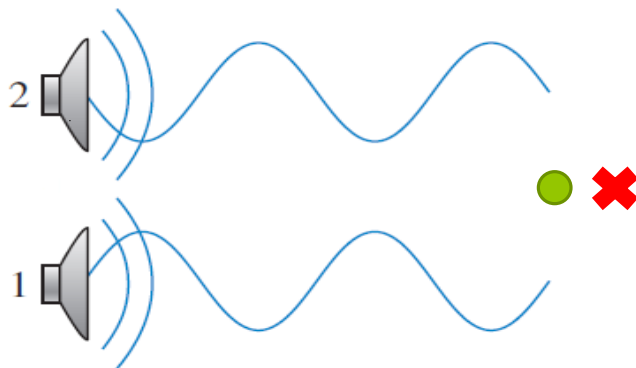


Υπέρθεση

● Παράδειγμα:

Δυο ηχεία στέκονται ακριβώς μπροστά σας, το ένα δίπλα στο άλλο και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο.

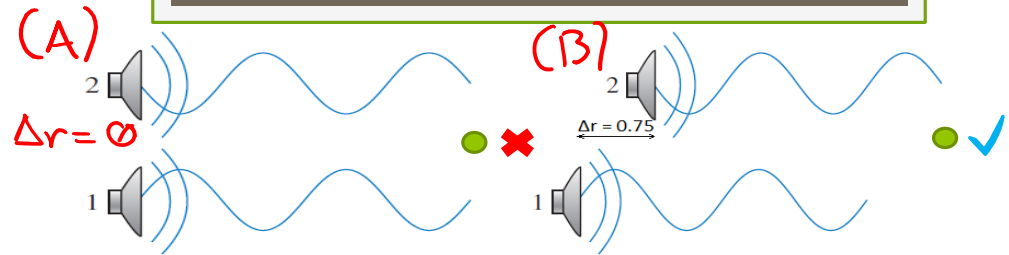
Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Υπέρθεση

Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



$$\text{Στη θέση (A) έχουμε καταστρεφτική συμβολή: } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \Delta\phi \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Delta r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi = (2m+1)\pi, m=0,1,2,3,\dots$$

$$\text{Για } m=0, \boxed{\Delta\phi = \pi}. \text{ Άρα } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi.$$

$$\text{Στη θέση (B) έχουμε ενισχυτική συμβολή: } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r + \pi \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Delta r = \frac{3}{4}m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{4}m + \pi = 2m\pi, m=0,1,2,3,\dots$$

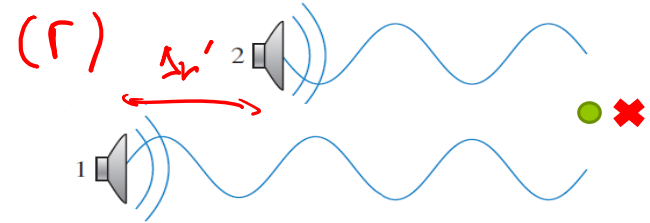
$$\text{Για } m=1, \boxed{\lambda = \frac{3}{2}m}. \text{ Άρα } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}m} \Delta r + \pi \Leftrightarrow$$

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{3} \Delta r + \pi.$$

Υπέρθεση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?



Στη θέση (Γ): καταστρεφτική συμβολή

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta r' + \pi = (2m+1)\pi, \quad m=0,1,2,3,\dots$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} \Delta r' + \pi \stackrel{m=1}{=} 3\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} \cdot \Delta r' + \pi = 3\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} \Delta r' = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2}{3} \Delta r' = 1 \Leftrightarrow \boxed{\Delta r' = \frac{3}{2} \text{ m}}$$

Άρα η απόσταση των ηχείων πρέπει να γίνει 1.5 μέτρο.



Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta \pm \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta \mp \varphi}{2} \right)$$

● Στάσιμα κύματα

- Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους
- Τι θα γίνει αν τα βάλουμε αντικρουστά;
 - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος
 - Αντίθετη ταχύτητα
- $y = y_1 + y_2$
 $= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$
 $= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$
- Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα **στάσιμο κύμα**
 - Γενικότερα, **στάσιμη λέγεται μια ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις**

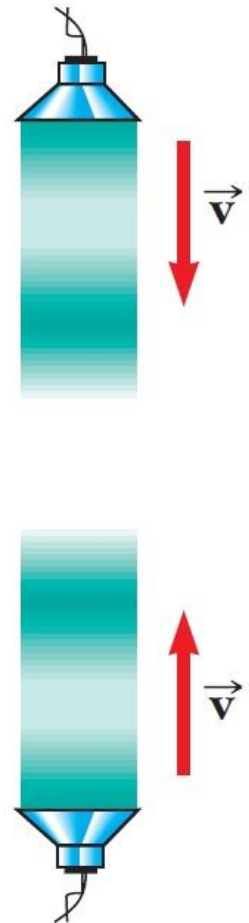


Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από την έκφραση $kx \pm \omega t$
- Άρα **δεν** είναι οδεύον κύμα
- Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα στάσιμο κύμα



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

- Ας συγκρίνουμε:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

και

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

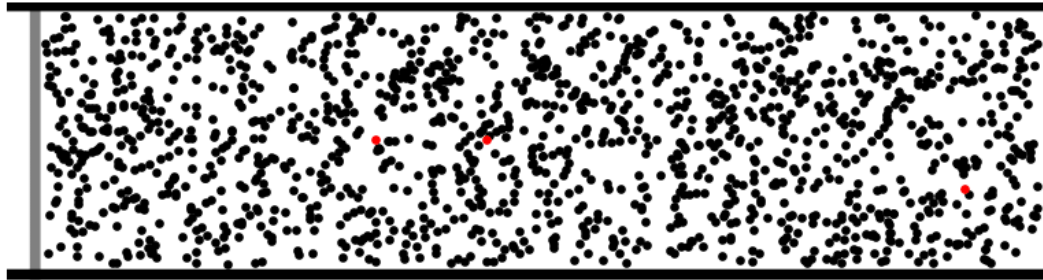
- Τι παρατηρείτε;

- Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης

- $\varphi = 0$ στην κυματοσυνάρτηση
- Κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη **θέση** x εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
- Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης, $2A \sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x , στο μέσο

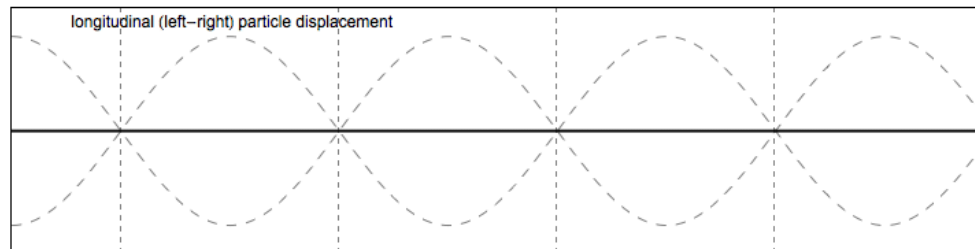
Στάσιμα Κύματα

○ Στάσιμα κύματα

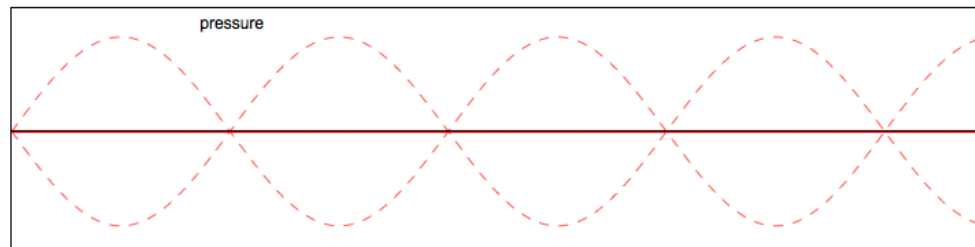


©2012, Dan Russell

Μετατόπιση

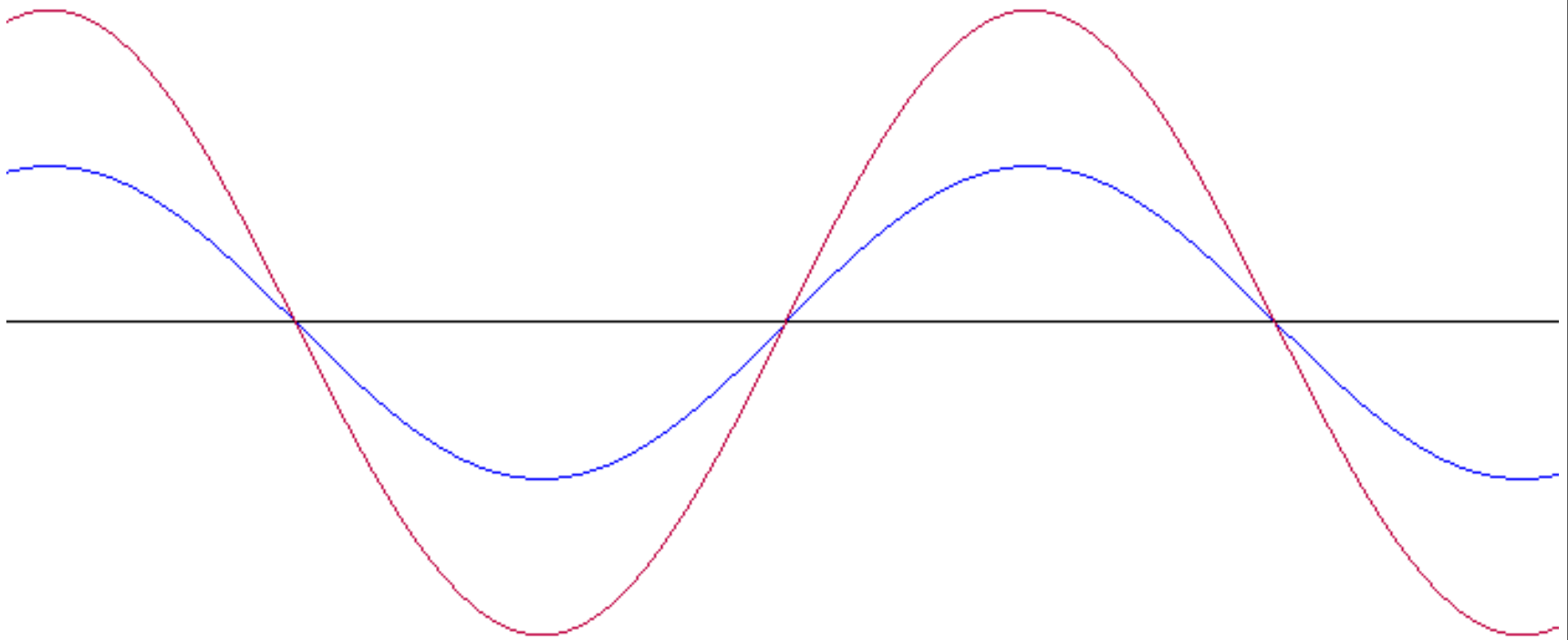


Πίεση



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

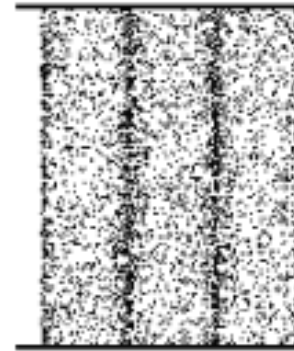
Creating Standing Waves from Travelling Waves



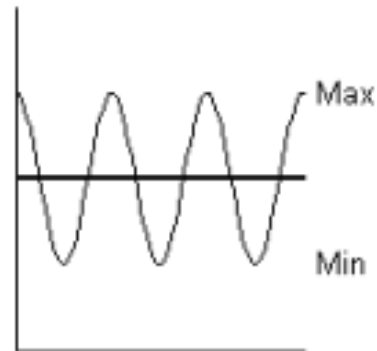
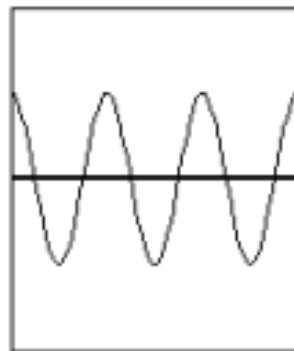
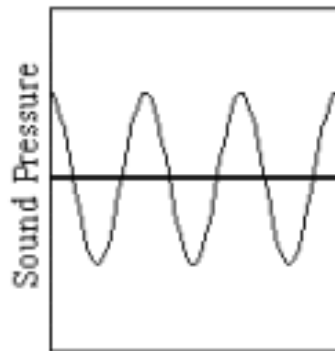
plane wave: →



plane wave: ←



plane waves: superposition



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

$$y(x, t) = (2A \sin(kx)) \cos(\omega t)$$

- Πότε μηδενίζεται το πλάτος; (δηλ. υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ΔΕΝ ταλαντώνονται?)

- $kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί (nodes)**

- Πότε μεγιστοποιείται το πλάτος; (δηλ. υπάρχουν στοιχεία του μέσου που ταλαντώνονται με το μέγιστο δυνατό πλάτος?)

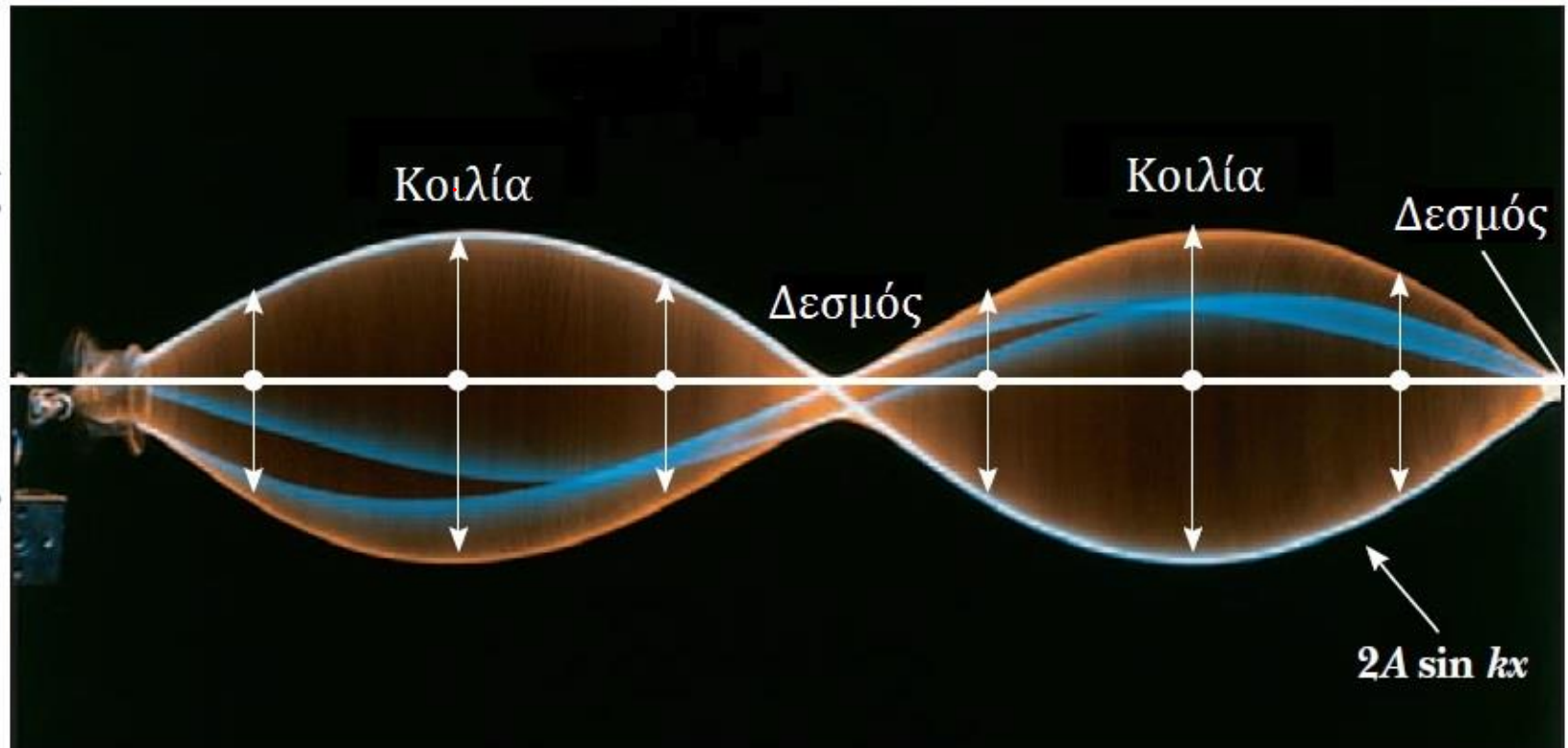
- $kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί) (antinodes)**

Στάσιμα Κύματα

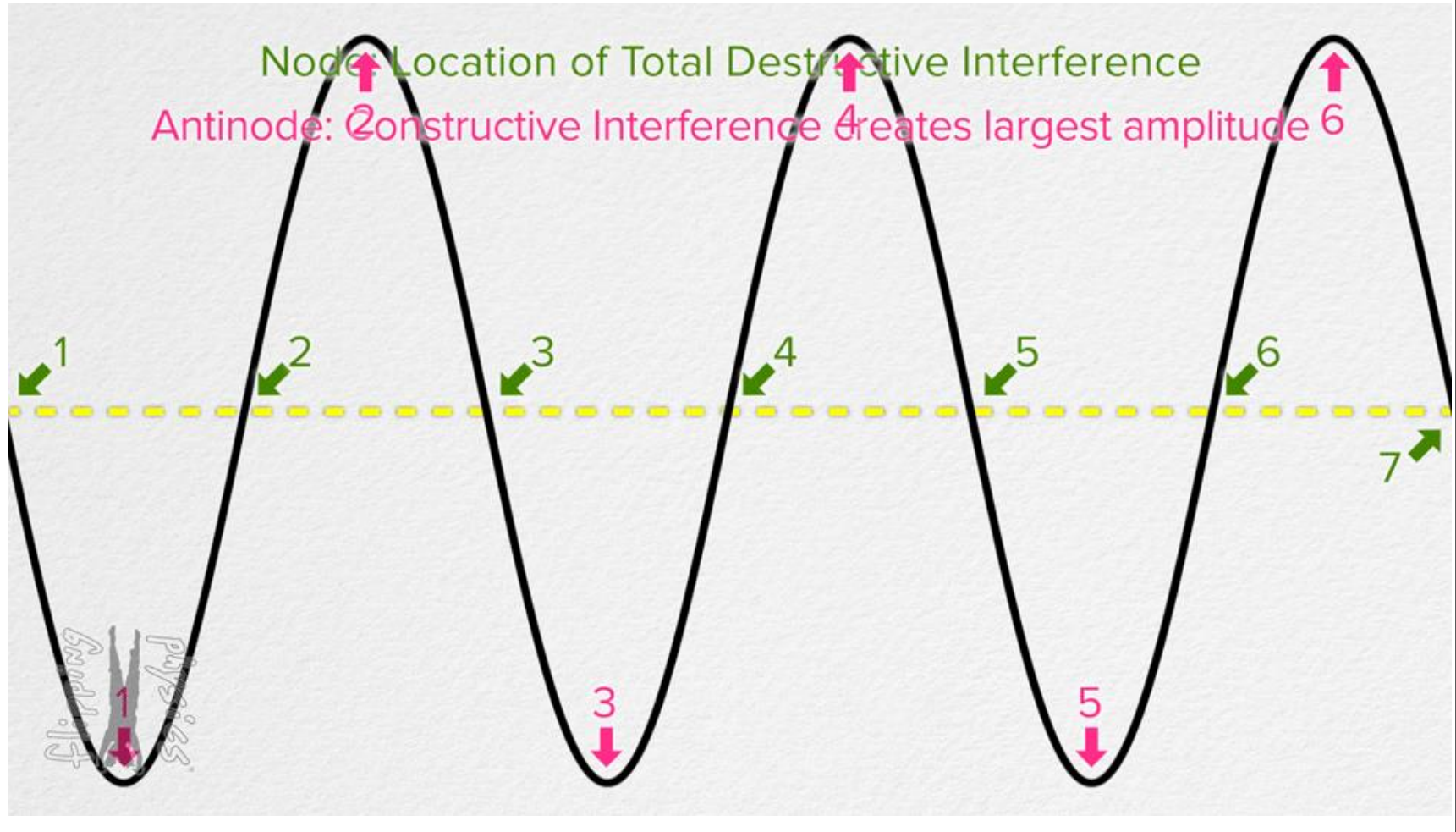
- Στάσιμα κύματα

© 1991 Richard Megna/Fundamental Photographs



Στάσιμα Κύματα

● Στάσιμα κύματα



Στάσιμα Κύματα

- Στάσιμα κύματα

- Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών $= \frac{\lambda}{2}$

- Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας $= \frac{\lambda}{4}$

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα:

- Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x, t) = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2(x, t) = 4 \sin(3x + 2t)$$

με x, y να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Στάσιμα Κύματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1 = 4 \sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = 4 \sin(3x + 2t)$$

- Α) Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.
- Β) Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Η κυματοσυνάρτηση του στάσιμου κύματος θα είναι $y(x,t) = 8 \sin(3x) \cos(2t)$.

Α) Το πλάτος της κυματοσυνάρτησης είναι $A(x) = 8 \sin(3x)$. Για το στοιχείο στη θέση $x = 2.3 \text{ cm}$, θα είναι $A(2.3) = 8 \sin(6.9) \simeq 4.6 \text{ cm}$

Β) Δεσφοί: $x_\delta = \frac{n\lambda}{2}, n=0,1,2,\dots$

Αντιδεσφοί: $x_\alpha = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, n=0,1,2,\dots$

$\left. \begin{array}{l} x_\delta = \frac{n\lambda}{2} \\ x_\alpha = \frac{(2n+1)\lambda}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Χρειαζόμαστε το } \lambda.$

Όμως, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$, άρα:

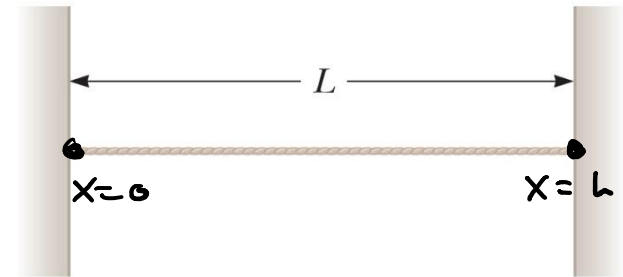
$$x_\delta = \frac{n\pi}{3} \text{ cm}, n=0,1,2,\dots$$

$$x_\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{6} \text{ cm}, n=0,1,2,\dots$$

Στάσιμα Κύματα

- **Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες**

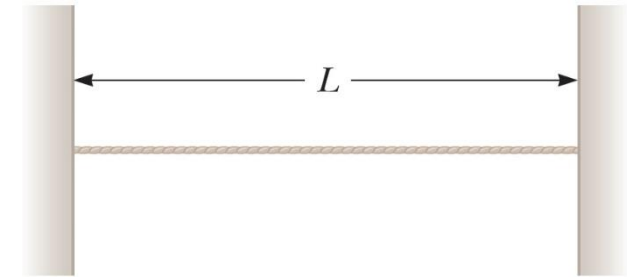
- Θεωρήστε το νήμα της εικόνας
 - Χορδή κιθάρας, πιάνου



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!
- Αν διεγείρουμε το νήμα στο μέσο του, δυο ημιτονοειδή κύματα θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις
 - Όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, θα ανακλαστούν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, και θα συμβάλλουν μεταξύ τους
 - Κι αυτό συνεχίζεται για τα επόμενα ανακλώμενα και συμβαλλόμενα κύματα
- Αυτές είναι οι συνθήκες για δημιουργία ενός στάσιμου κύματος!

Στάσιμα Κύματα

○ Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες



- Οριακή συνθήκη: το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα!

- Άρα το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν στάσιμο κύμα πάνω στο νήμα είναι προκαθορισμένο

- $2A \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$

- Προκαθορισμένη είναι και η συχνότητα του κύματος, αφού

$$u = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{u}{\lambda_n}$$

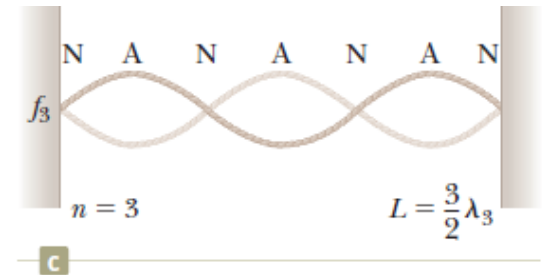
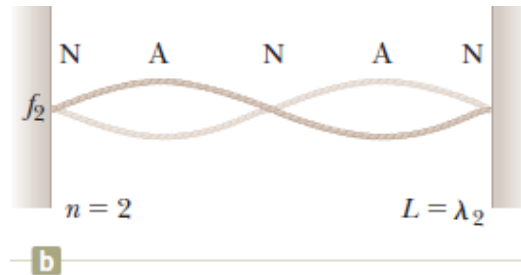
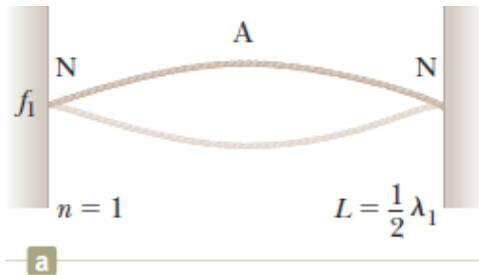
- Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ή ιδιομορφές (modes)**

- Καθεμιά έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα

Στάσιμα Κύματα

○ Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Κανονικός τρόπος (mode) n
- Περιγράφεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει $\frac{1}{4}$ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό



- Μήκη κύματος

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}$$

- Φυσικές συχνότητες

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = n f_1, n \in \mathbb{N}$$

- Για νήμα τάσης T και γραμμικής πυκνότητας μ ,

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, n \in \mathbb{N}$$

Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

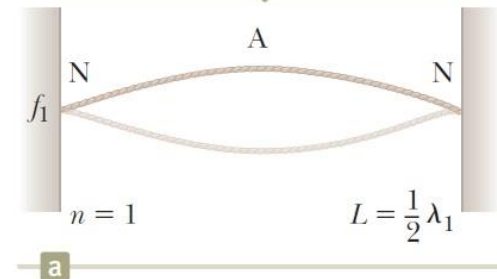
- Κανονικές μορφές (modes) n

- Για $n = 1$, η συχνότητα αυτή λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**

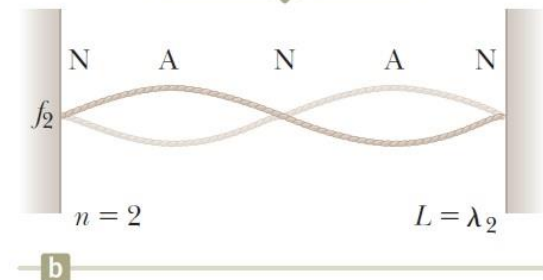
- Οι υπόλοιπες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες αυτής: $f_n = n f_1$

- Συχνότητες κανονικών τρόπων που παρουσιάζουν αυτήν την ακέραια πολλαπλάσια σχέση δημιουργούν μια **αρμονική σειρά** και οι τρόποι αυτοί λέγονται **αρμονικές**

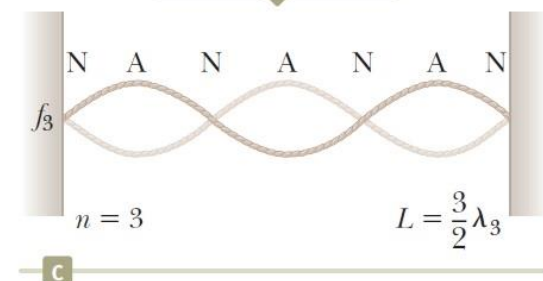
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική



Τρίτη αρμονική

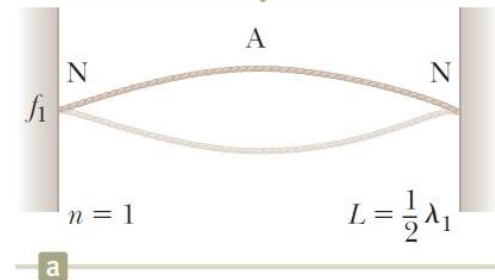


Στάσιμα Κύματα

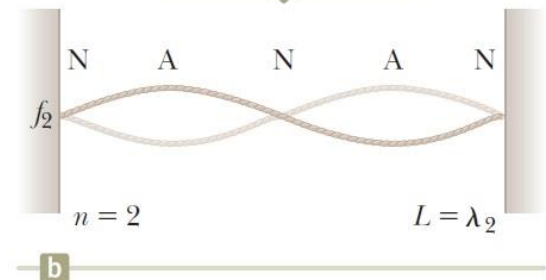
● Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

- Για να παρουσιαστεί μια μόνο αρμονική, πρέπει να διεγείρουμε το νήμα ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής
 - Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα
 - Δύσκολο να επιτευχθεί για τις περισσότερες αρμονικές
- Αν διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα «επιζήσουν» στο νήμα
 - Αυτά είναι οι αρμονικές 😊

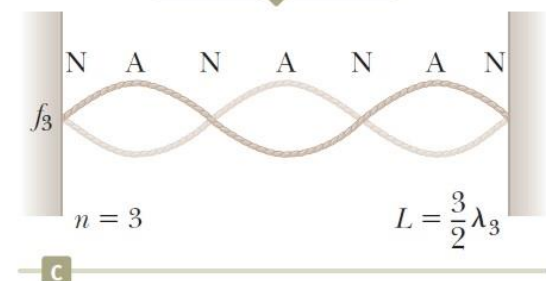
Πρώτη αρμονική (θεμελιώδης)



Δεύτερη αρμονική

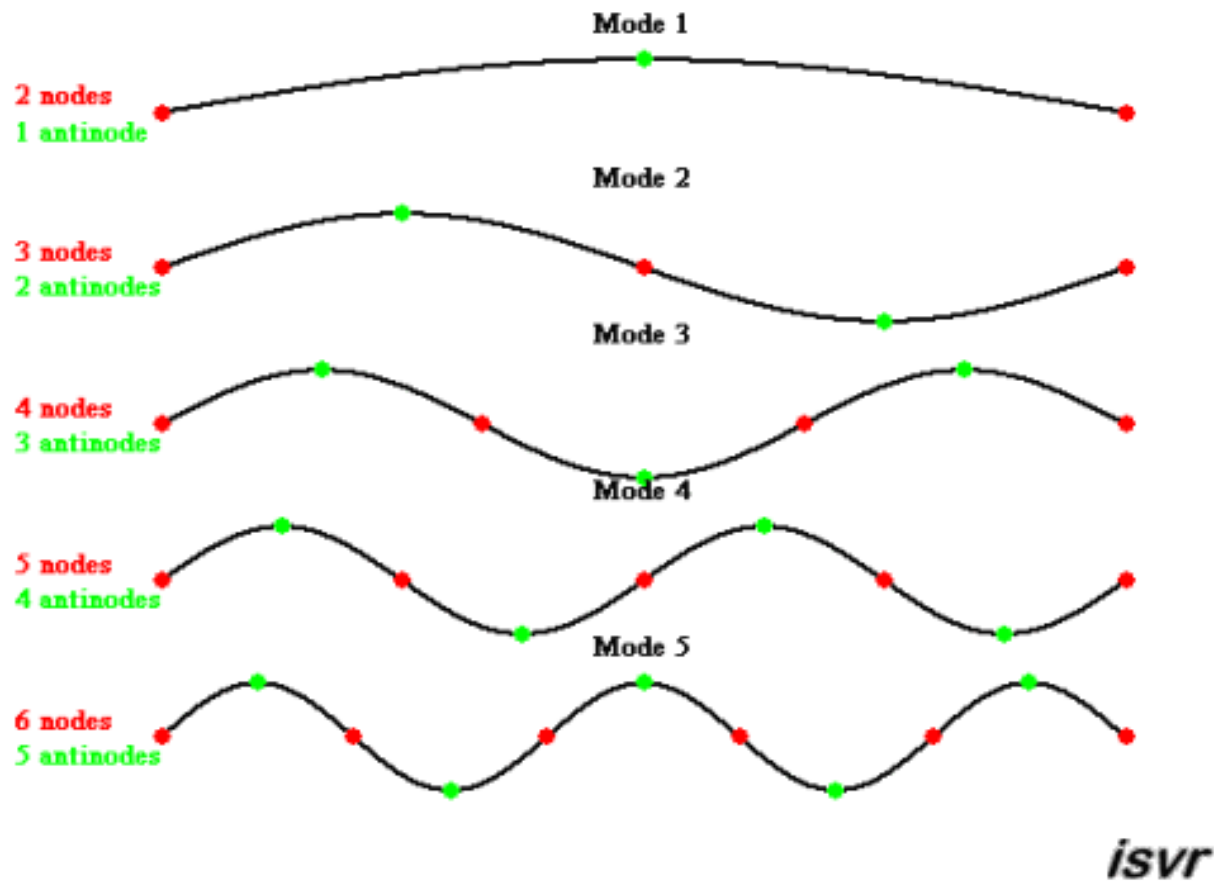


Τρίτη αρμονική



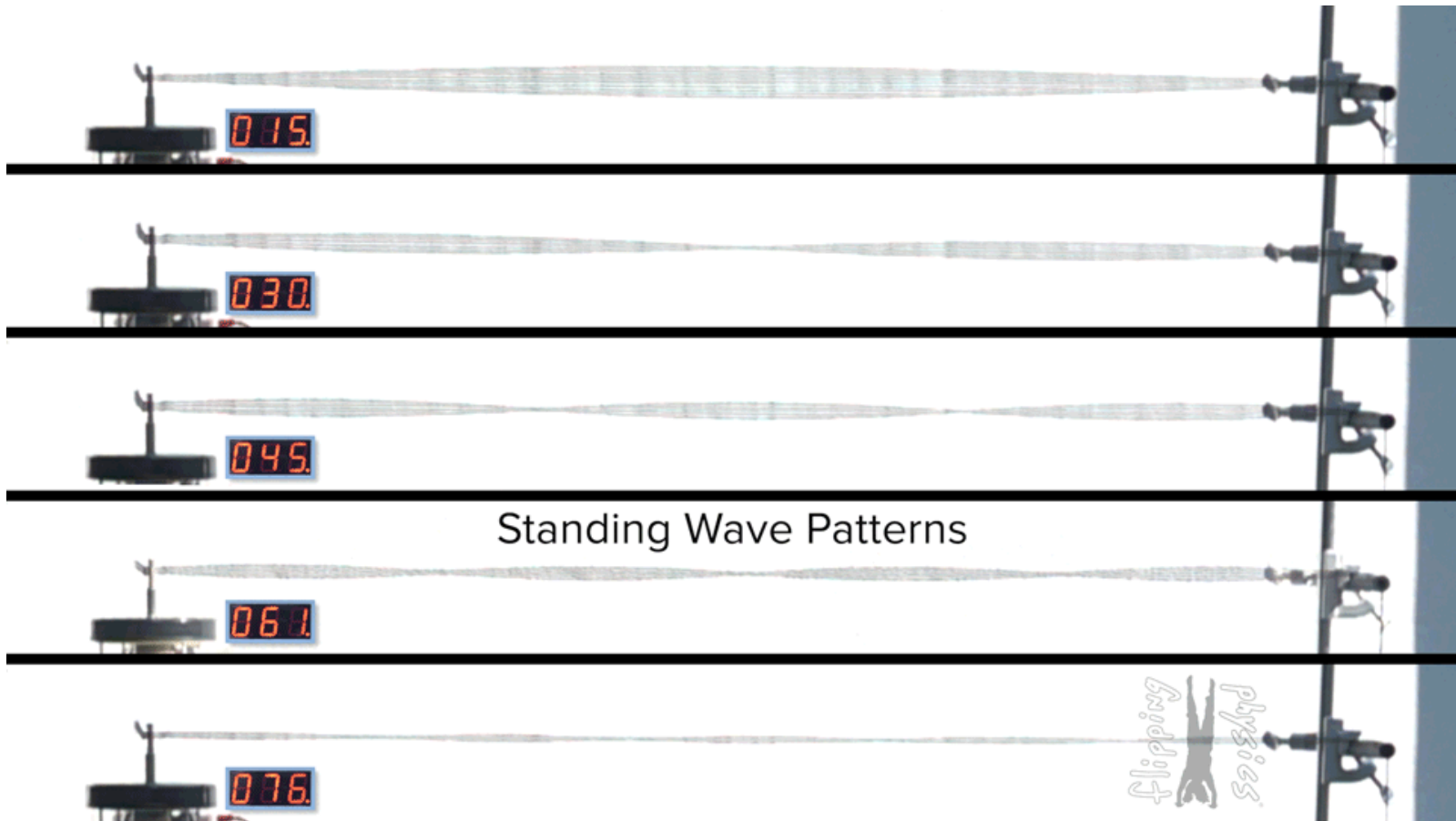
Στάσιμα Κύματα

- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n



Στάσιμα Κύματα

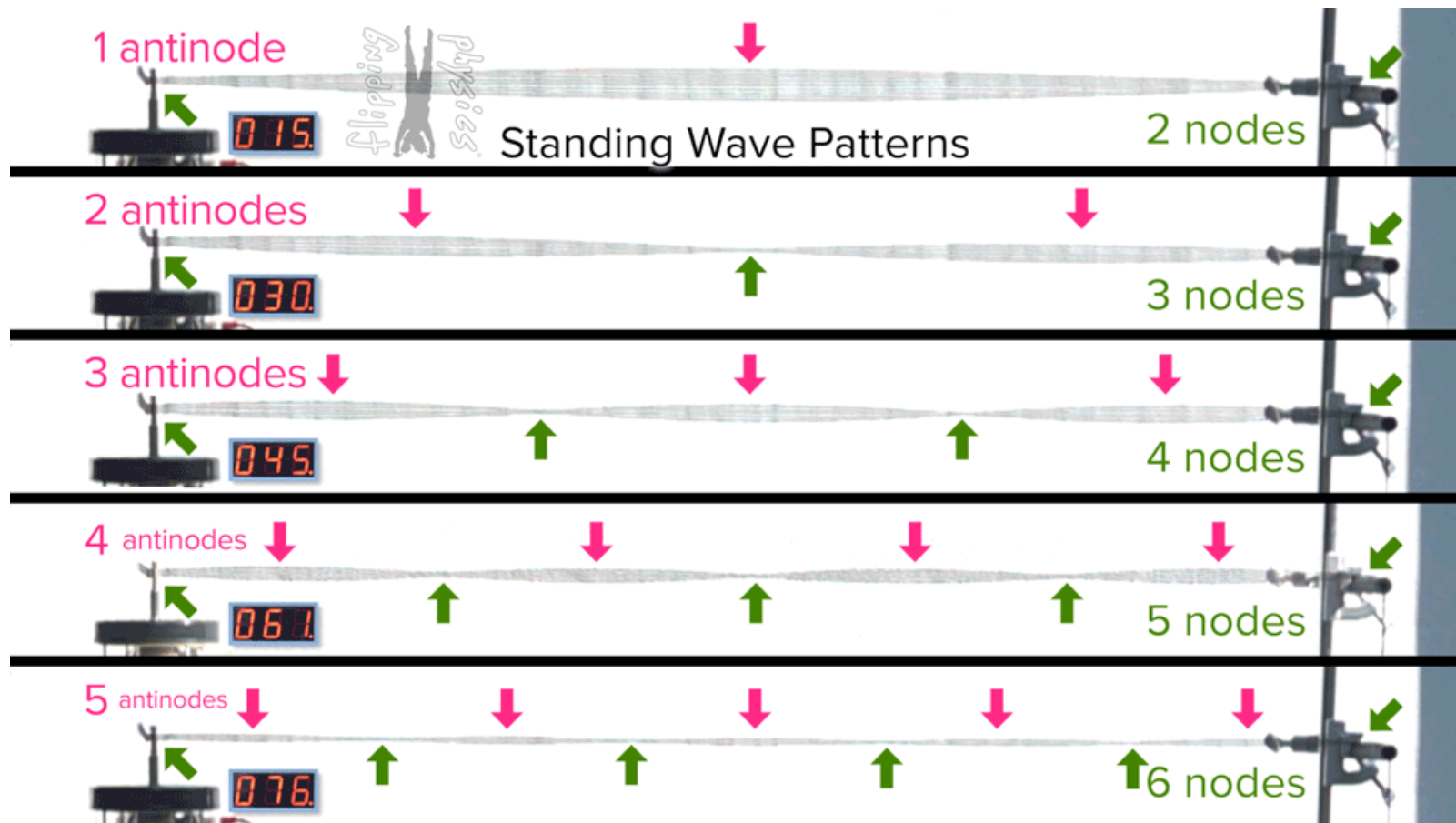
- Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες
 - Κανονικές μορφές (modes) n

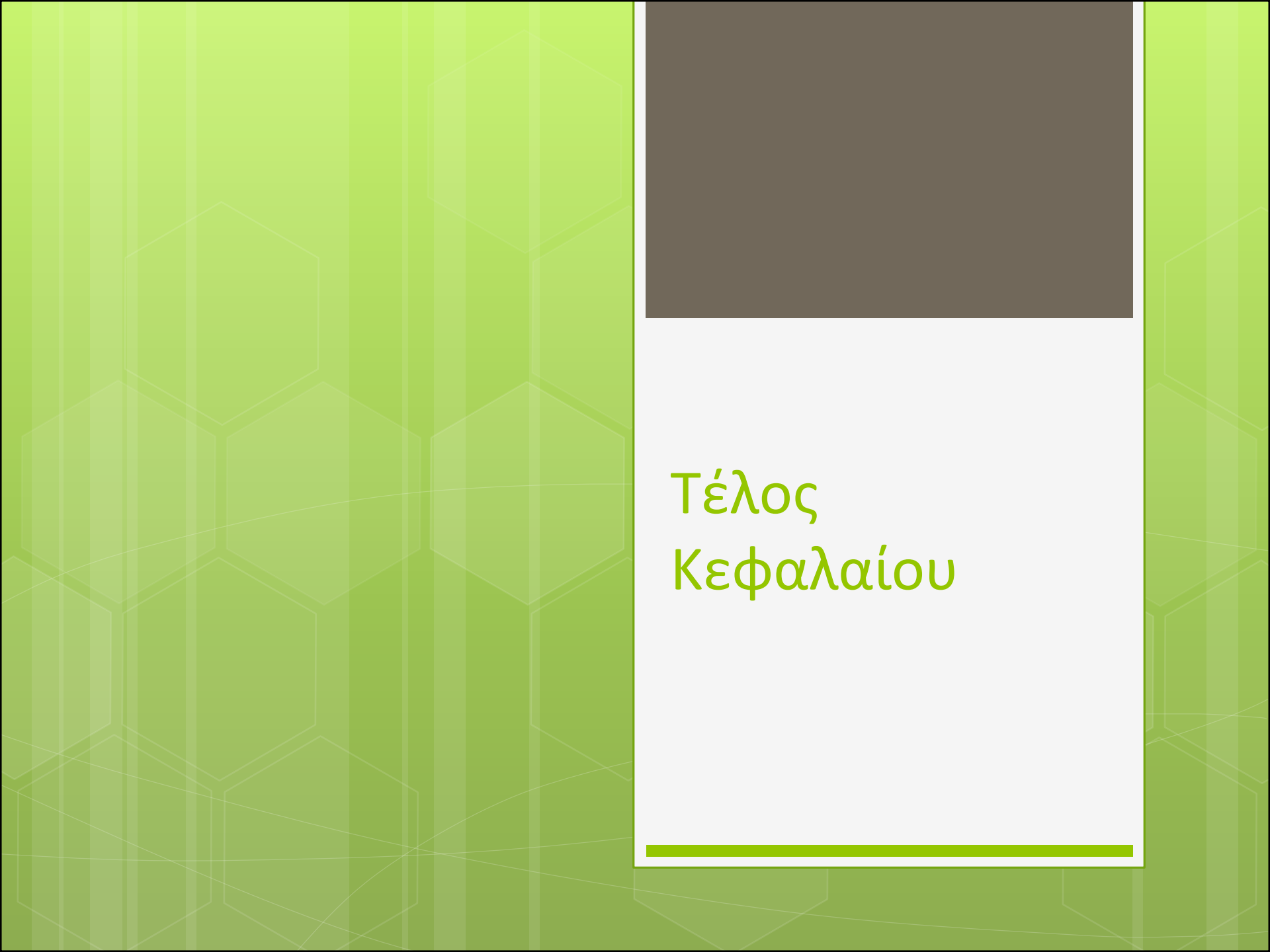


Στάσιμα Κύματα

○ Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

○ Κανονικές μορφές (modes) n





Τέλος Κεφαλαίου
