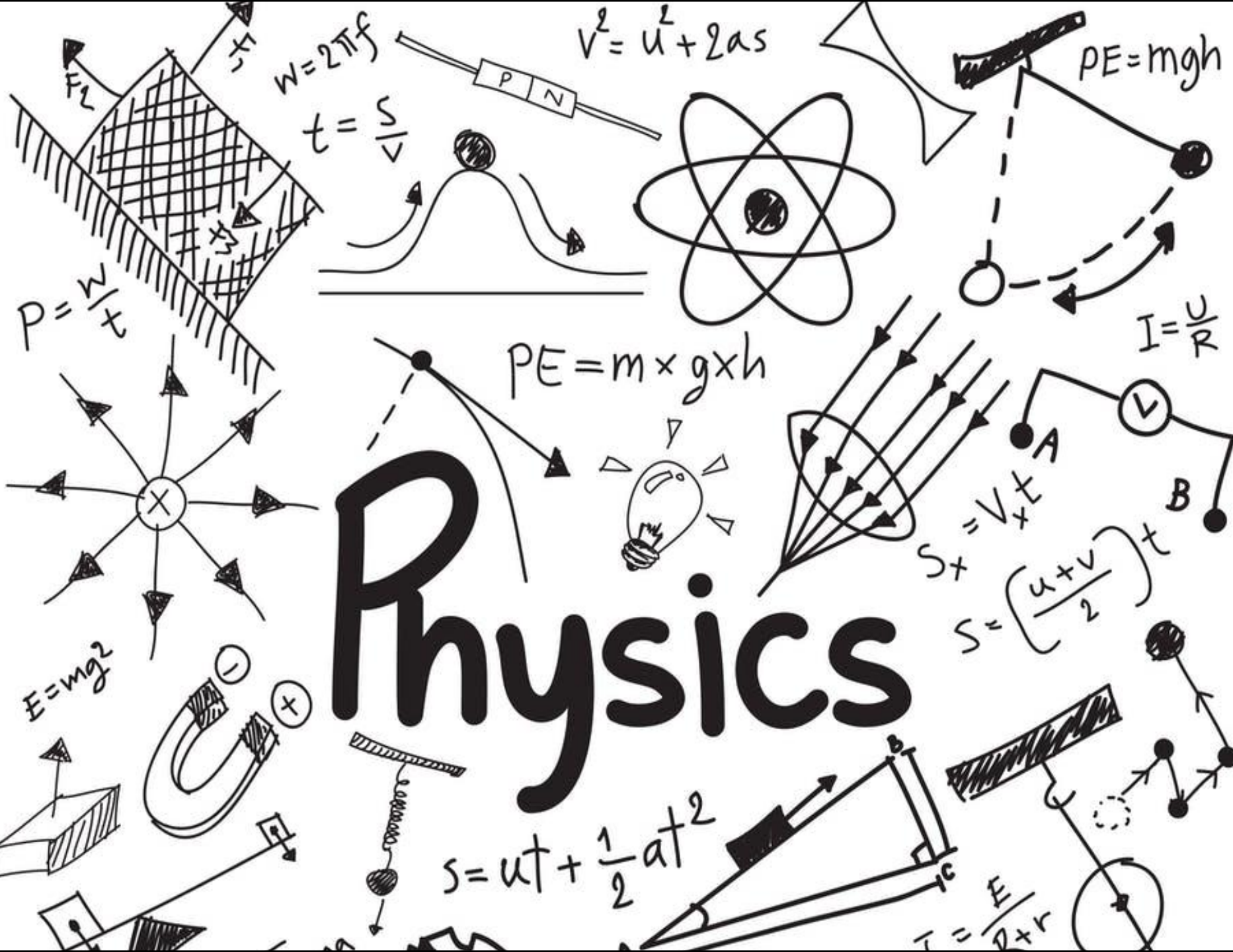


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο
Διανύσματα



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

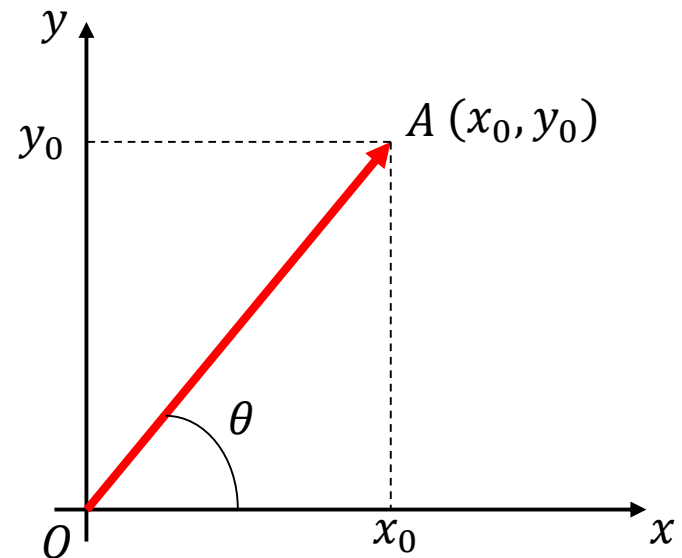
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο
Διανύσματα

Διανύσματα

- Στην μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας του διανύσματος
- Διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$: προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα
 - Μέτρο
 - Διεύθυνση
 - Φορά
- Καρτεσιανές συντεταγμένες
 - x_0 — τετμημένη
 - y_0 — τεταγμένη



Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες

- Στο τρίγωνο OAB:

- $x_0 = \rho \cos(\theta) = \rho \cos(\theta)$

- $y_0 = \rho \sin(\theta) = \rho \sin(\theta)$

όπου

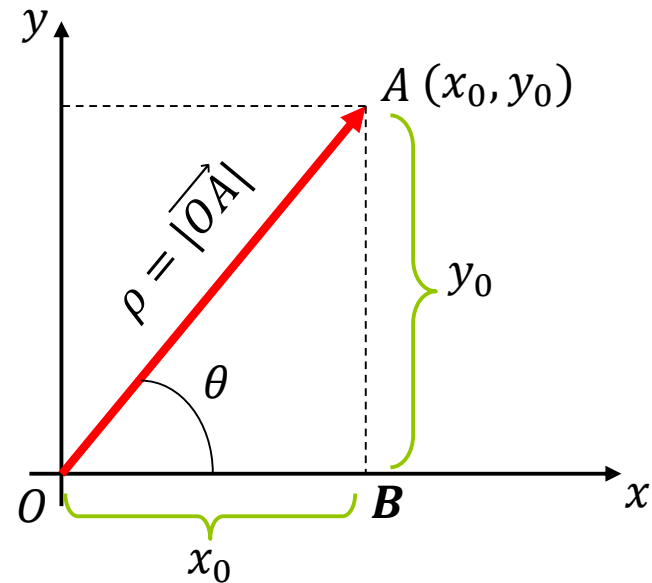
$$\rho = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Πώς προκύπτει η γωνία θ ?

- Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Γραφή πολικής μορφής: (ρ, θ)



$$\tan^{-1}(\tan(\theta)) = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και ύστερα αυτού με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0}$$

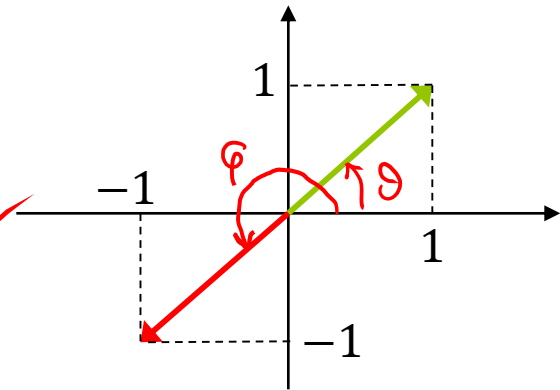
Εύαι :

- $(x_0, y_0) = (1, 1) : \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ ή } 45^\circ \quad \checkmark$$

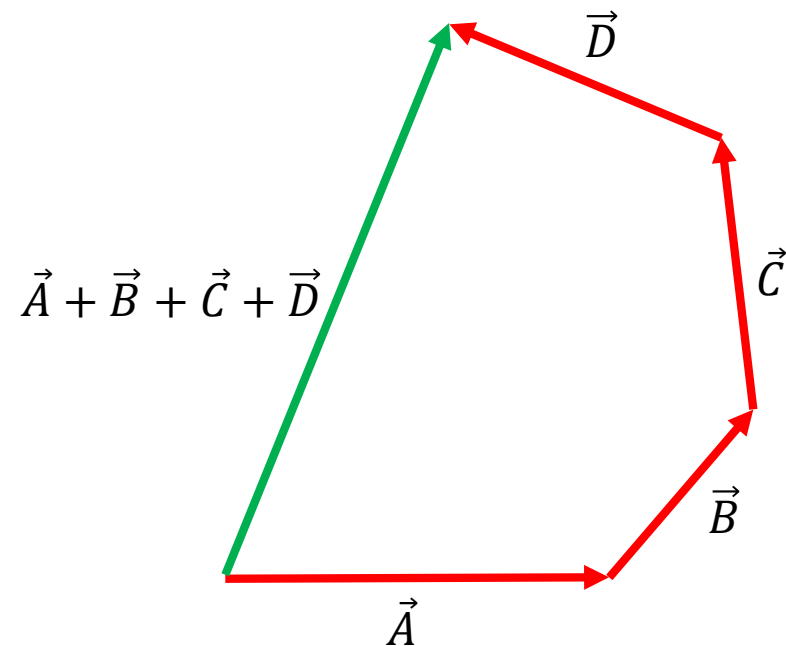
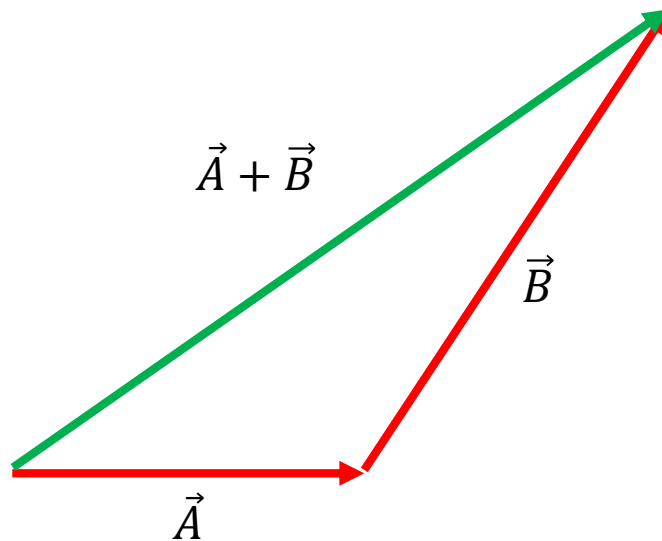
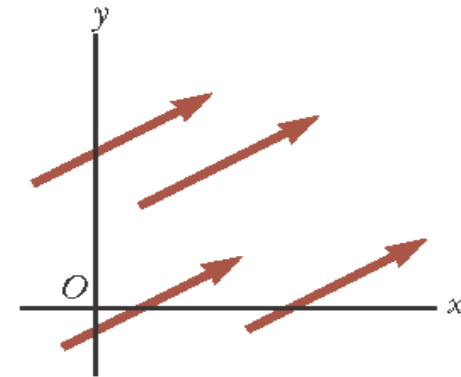
- $(x_0, y_0) = (-1, -1) : \rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad ! \quad \xrightarrow{+\pi} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4} \quad \left(- \frac{3\pi}{4} \right)$$



Διανύσματα

- Ιδιότητες διανυσμάτων
- **Ισότητα** διανυσμάτων
 - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
- **Πρόσθεση** διανυσμάτων



Διανύσματα

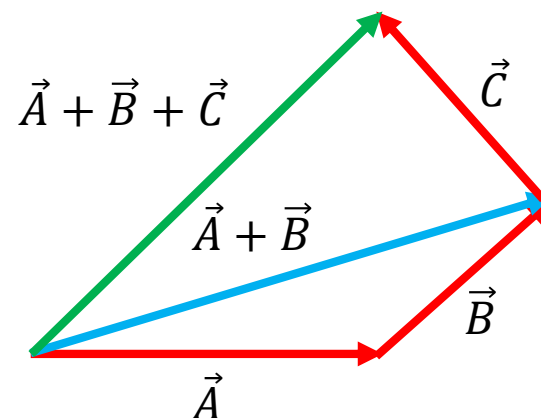
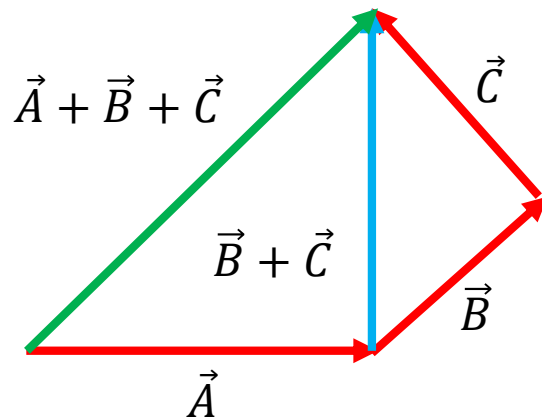
- Ιδιότητες

- Αντιμεταθετικότητα

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

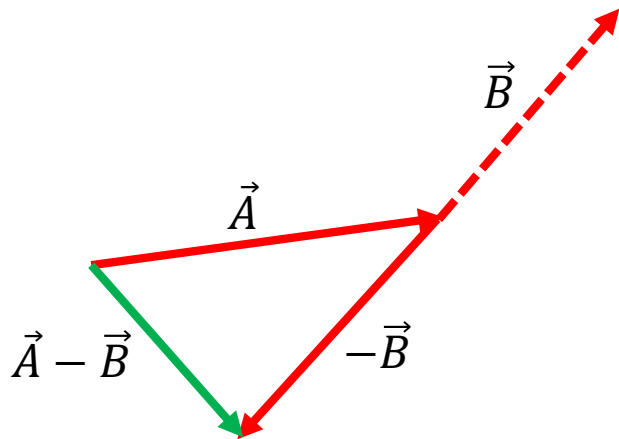
- Προσεταιριστικότητα

- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

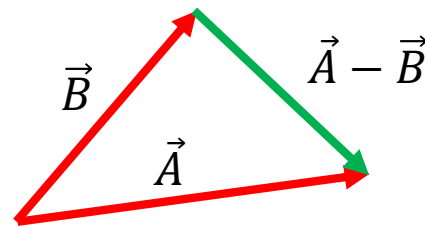


Διανύσματα

- **Αρνητικό διάνυσμα** ενός διανύσματος $\vec{A}$
 - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\vec{A}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$
- Παράδειγμα:
 - Πράξη $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



$$\vec{X} + \vec{B} = \vec{A} \Rightarrow \vec{X} = \vec{A} - \vec{B}$$



Διανύσματα

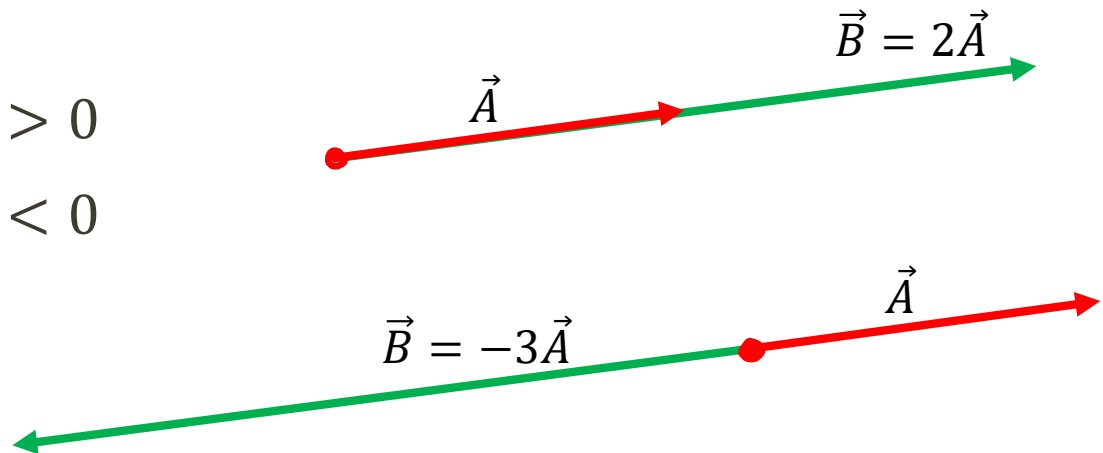
- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

- Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά και το μέτρο του

- $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$

- $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \text{ αν } m > 0$

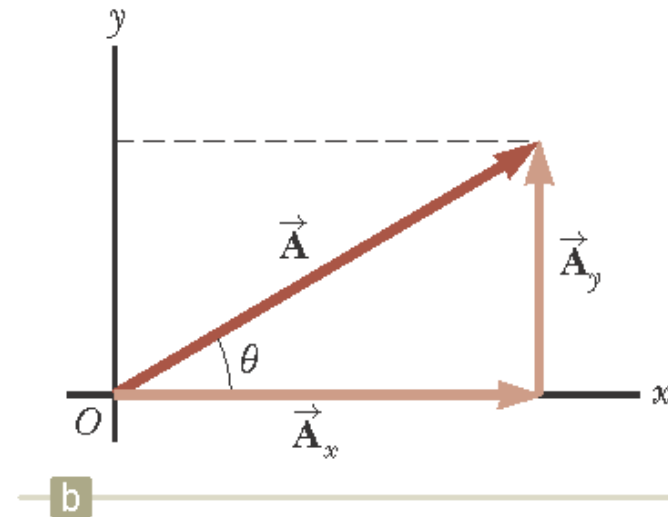
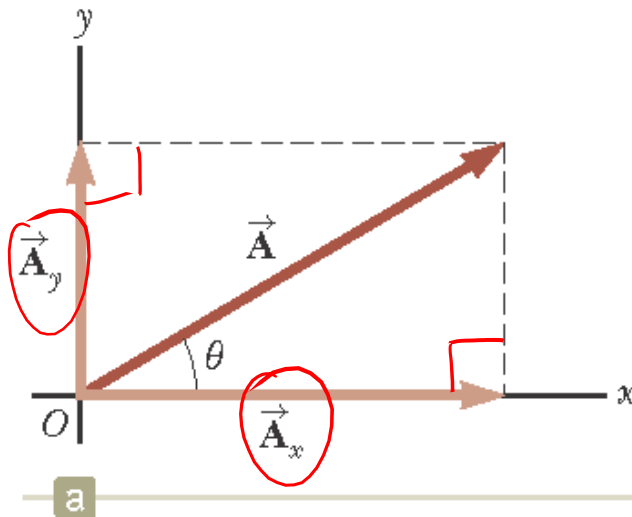
- $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, \text{ αν } m < 0$



Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα ή ως πρώτο βήμα πριν κάποια άλγεβρα
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια και ευχρηστία, προτιμούμε την ανάλυση σε **συνιστώσες** (μια κάθετη και μια παράλληλη στον x-άξονα)

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μοναδιαίων διανυσμάτων**

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

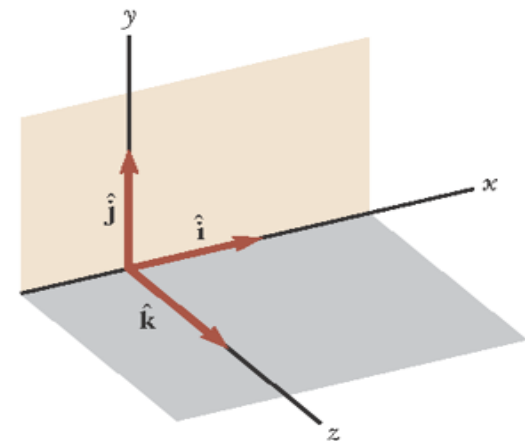
- Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)

- Περιγράφουν έναν άξονα (διεύθυνση)

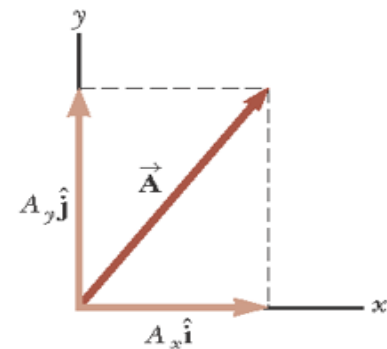
- $\vec{i} \rightarrow x, \vec{j} \rightarrow y, \vec{k} \rightarrow z$

- Κάθετα μεταξύ τους

- $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}$



a



b

Διανύσματα

- Το διάνυσμα $\vec{A}$ σε ένα επίπεδο μπορεί να γραφεί ως

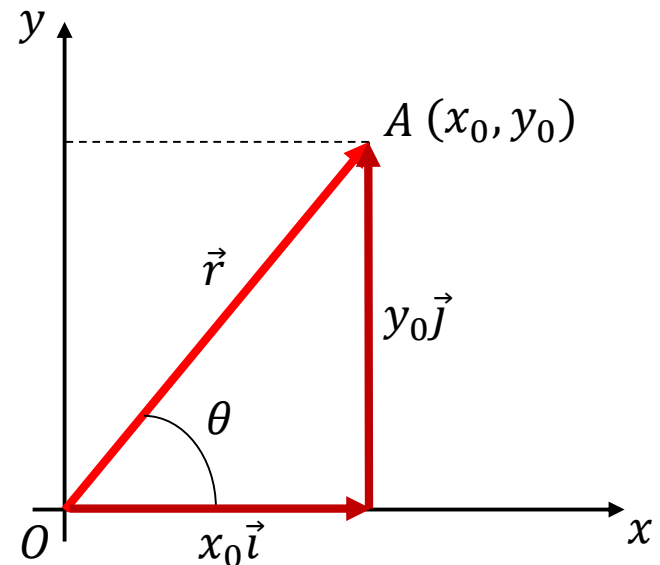
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}, \quad A_x, A_y \in \mathbb{R}$$

με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων

- Διάνυσμα θέσης**

- Σημείο $A(x_0, y_0)$
- $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$
- Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι

$$x_0 \vec{i}, y_0 \vec{j}$$



Διανύσματα

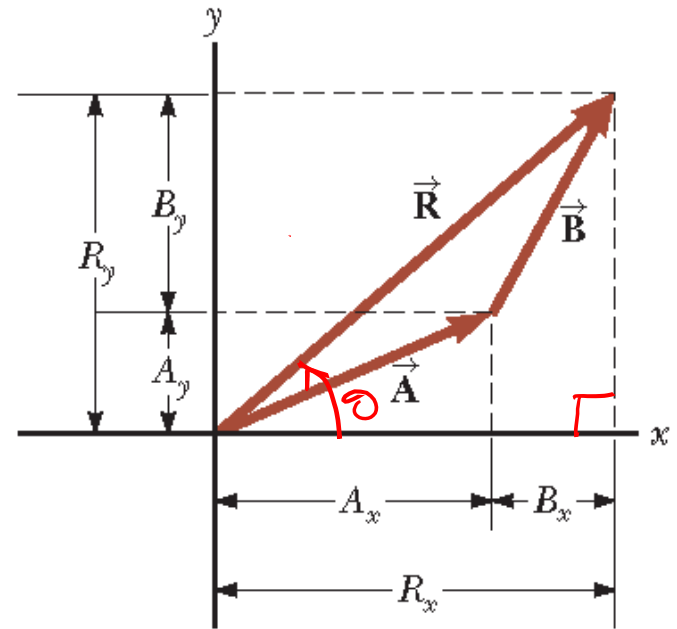
- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})$
- $\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

- Πρόσθεση όλων των x -συνιστωσών και όλων των y -συνιστωσών

- $|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$



Διανύσματα

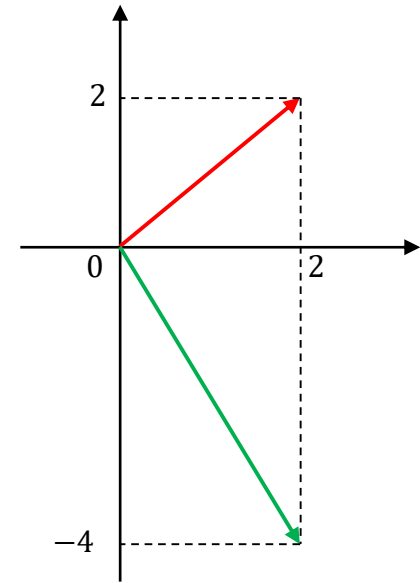
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{B} = (2\vec{i} - 4\vec{j})$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή



$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= (2+2)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j} \sim (4, -2)\end{aligned}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \rho = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

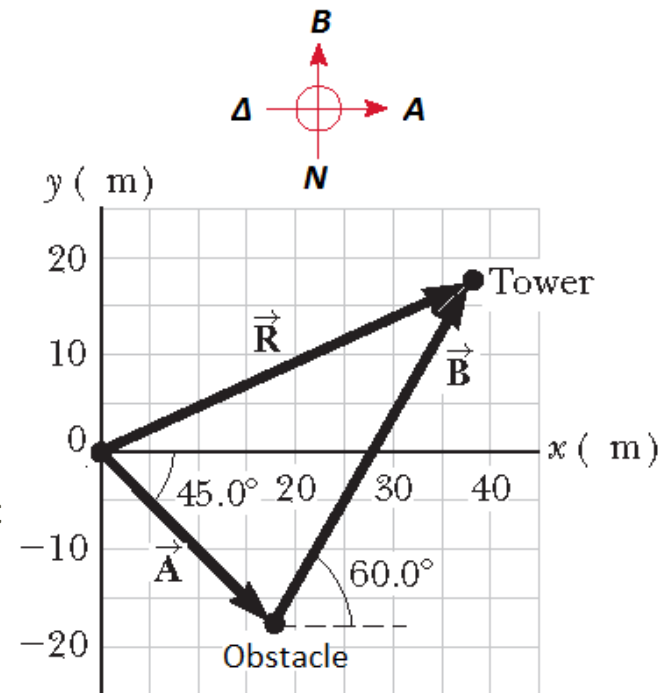
$$\vartheta = \tan^{-1} \frac{-2}{4} = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \cong -26^\circ. \text{ Άρα } (\rho, \vartheta) = (2\sqrt{5}, -26^\circ)$$

Διανύσματα

○ Παράδειγμα:

○ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του (Δείτε το σχήμα).

- A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
- B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
- C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

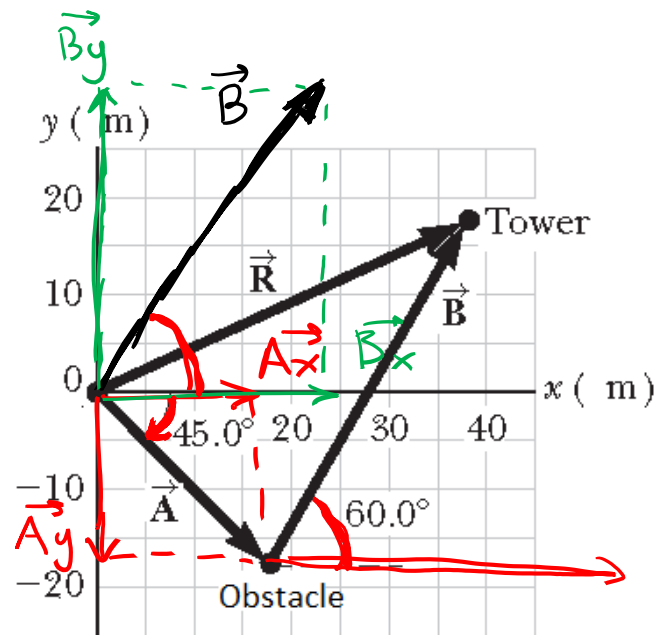


Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m NA από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° BA, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



$$\text{Είναι } \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

$$\text{Οπότε } A_x = |\vec{A}| \cos(-45^\circ) = |\vec{A}| \cos(45^\circ) = 25 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 17.7 \text{ m}$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin(-45^\circ) = |\vec{A}| (-\sin(45^\circ)) = -25 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -17.7 \text{ m}$$

$$\text{Όπου, } \vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

$$\text{Άρα } B_x = |\vec{B}| \cos(60^\circ) = 40 \cdot \cos(60^\circ) = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ m}$$

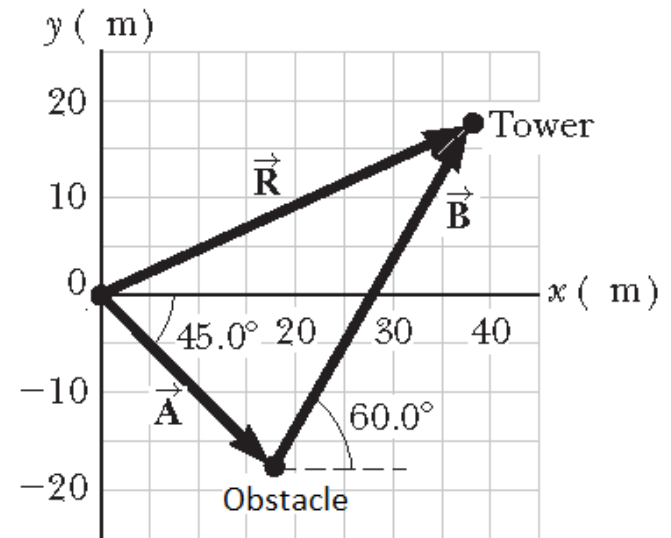
$$B_y = |\vec{B}| \sin(60^\circ) = 40 \sin(60^\circ) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 34.6 \text{ m}$$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Β. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.



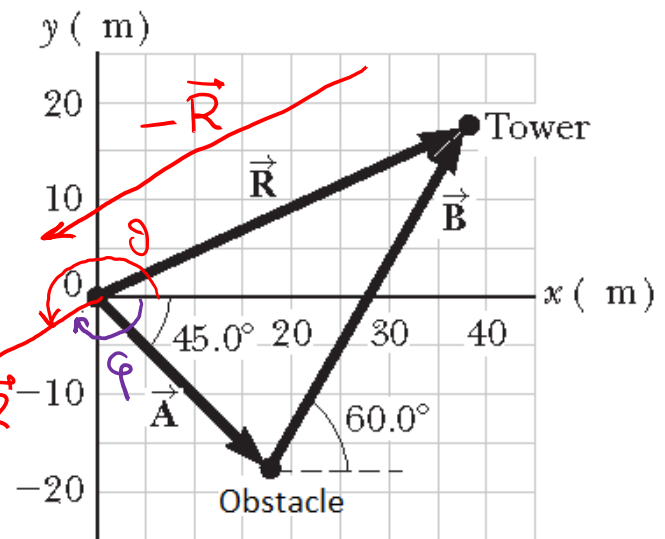
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} \\ &= 37.7\vec{i} + 17.7\vec{j}\end{aligned}$$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

γ. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Το διάνυσμα που περιγράφει την κίνηση αυτή είναι $-\vec{R}$

$$\text{Αν } \vec{R}' = -\vec{R} = -(\vec{R}_x \vec{i} + \vec{R}_y \vec{j}) = -37.7 \vec{i} - 17.7 \vec{j}$$

Η γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα είναι

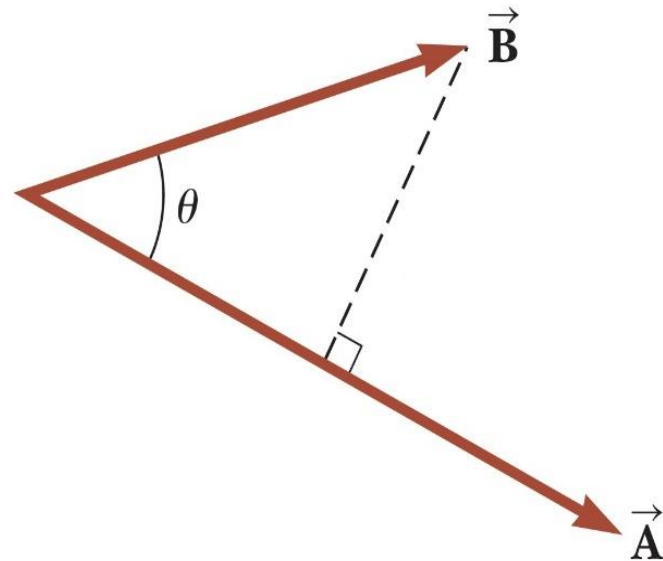
$$\theta = \tan^{-1} \frac{-17.7}{-37.7} = \tan^{-1} \frac{17.7}{37.7} \approx 24.2^\circ \xrightarrow[\text{διόρθωση}]{+ \pi} 204.2^\circ \text{ ή } -155.7^\circ$$

Διανύσματα

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$
- Το **εσωτερικό τους γινόμενο** είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

με θ τη μεταξύ τους γωνία



Διανύσματα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

- Αντιμεταθετικότητα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- Επιμεριστικότητα

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

- Ειδικές περιπτώσεις

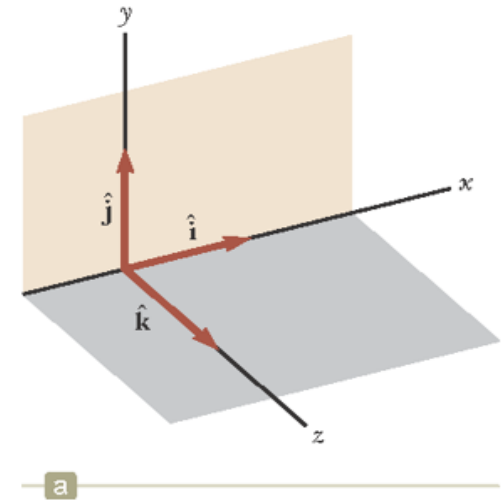
- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

- $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}|$

- $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}| |\vec{B}|$

Διανύσματα

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 - Ορίζουν ένα 3Δ χώρο
- Εύκολα αποδεικνύεται (κάντε το! 😊) ότι



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

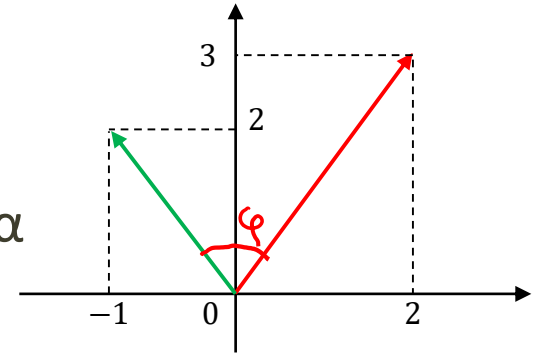
- Για $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$, $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$,
έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Διανύσματα

● Παράδειγμα:

- Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων



$$\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{B} = (-\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\Theta \text{ είναι } \vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4$$

$$\text{Οποτε } \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \vartheta \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{4}{? \cdot ?} \left. \vphantom{\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Είναι } |\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \text{Αρα } \vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \right) \approx 60^\circ$$



Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδιάσή του χρειάστηκαν πολλές διαφορετικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Παραγωγή - ολοκλήρωση



Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδιάσή του χρειάστηκαν πολλές διαφορετικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο
Παραγωγή - ολοκλήρωση

Παράγωγος

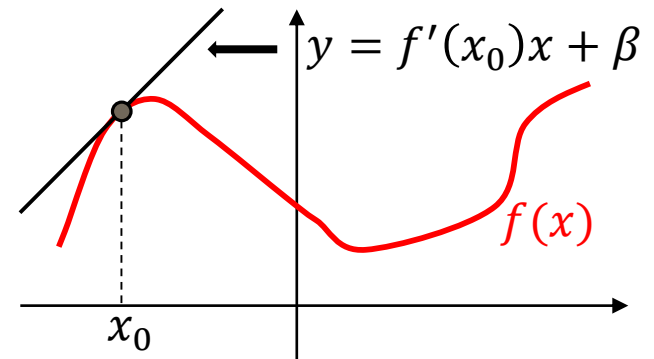
- Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση του x τότε ορίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα (ρυθμός μεταβολής) μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ συναρτήσει του x
- Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 έχει «κλίση» (συντελεστή διεύθυνσης) $f'(x_0)$

- 2^η παράγωγος: $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

- 3^η παράγωγος: $f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$



Παράγωγος

Κανόνες

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{(f'(x)g(x) - g'(x)f(x))}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}c = 0, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Παράγωγοι

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\log(f(x)) = f'(x)\frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\cos(f(x)) = -f'(x)\sin(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Ολοκλήρωμα

- Το ολοκλήρωμα είναι – σχεδόν – η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης

- Για παράδειγμα, αν $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$, τότε

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

- Με άλλα λόγια, όταν θέλω να υπολογίσω το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(x)$, αναζητώ μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία ονομάζεται *παράγουσα*, την οποία αν παραγωγίσω θα πάρω την $F(x)$
- Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται **αόριστο** ολοκλήρωμα
 - Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση κάποιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το x εδώ)
- Το σύμβολο dx μας δηλώνει τη *μεταβλητή ολοκλήρωσης*

Ολοκλήρωμα

- Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει και

$$\frac{d}{dx} (x^3 + c) = 3x^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

και άρα το πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Η πιο σημαντική ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι η **γραμμικότητα**:

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Ολοκλήρωμα

- Πιο γενικά λοιπόν, αν $F(x) = f'(x)$ τότε

$$\int F(x)dx = f(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Αντίθετα, ένα **ορισμένο** ολοκλήρωμα γράφεται ως

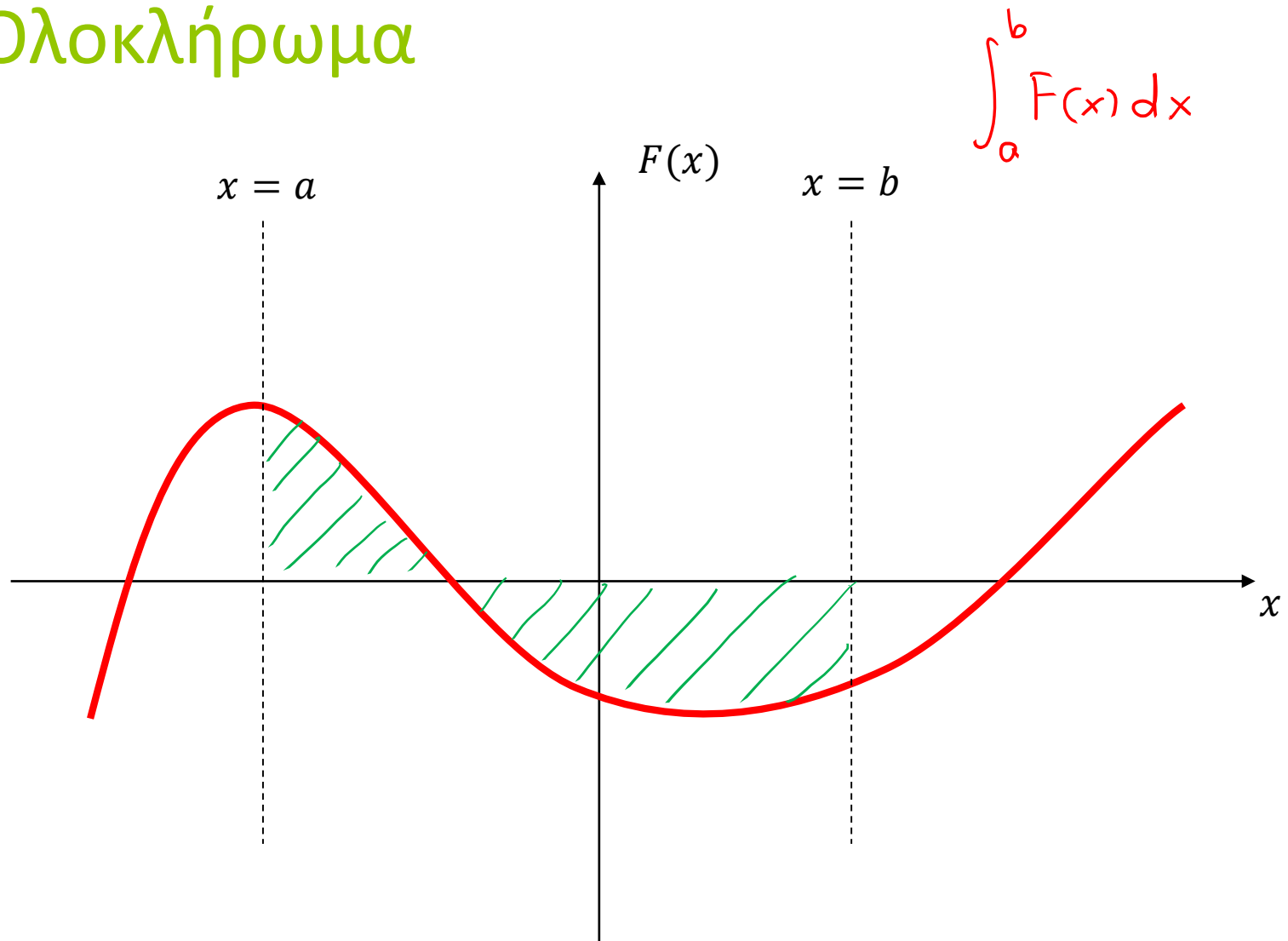
$$\int_a^b F(x)dx$$

και υπολογίζεται ως

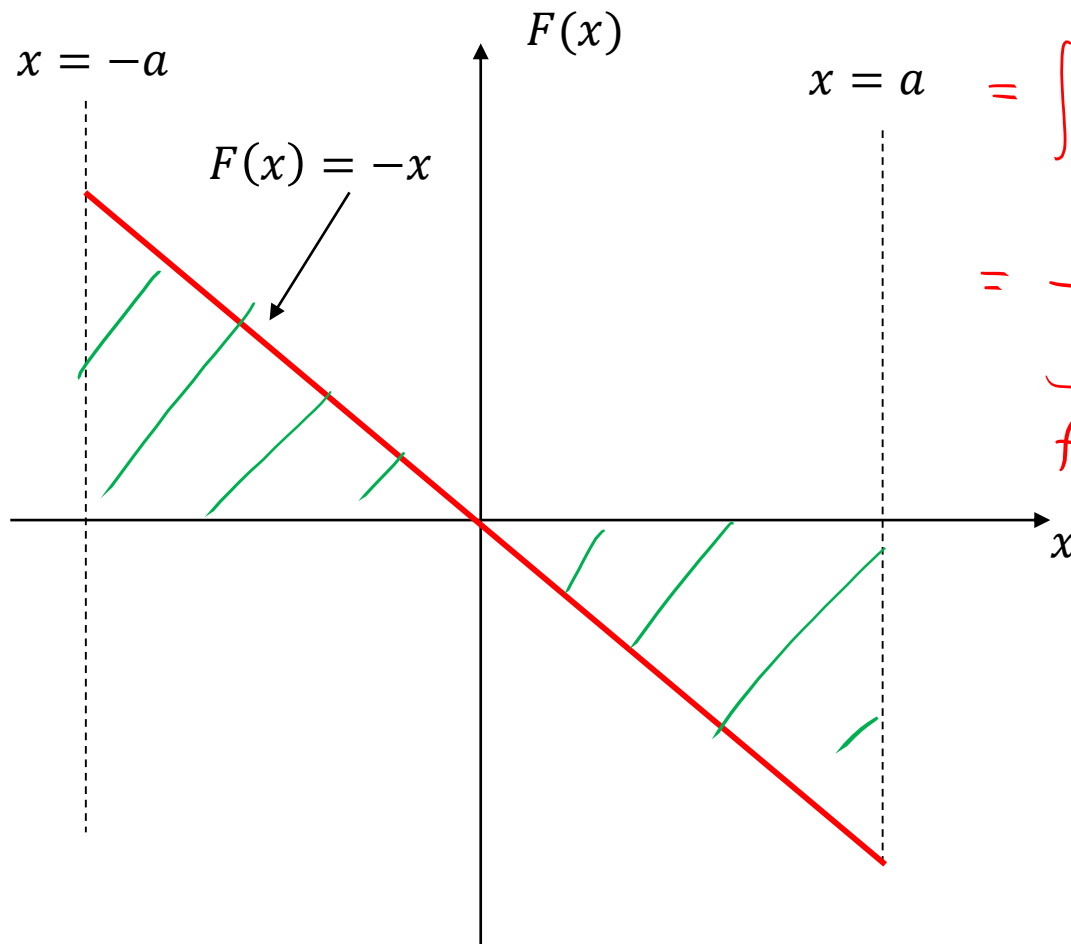
$$\int_a^b F(x)dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα ένας αριθμός – ΟΧΙ μια συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος)
 - ... και ποτέ δεν περιλαμβάνει σταθερά c στο αποτέλεσμα
 - Ερμηνεύεται ως η επιφάνεια μεταξύ της συνάρτησης $F(x)$ και του οριζόντιου άξονα, από την ευθεία $x = a$ ως την ευθεία $x = b$

Ολοκλήρωμα



Ολοκλήρωμα



$$\int_{-a}^a F(x) dx = ? \quad \textcircled{0}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-a}^a (-x) dx = - \int_{-a}^a x dx \\ &= - \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=-a}^{x=a} = f(a) - f(-a) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{f(x)} \\ &= - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} \right) \\ &= - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \textcircled{0} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωμα

Παραδείγματα:

$$\int (x^2 + 3x + 2) dx = ?$$

$$\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2) dx = ?$$

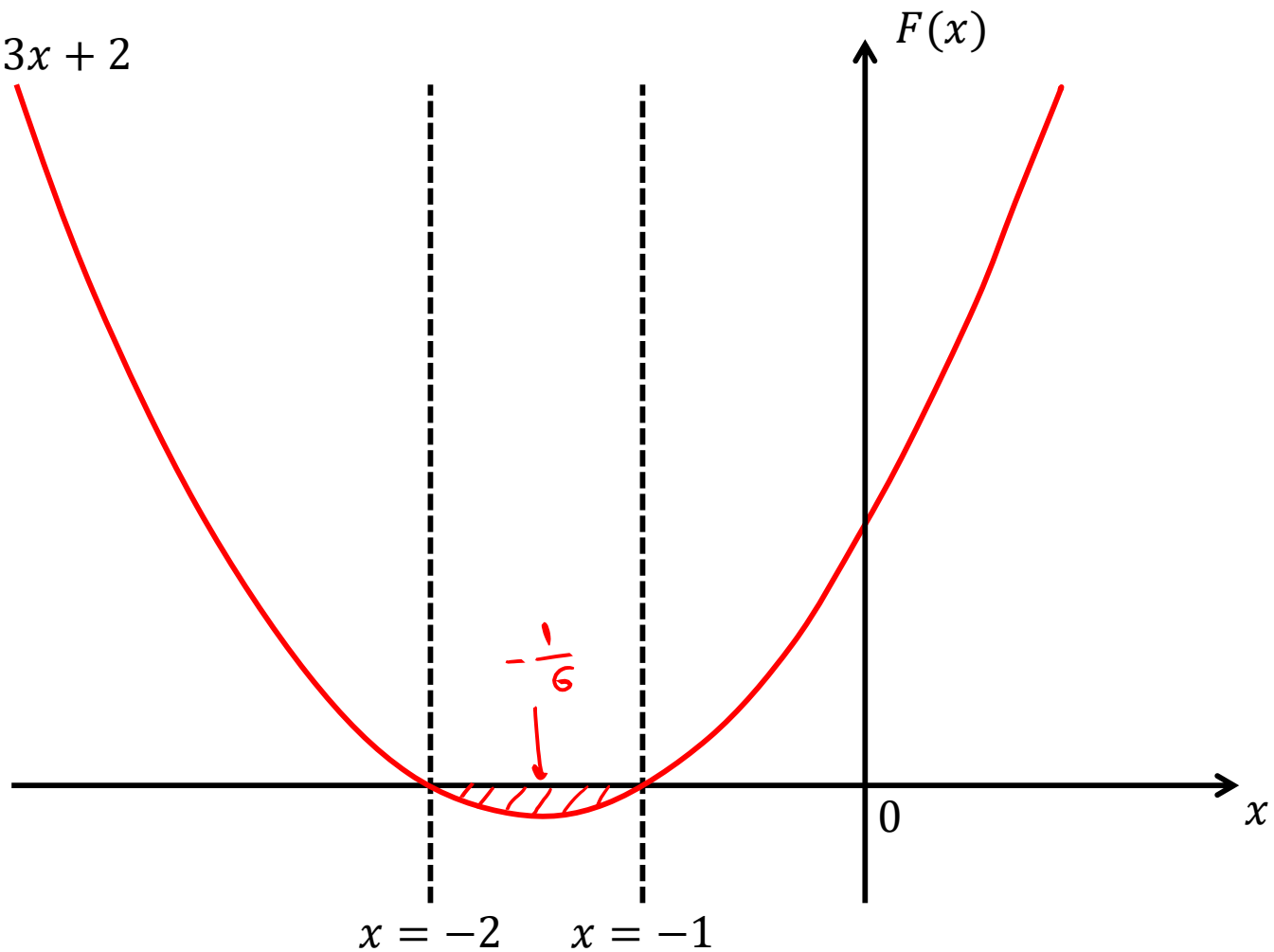
Είναι $\int (x^2 + 3x + 2) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 2 dx$

$$= \int x^2 dx + 3 \int x dx + 2 \int 1 dx = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Είναι $\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2) dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 2x}_{f(x)} \bigg|_{x=-2}^{x=-1} = f(-1) - f(-2) = -\frac{1}{6}$

Ολοκλήρωμα

$$x^2 + 3x + 2$$



Ολοκλήρωμα

- Παραδείγματα:

$$\int e^{ax} dx = ?$$

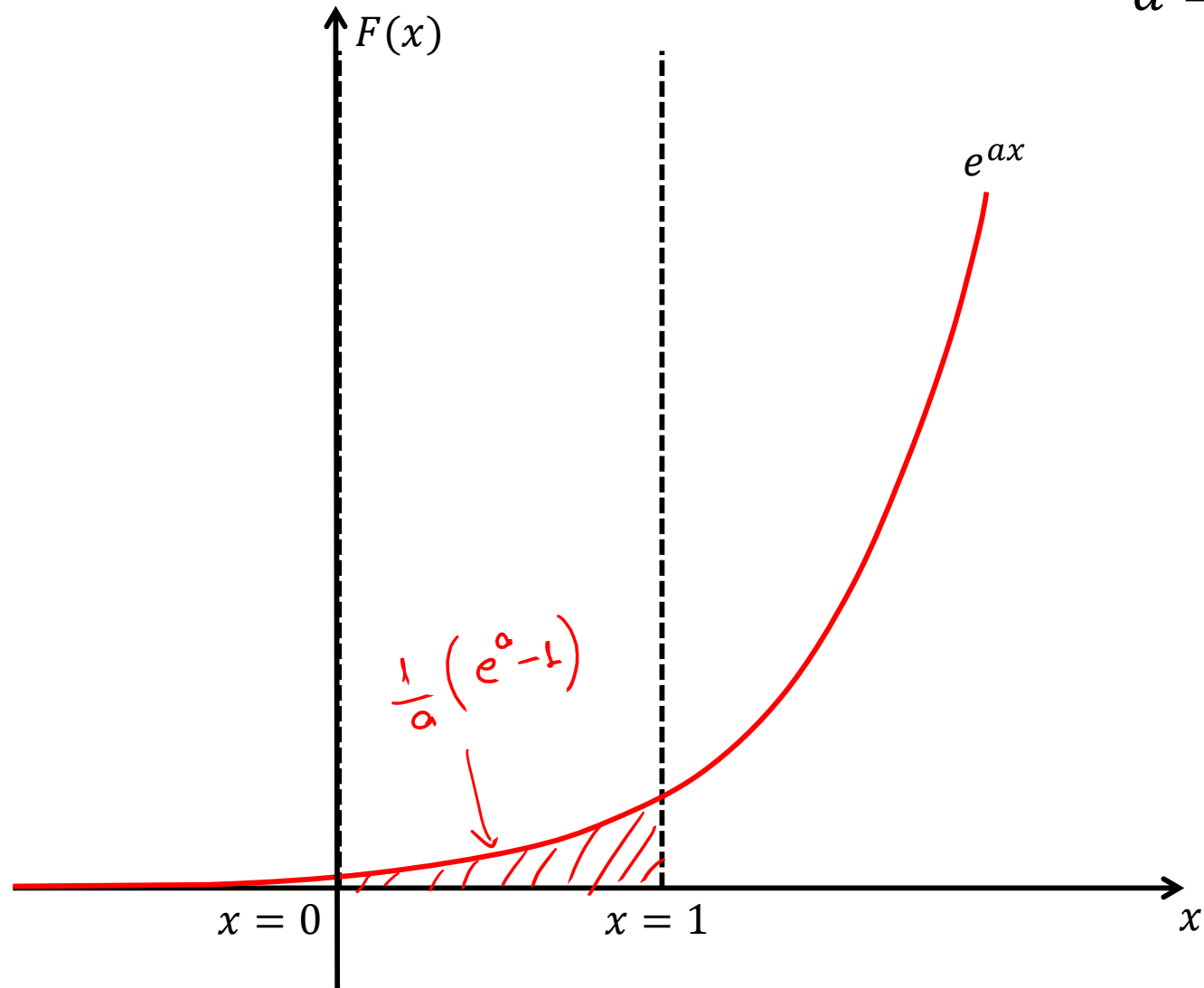
$$\int_0^1 e^{ax} dx = ?$$

Είναι $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, c \in \mathbb{R}$

Είναι $\int_c^1 e^{ax} dx = \underbrace{\frac{1}{a} e^{ax}}_{f(x)} \bigg|_{x=0}^{x=1} = f(1) - f(0) = \frac{1}{a} (e^a - 1).$

Ολοκλήρωμα

$$a = 2$$





Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1^η Ενότητα

Κλασική Μηχανική



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και μετά σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - Η Θέση
 - Η Ταχύτητα
 - Η Επιτάχυνση
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση $\vec{x}$: διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)

- Διανυσματικό μέγεθος

- Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{i}$ (οριζόντια κίνηση)

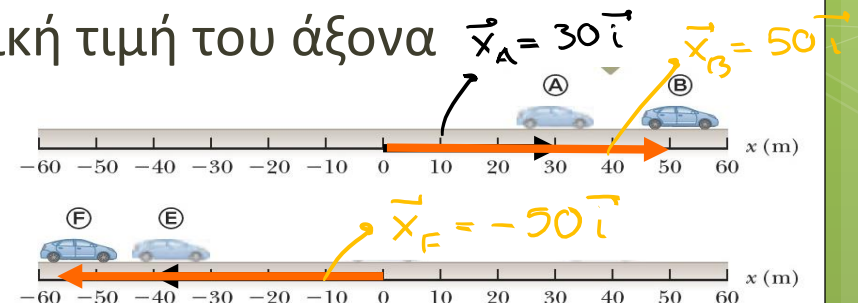
- Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος

- Η θέση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική – ως τιμή στο βαθμονομημένο άξονα

- Θετική τιμή : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα $\vec{x}_A = 30\vec{i}$

- Αντίθετα για αρνητική τιμή

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$:** η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου

Ορισμός:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{τελ} - \vec{x}_{αρχ}$$

- με $\vec{x}_{τελ}, \vec{x}_{αρχ}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{τελ} \rightarrow \vec{x}_f, \vec{x}_{αρχ} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μέτρο μετατόπισης $|\Delta\vec{x}|$!**
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!



Κίνηση σε μια Διάσταση

Μονάδα μέτρησης στο SI:
m (μέτρο)

- Μετατόπιση $\Delta \vec{x}$: διανυσματικό μέγεθος!

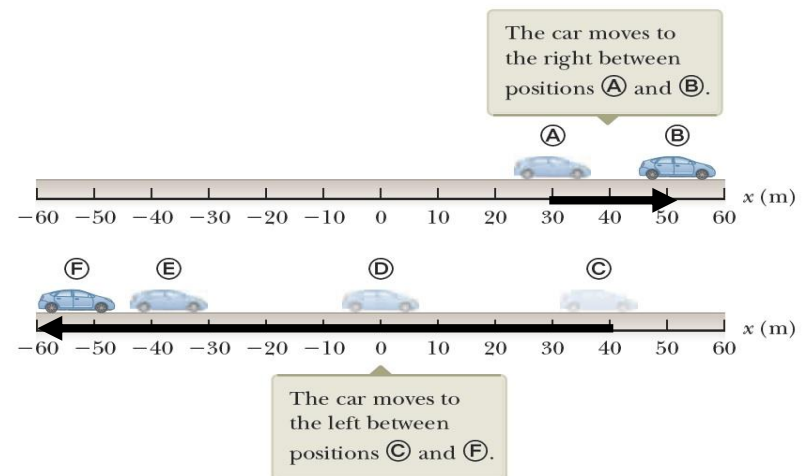
- Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

- Αν $\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{i} = \Delta x \vec{i}$:

- $\Delta x = x_f - x_i > 0 \iff$ κίνηση προς τα δεξιά

- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \iff$ κίνηση προς τα αριστερά

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μέση ταχύτητα:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
- Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
- Ίδιο πρόσημο με $\Delta \vec{x}$ – γιατί?

Μονάδα μέτρησης:
m/s (μέτρο ανά
δευτερόλεπτο)

- Μέση αριθμητική ταχύτητα:

- $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
- Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Όμως

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

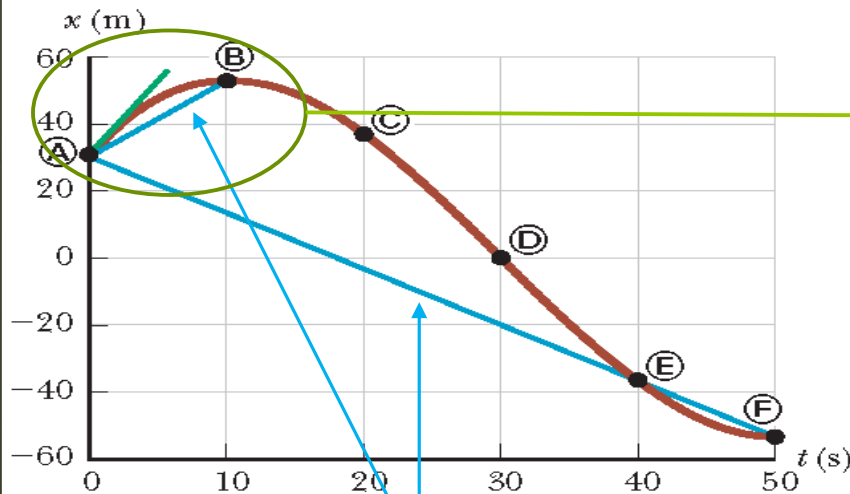
- Άρα: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο

Κίνηση σε μια Διάσταση

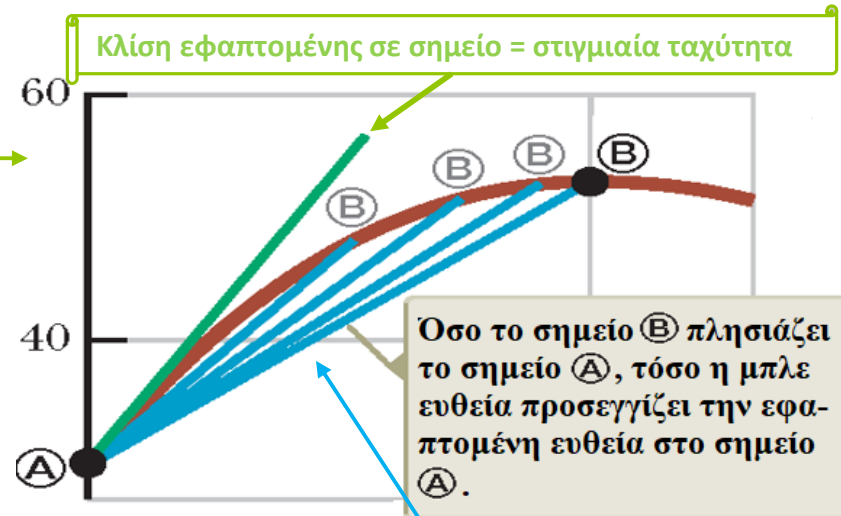
Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

Παράδειγμα:



Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα



Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα

Όσο το σημείο B πλησιάζει το σημείο A, τόσο η μπλε ευθεία προσεγγίζει την εφαπτομένη ευθεία στο σημείο A.

Κλίση ευθείας μεταξύ δυο σημείων = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

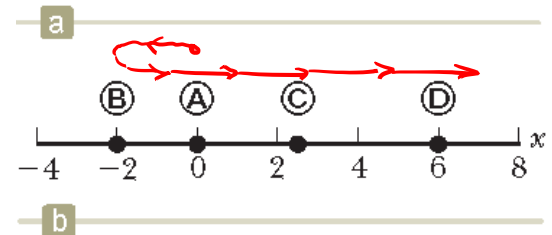
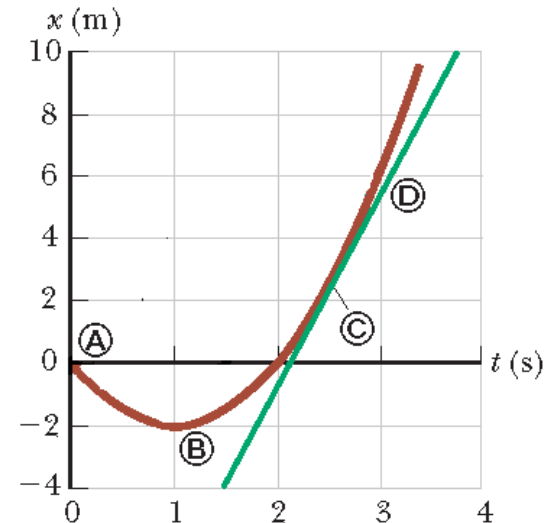
● Παράδειγμα:

- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x = -4t + 2t^2 = x(t)$$

όπου x είναι η θέση σε m , και t είναι ο χρόνος σε s , όπως στο Σχήμα (α).

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- Γ. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

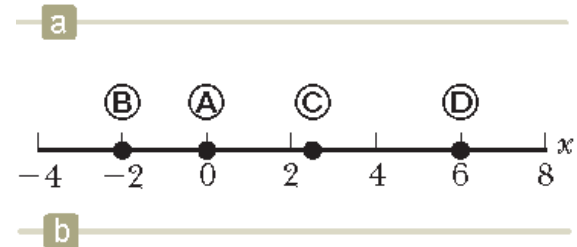
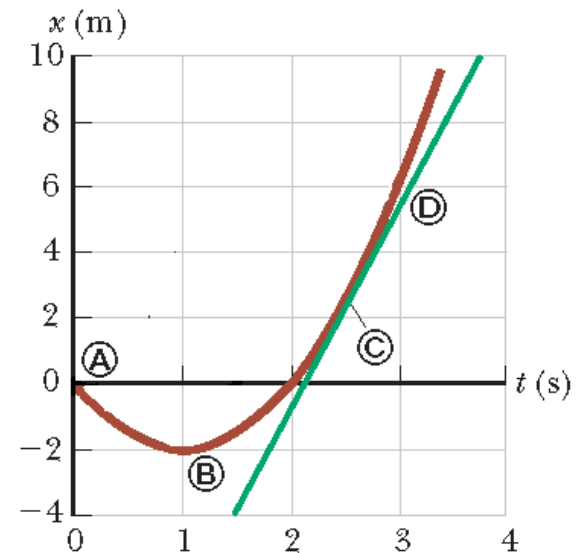
Παράδειγμα – Λύση:

$$x = -4t + 2t^2 = x(t)$$

- A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

$$\begin{aligned} \bullet t_A = 0 \rightarrow t_B = 1 \text{ s} : \Delta \vec{x} &= \Delta x \cdot \vec{i} \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} \\ &= (x(1) - x(0)) \vec{i} \\ &= (-2 - 0) \vec{i} \\ &= -2 \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet t_C = 1 \rightarrow t_D = 3 \text{ s} : \Delta \vec{x} &= \Delta x \cdot \vec{i} = (x_D - x_C) \cdot \vec{i} = (x(3) - x(1)) \cdot \vec{i} \\ &= (-12 + 9 \cdot 3^2 - (-4 + 2)) \cdot \vec{i} = 8 \vec{i} \end{aligned}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

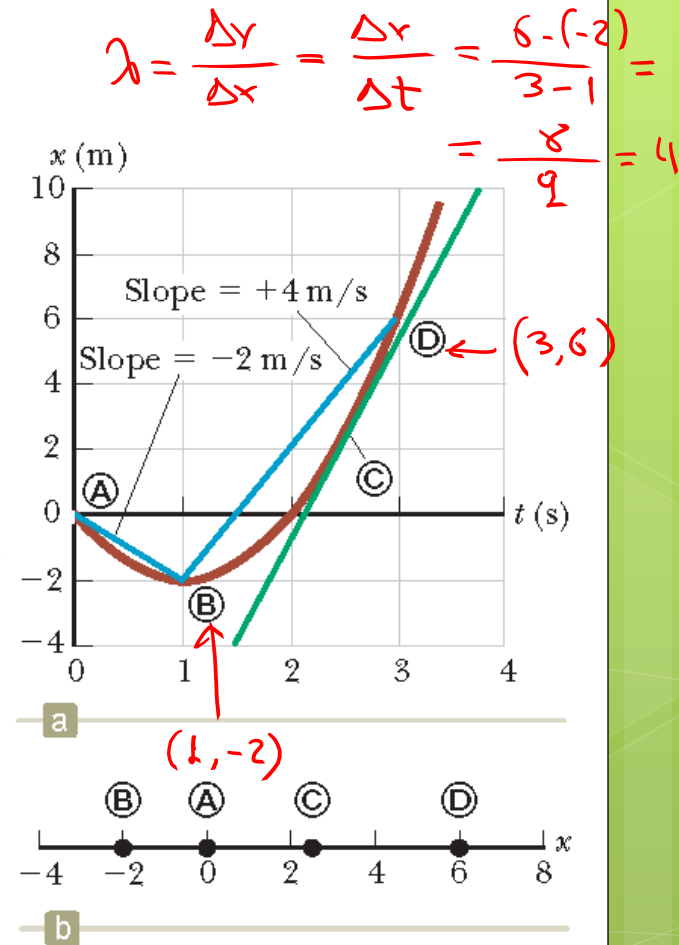
Παράδειγμα – Λύση:

$$x = -4t + 2t^2$$

- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα. $(0 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 3)$ sec

$$\bullet t=0 \rightarrow t=1 : \vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{-2\vec{i}}{1-0} = -2\vec{i} \frac{m}{s}$$

$$\bullet t=1 \rightarrow t=3 : \vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{8\vec{i}}{3-1} = \frac{8}{2}\vec{i} = 4\vec{i} \frac{m}{s}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

$$x = -4t + 2t^2$$

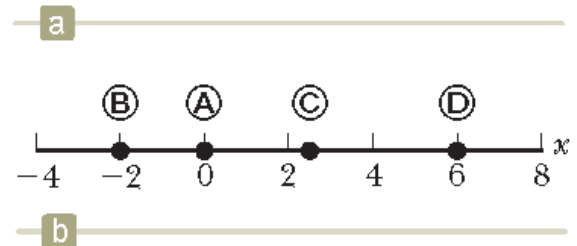
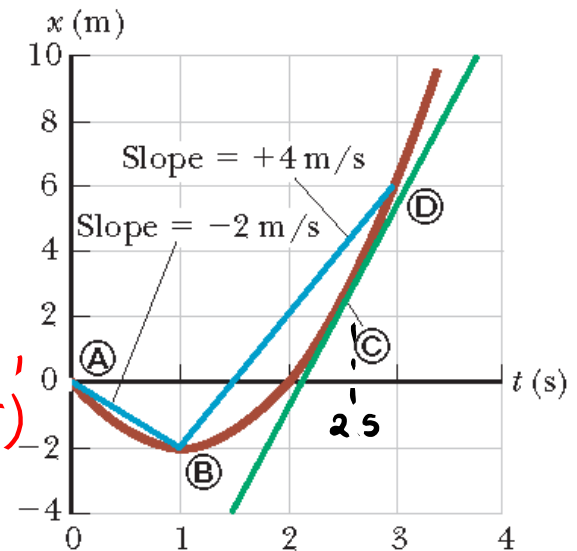
- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

Είναι $\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (-4t + 2t^2) = (-4t + 2t^2)'$

$$= -4 + 4t = u_x(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Για } t = 2.5 \text{ s}, \quad u_x(2.5) &= -4 + 4 \cdot 2.5 \\ &= -4 + 10 \\ &= 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \vec{u}_x(2.5) = 6 \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Θέση σωματιδίου υπό σταθερή ταχύτητα

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Επιτάχυνση

- Η μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

- Μέση επιτάχυνση

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- Στιγμιαία επιτάχυνση

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

είναι

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_x = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

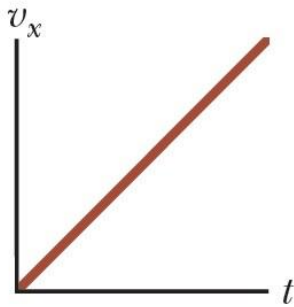
Μονάδα μέτρησης:
 m/s^2 (μέτρο ανά
δευτερόλεπτο στο τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

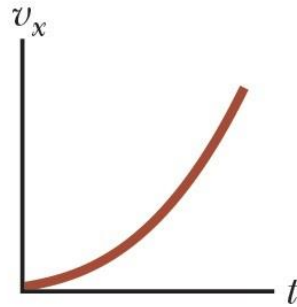
Quiz 1:

- Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

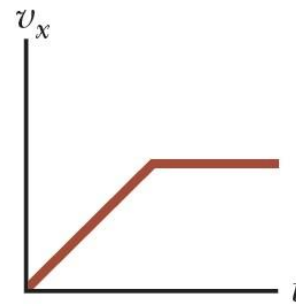
Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



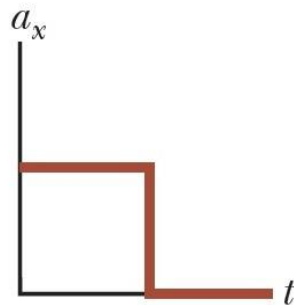
a



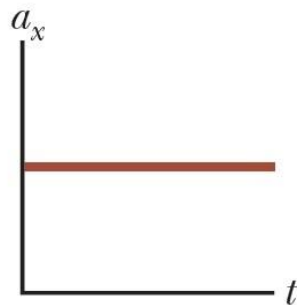
b



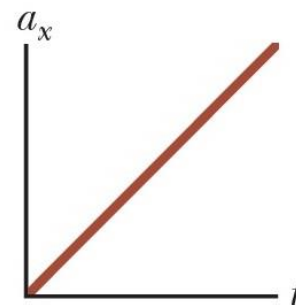
c



d



e



f

a → e

b → f

c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

Quiz 2:

- Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x = 4 - 27t + t^3 = x(t)$$

- A) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
- B) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
- Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή που το σωματίδιο είχε $u = 0$?

A) Είναι $u_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) = (4 - 27t + t^3)' = 3t^2 - 27 \frac{m}{s}$

B) —" — $a_x(t) = \frac{d}{dt} u_x(t) = (3t^2 - 27)' = 6t \frac{m}{s^2}$

Γ) Είναι $u_x(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (t-3)(t+3) = 0 \rightarrow t_1 = 3 \text{ s} \text{ Δεκτή}$
 $\quad \quad \quad t_2 = -3 \text{ s} \text{ Απορριπτεται}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή
 - Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά
- Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα x'

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xrightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Απόδειξη:

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$

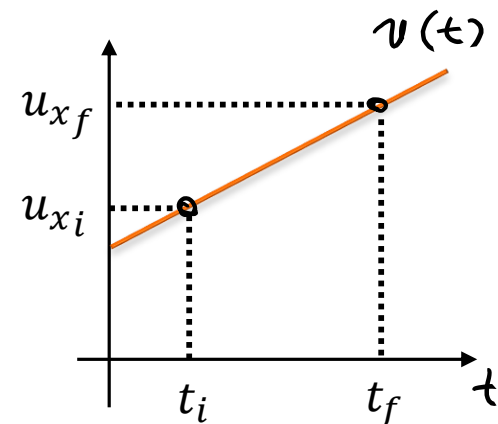
Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{x_i} και της τελικής ταχύτητας

u_{x_f}

Δηλ.

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t :

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$(x_f - x_i) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f :

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

Έχουμε ήδη

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2} t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i})t \\ &= x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned}$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Απόδειξη:

Έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})t$$

Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}(u_{x_f} + u_{x_i})\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right) \\ &= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

και

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
 - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν χωρίς διανύσματα
 - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως θετική φορά αυτή προς τα δεξιά
 - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
 - Μην ξεχνάτε να ορίζετε το σημείο αναφοράς σας ($t_i = 0$)!
- **Ελεύθερη πτώση** (κίνηση σε μια διάσταση – κατακόρυφη)
 - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -9.8\vec{j} \text{ m/s}^2$ (φορά προς τα κάτω)
 - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)
 - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΌΧΙ 10 m/s^2 !!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{a}_y = \vec{g} = -9.8 \vec{j} \text{ m/s}^2$ σταθερή
- Ορίζουμε θετική φορά προς τα επάνω

• Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$

2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$

3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$ ή $y_f = y_i + u_{y,avg}t$

4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$

5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης y δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $y'y$

Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται κατά μέτρο, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

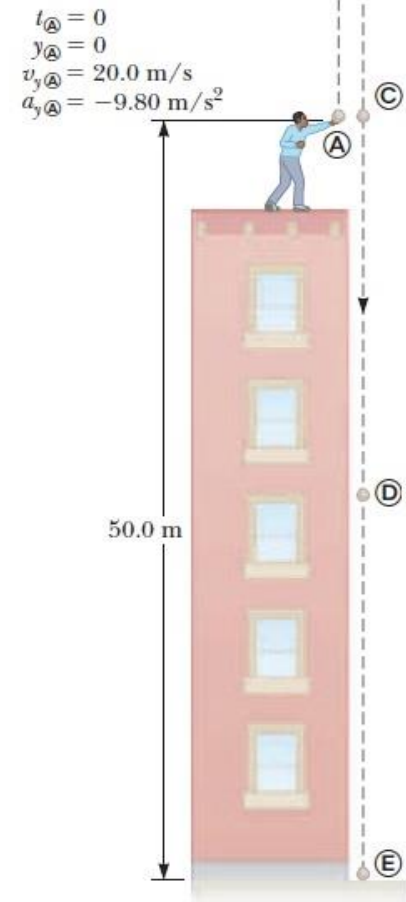
Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε όπου $-g$ θέτουμε g

Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- ◉ Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
- ◉ Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
- ◉ Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
- ◉ Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
- ◉ Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5 \text{ s}$.

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



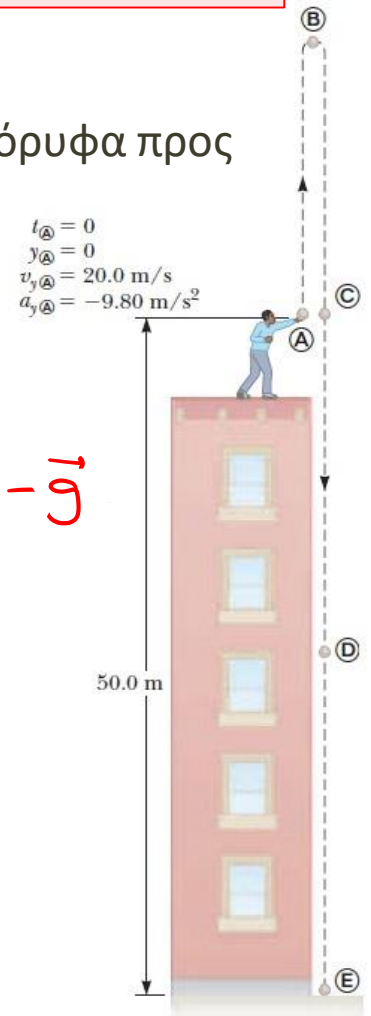
Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη σε έναν άξονα y (κατακόρυφη) με σταθερή επιτάχυνση, $\vec{a}_y = -\vec{g}$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



$$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m .
- Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

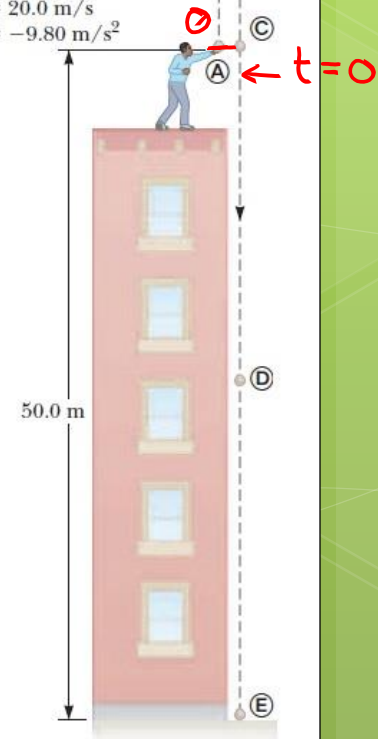
Διαδρομή μπάλας $A \rightarrow B$: Αρχικά εἶναι $\perp$, έχουμε

$$u_B = u_A - gt \Leftrightarrow 0 = 20 - 9.8t \Leftrightarrow t = \frac{20}{9.8} \text{ s.}$$

Οπότε $t \approx 2.04 \text{ s.}$

- $u_{yf} = u_{yi} - gt$
- $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
- $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
- $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
- $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$$\begin{aligned} t_A &= 0 \\ y_A &= 0 \\ v_{yA} &= 20.0 \text{ m/s} \\ a_{yA} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.

- Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

Διαδρομή $A \rightarrow B$: Αν εΐ. 4, έχουμε:

$$y_B = y_A + u_A t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow$$

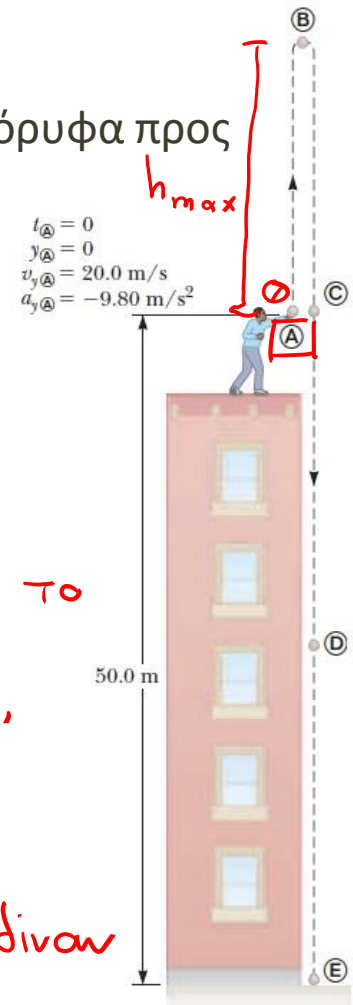
$$h_{max} = 0 + 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 t^2, \text{ το } t \text{ ισαται με το}$$

χρόνο που απαιτείται για την κίνηση $A \rightarrow B$,

$$\text{δηλ. } t \approx 2.04 \text{ s} = \frac{20}{9.8} \text{ s}. \text{ Αντικαθιστώντας,}$$

$$h_{max} = y_B \approx 20.4 \text{ m}. \text{ Δείξτε ότι οι εΐ. 3,5 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
- Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.

Διαδρομή $A \rightarrow C$: Από την εξ. 5, έχουμε :

$$u_c^2 = u_A^2 - 2g(y_c - y_A) \Leftrightarrow$$

$$u_c^2 = (20)^2 - 2 \cdot 9.8 (0 - 0)$$

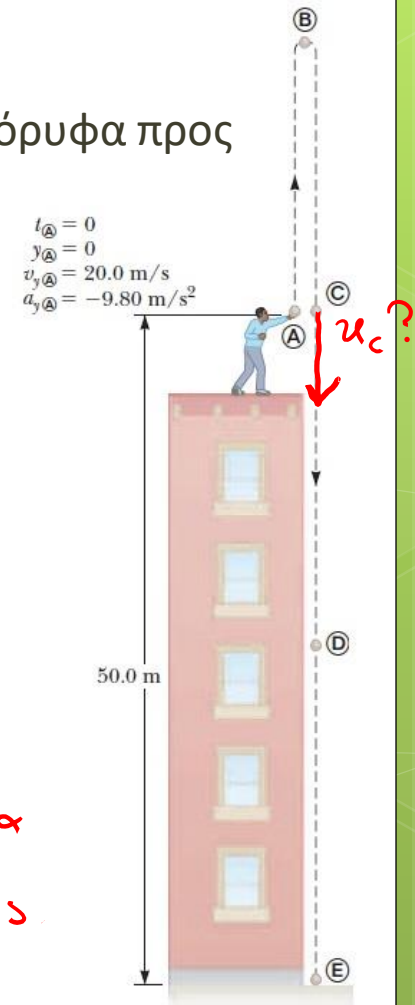
$$u_c^2 = 400 \Rightarrow u_c = \pm 20 \frac{m}{s}$$

Δεκτή λύση η $u_c = -20 \frac{m}{s}$ γιατί το διάνυσμα

$\vec{u}_c$ είναι αντίθετο της θετικής φοράς της κίνησης.

$$\text{Άρα } \vec{u}_c = -20 \vec{j} \frac{m}{s}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$



* Άρα $\vec{y}_D = -22.5 \vec{j} \text{ m}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.

- Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5 \text{ s}$.

Διαδρομή $C \rightarrow D$: Από ε3 1, έχουμε:

$$u_D = u_C - gt \Leftrightarrow u_D = -20 - 9.8 t$$

Το t ισούται με το χρόνο $C \rightarrow D$, που είναι

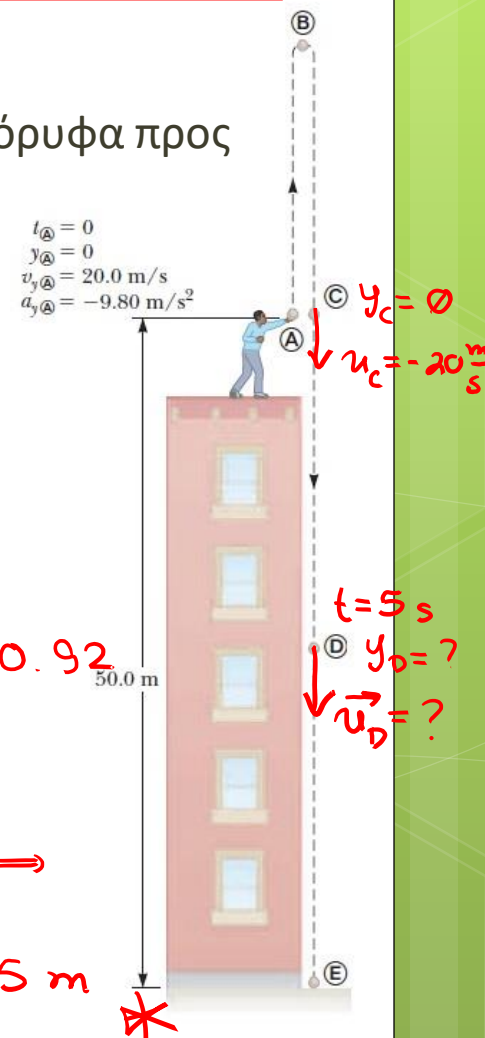
$$t = 5 - 4.08 = 0.92 \text{ s} \quad \text{Άρα} \quad u_D = -20 - 9.8 \cdot 0.92$$

$$\Rightarrow u_D \cong -29 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ δηλ } \vec{u}_D = -29 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Από ε3 5, έχουμε: } u_D^2 = u_C^2 - 2g(y_D - y_C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-29)^2 = (-20)^2 - 2 \cdot 9.8 (y_D - 0) \Rightarrow y_D = -22.5 \text{ m}$$

1. $u_{yf} = u_{yi} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{yi} + u_{yf}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$
4. $y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$





Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
 - Κίνηση στο επίπεδο
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
 - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
 - Οποιασδήποτε μορφής βολής/βαλλιστική κίνηση
 - Ηλεκτρόνια σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία
 - Κυκλική κίνηση δορυφόρου

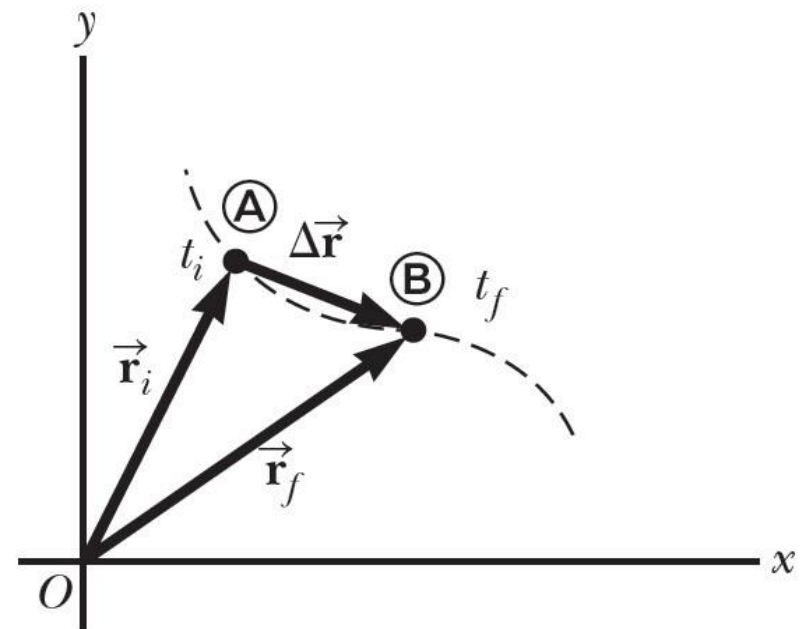
κ.α.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο xy
 - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
 - ...αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
 - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**
- Άρα η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
 - Ξεκινά από το $(0,0)$ και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$**
 - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
 - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt :

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

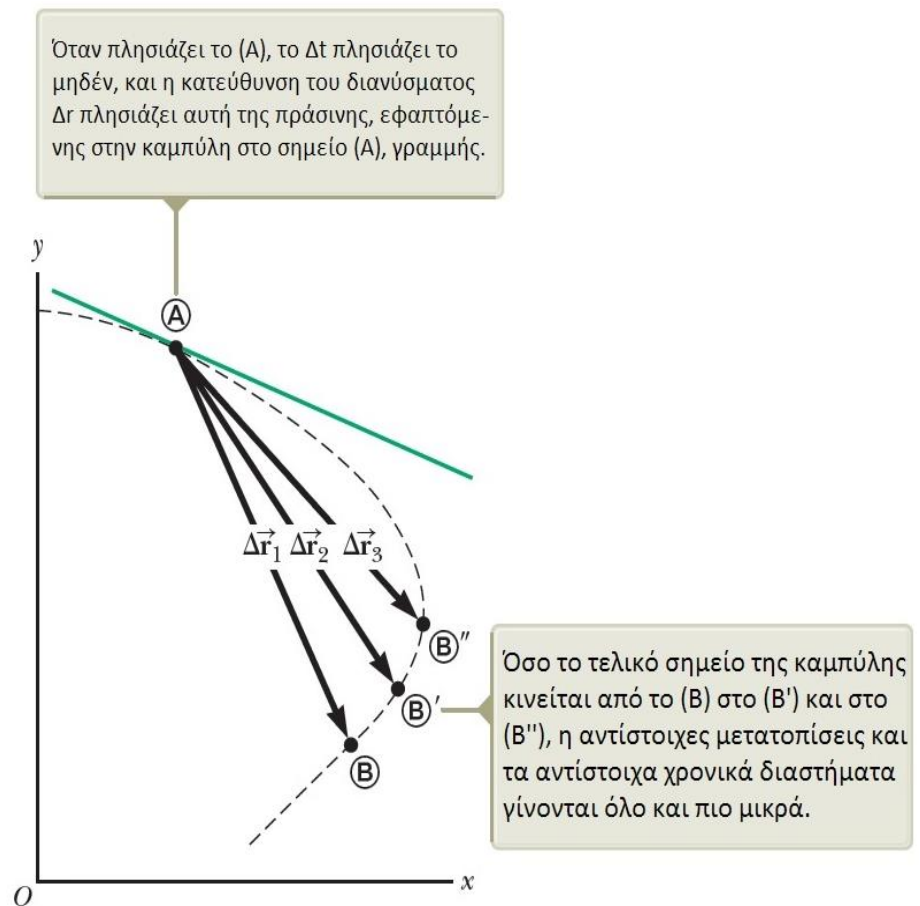
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta \vec{r}$
 - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
 - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta \vec{r}$
 - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (B, B', B'')
- Η κατεύθυνση του $\Delta \vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Στιγμιαία Ταχύτητα

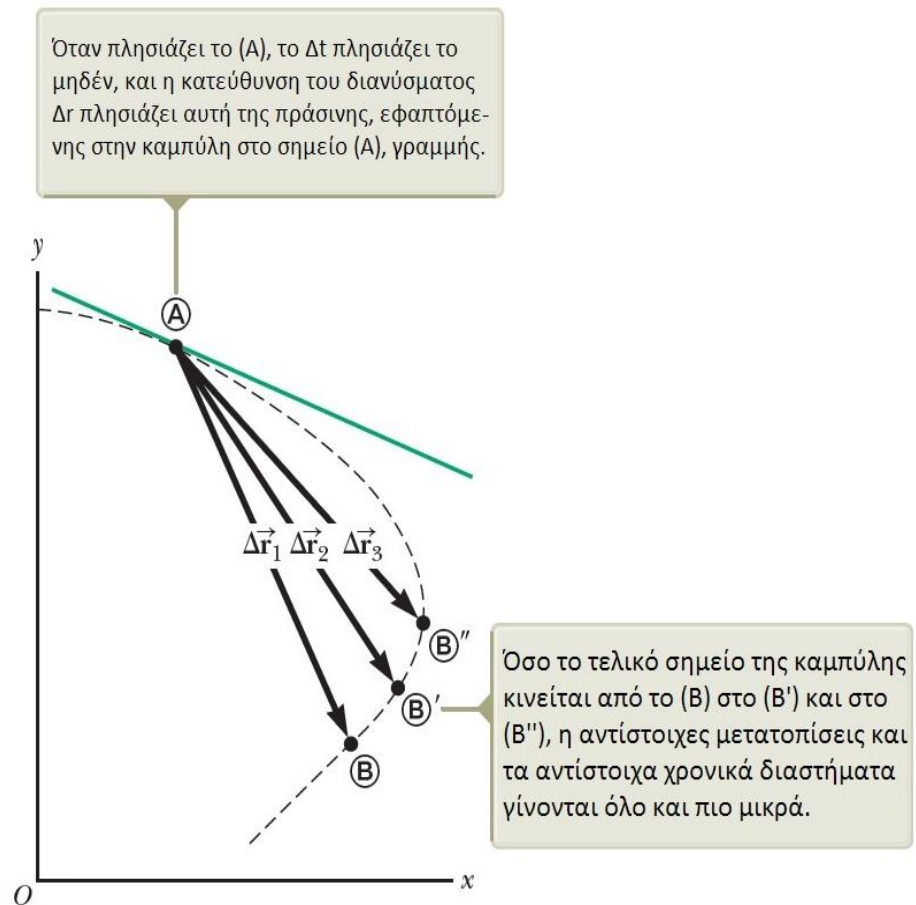
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο

- Μέτρο ταχύτητας = $|\vec{v}|$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

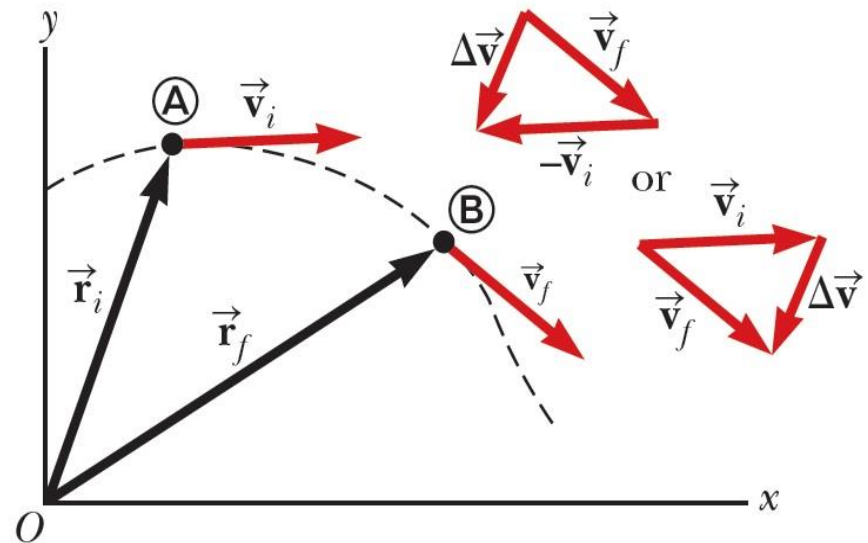
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta \vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στιγμαία Επιτάχυνση $\vec{a}$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση
 - ...όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση
- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
 - Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:
 - Τον άξονα των x
 - Τον άξονα των y
- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{r}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$, ως

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t, \quad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{i} + u_y\vec{j} &= (u_{x_i} + a_x t)\vec{i} + (u_{y_i} + a_y t)\vec{j} \\ &= (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\begin{aligned}\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} &= \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} \\ &= \underbrace{(x_i\vec{i} + y_i\vec{j})}_{\vec{r}_i} + \underbrace{(u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j})t}_{\vec{v}_i t} + \frac{1}{2}\underbrace{(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})}_{\vec{a}}t^2\end{aligned}$$

- Έτσι,

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

Αυτές οι εξισώσεις
κατασκευάστηκαν από ξεχωριστή
μελέτη της κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

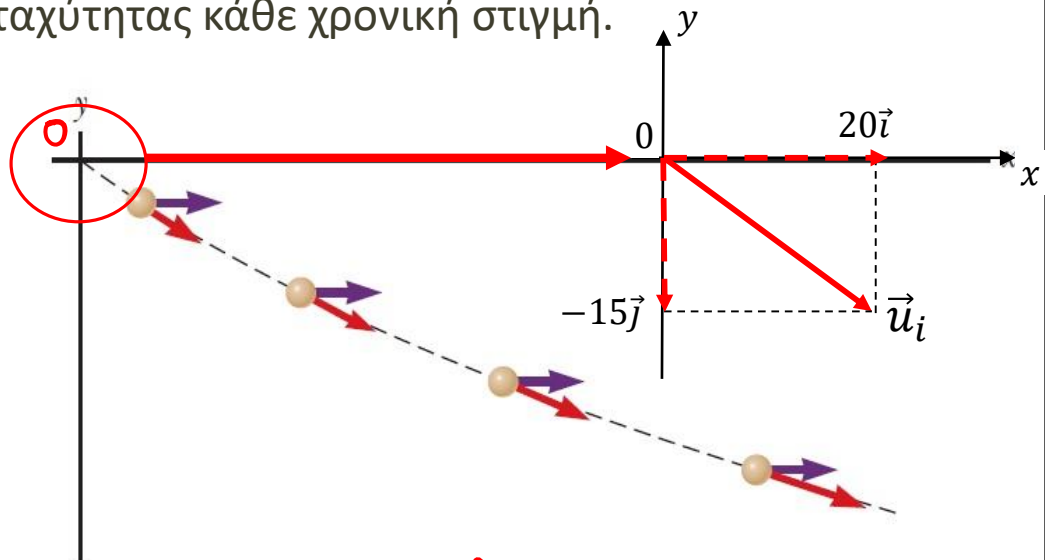
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$. Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;

Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



x -άξονας: ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση
 y -άξονας: ———— " ———— " ———— " ———— ταχύνεται

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Γνωρίζουμε ότι: $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$

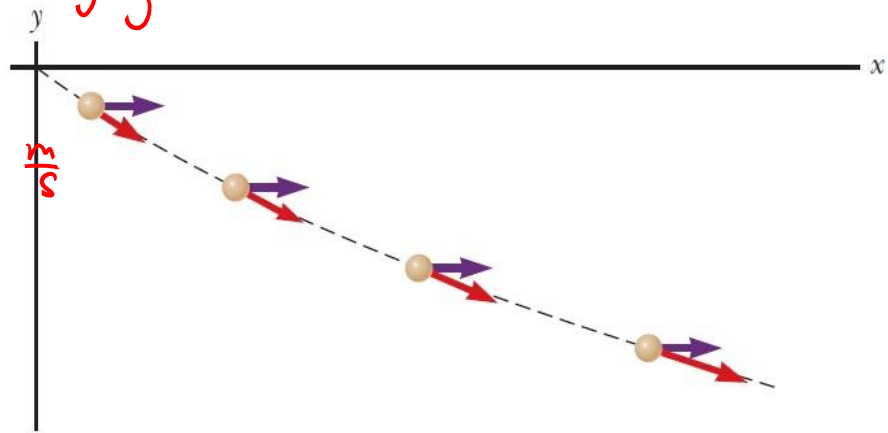
Για τον x -άξονα:

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \Leftrightarrow u_x = 20 + 4t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον y -άξονα:

$$u_y = u_{y_i} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα $\vec{u} = (20 + 4t) \vec{i} - 15 \vec{j}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα - Λύση:

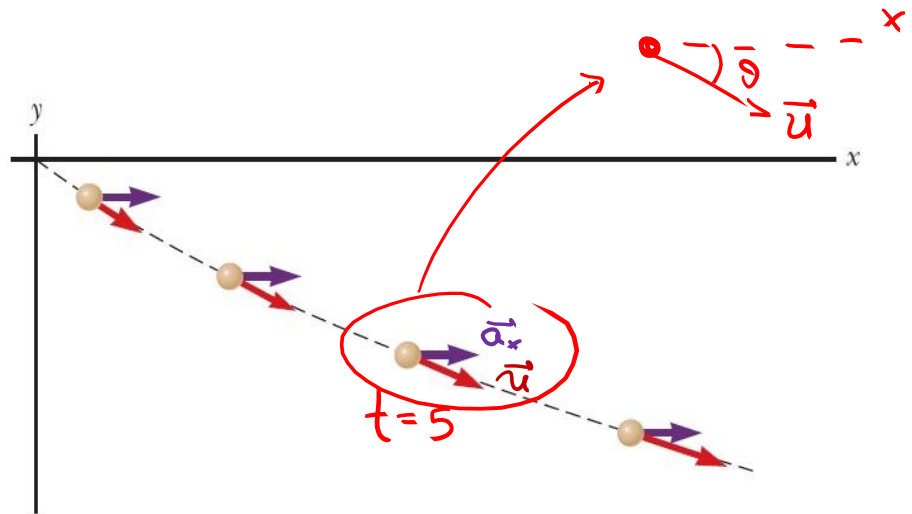
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
- Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Για $t = 5 \text{ sec}$, θα έχω

$$\begin{aligned}\vec{u}(5) &= (20 + 4 \cdot 5)\vec{i} - 15\vec{j} \\ &= 40\vec{i} - 15\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Μέτρο: } |\vec{u}(5)| &= \sqrt{40^2 + 15^2} \\ &\approx 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

$$\text{Γωνία: } \vartheta = \tan^{-1} \frac{-15}{40} \approx -21^\circ$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

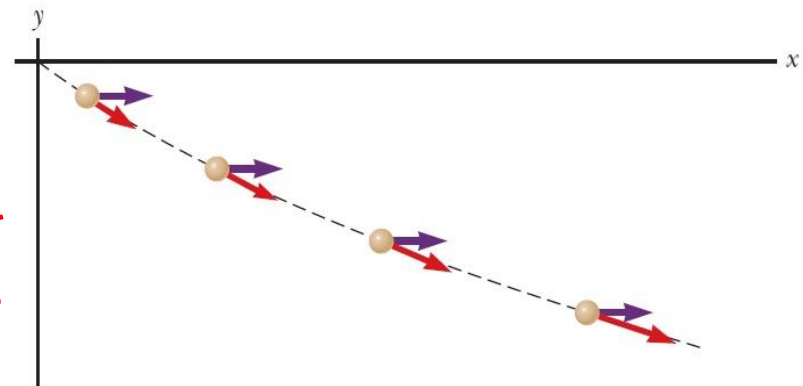
Ξέρουμε ότι $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ①

Μελέτη κατά άξονες.

x -άξονας: $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
 $= 0 + 20t + \frac{1}{2} \cdot 4t^2$
 $= 20t + 2t^2$ ②

y -άξονας: $y_f = y_i + u_{y_i}t = 0 - 15t = -15t$ ③

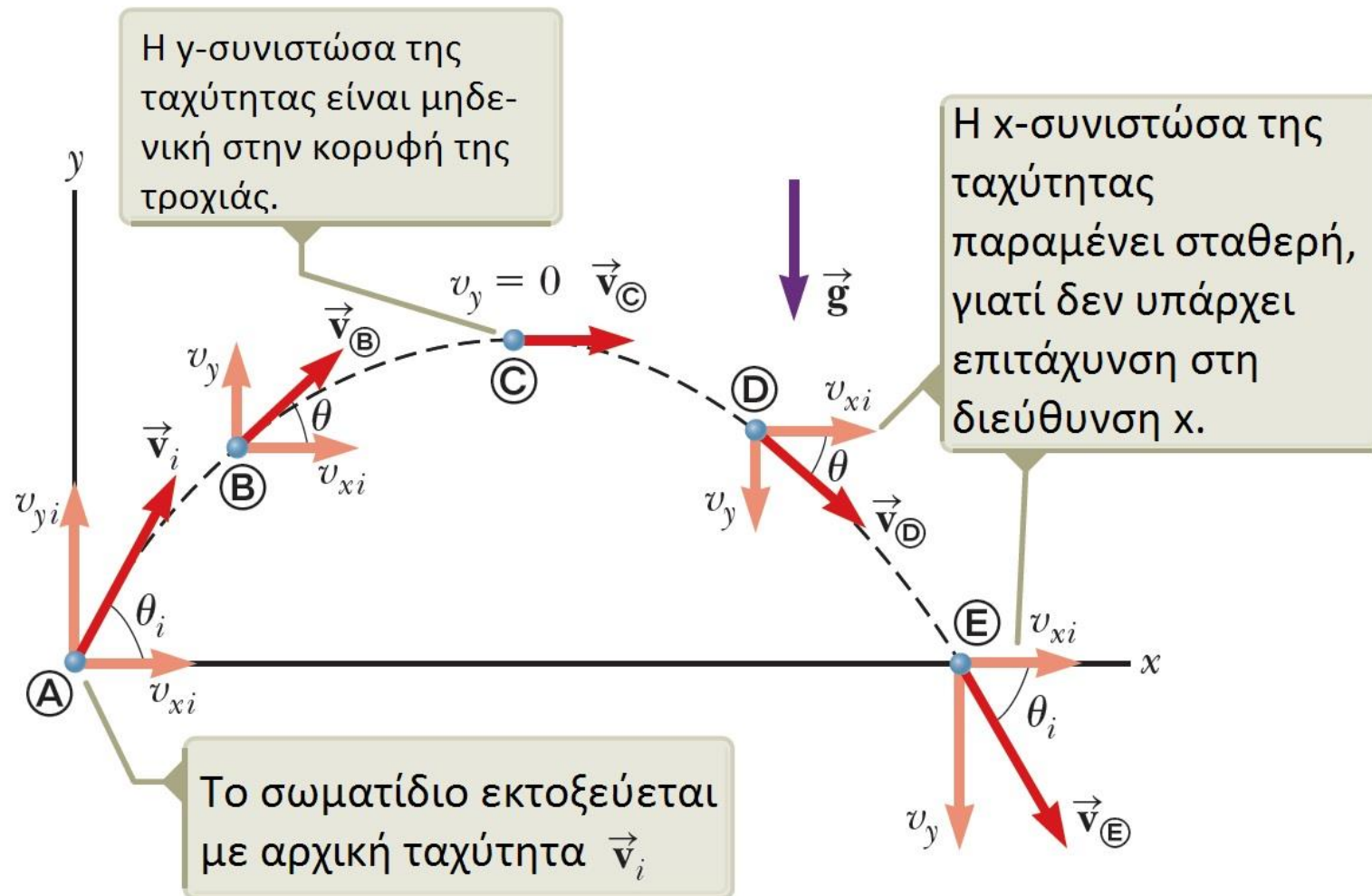
Άρα τελικά $\vec{r} = \overset{①}{(20t + 2t^2)}\vec{i} - 15t\vec{j}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή**.
- Το μόνο που αλλάζει είναι
 - A. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x .
 - B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις **βολής**

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 6 (3 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση

- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$

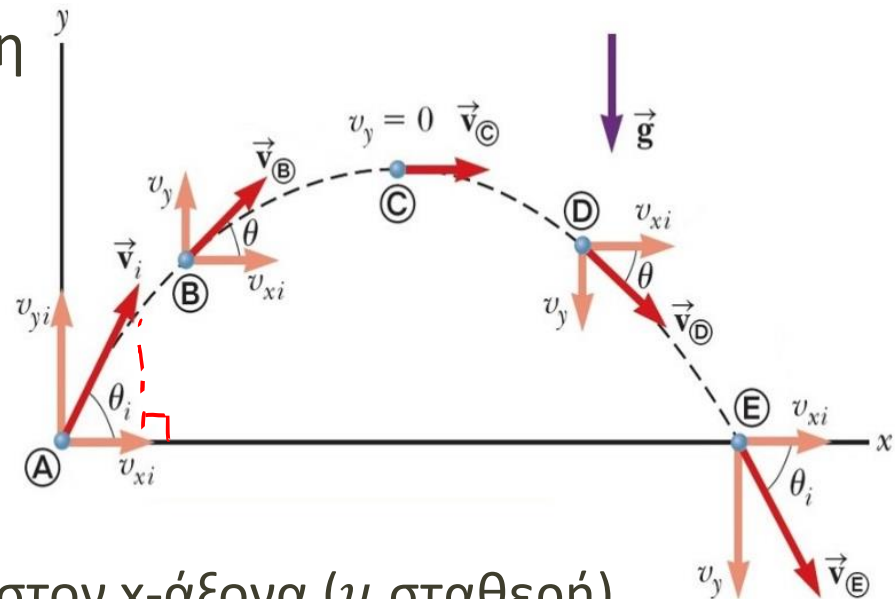
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:

- A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα (u σταθερή)

- B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα
(g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Αλγεβρικές εξισώσεις

- 1) $x_f = x_i + u_{xi}t$

- 2) $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

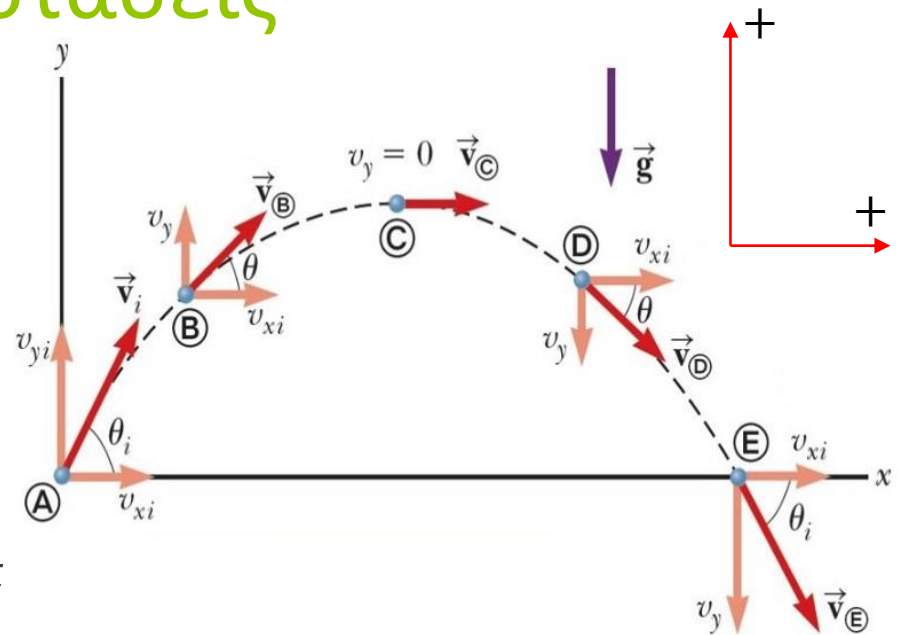
$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

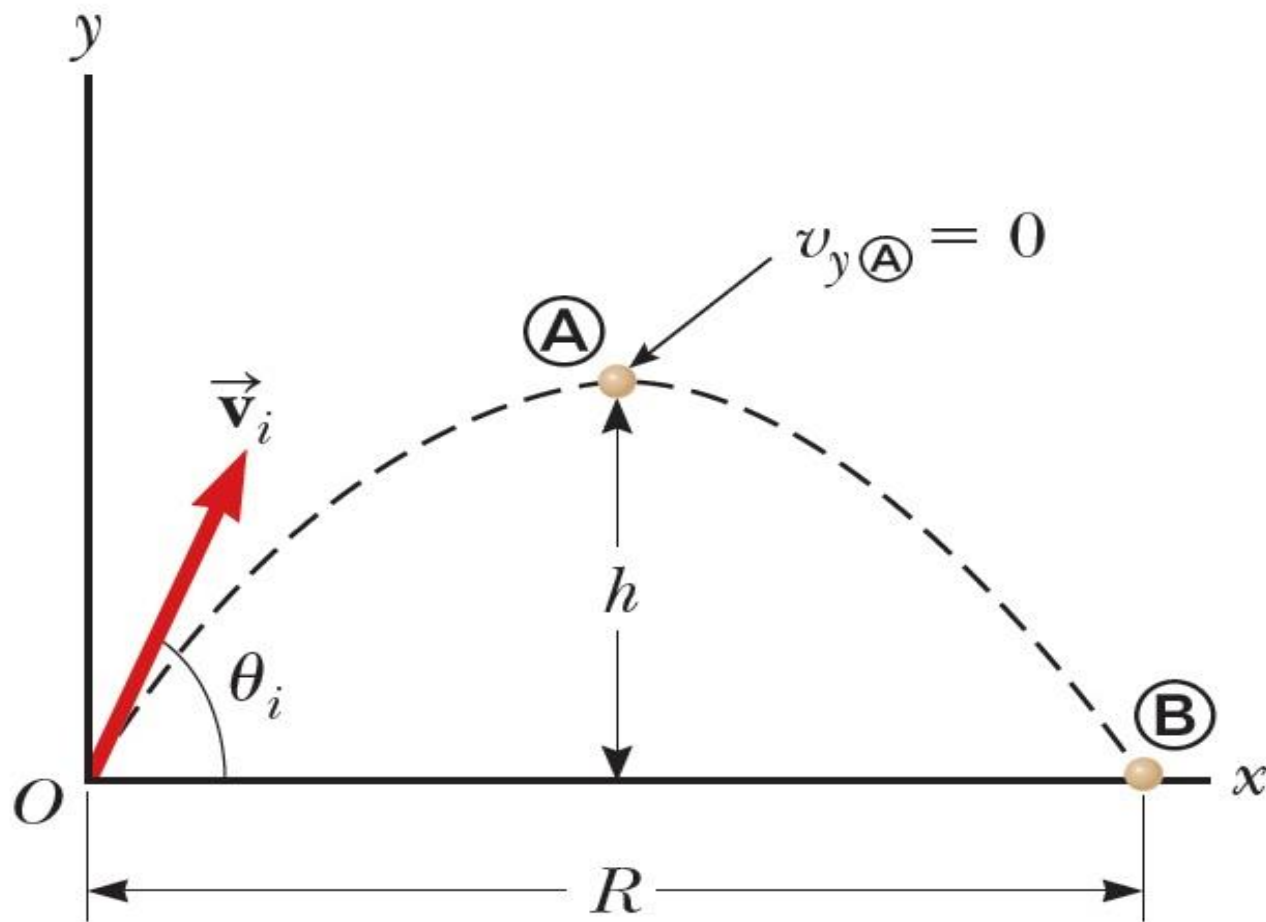
με $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Εύρος R και Μέγιστο Ύψος h βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h , R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

$$\begin{aligned} h &= y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Επίσης,

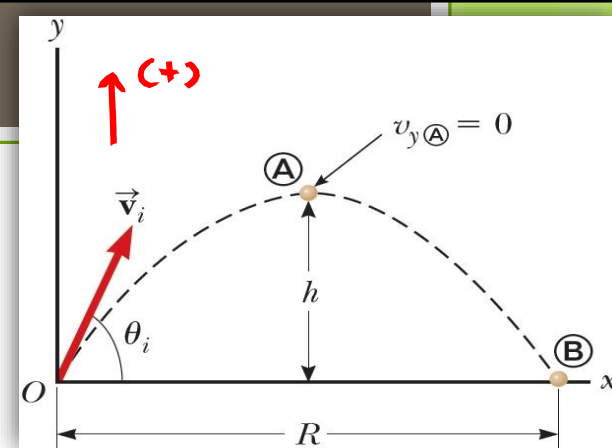
$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h , R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή OB:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos \theta_i t$

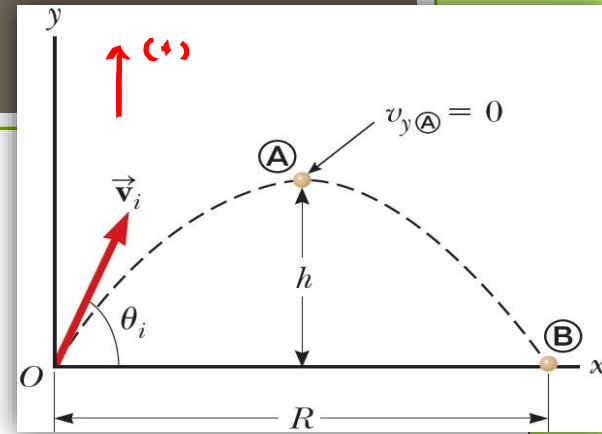
Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin \theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin \theta_i}{g}$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin \theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

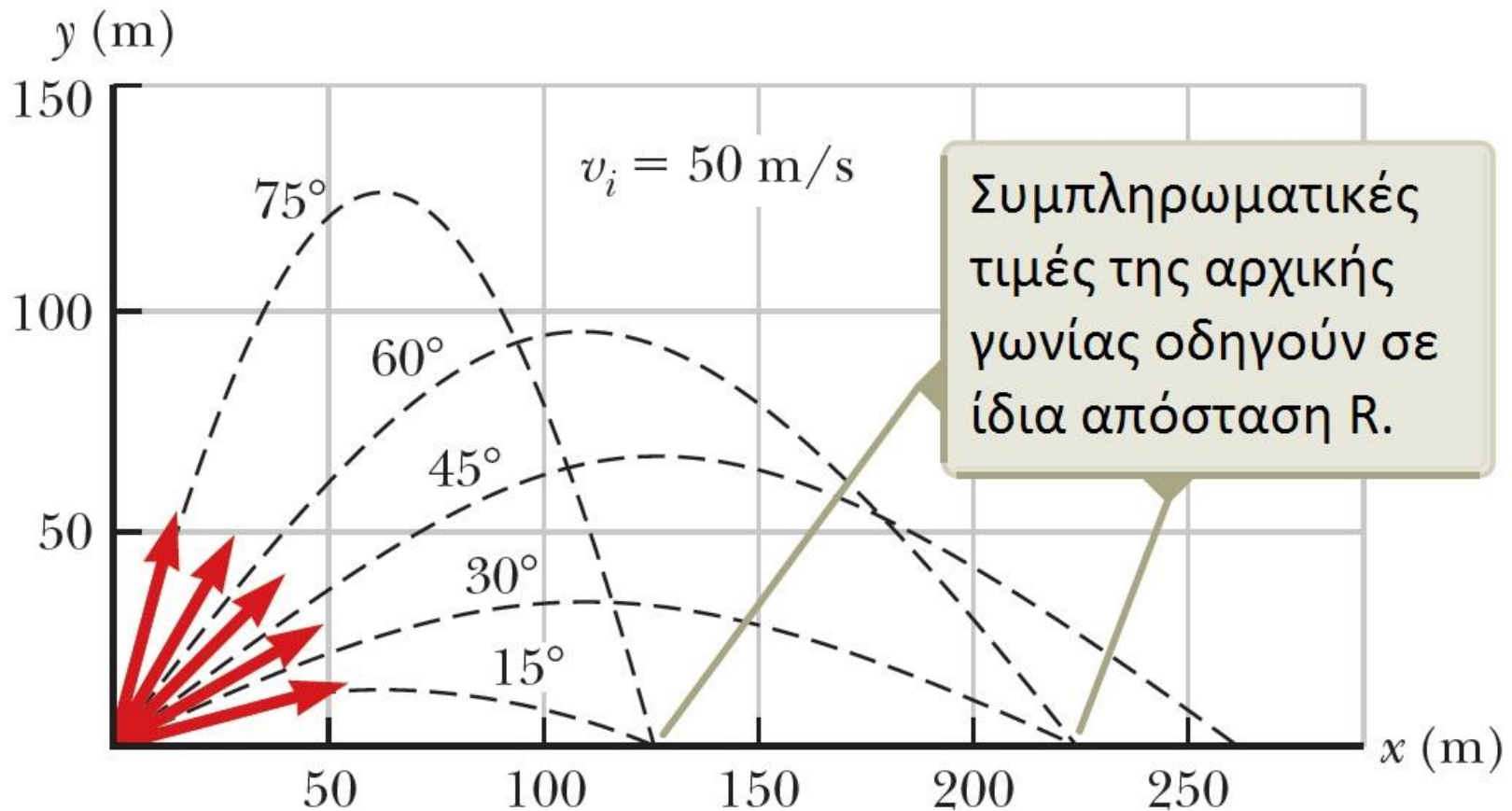
Έτσι

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$



$\sim \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40° με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.

A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

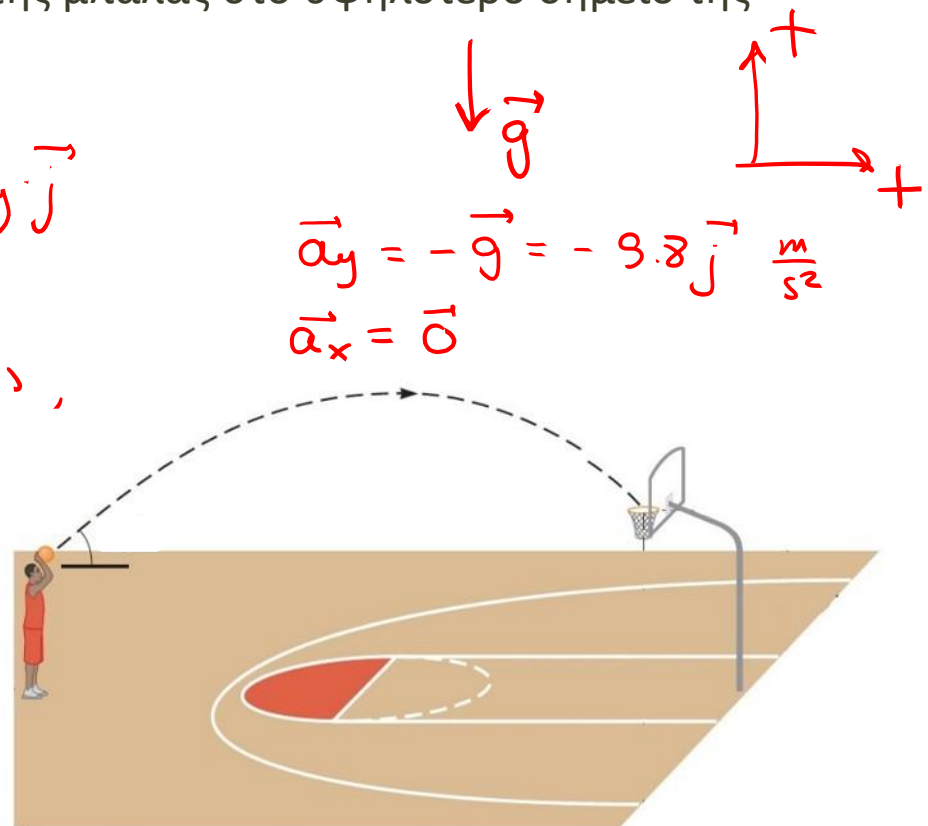
- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Η επιτάχυνση $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$
εξαρτάται μόνο από την
επιτάχυνση της βαρύτητας,
άρα

$$\vec{a} = -\vec{g} = -9.8 \vec{j} \frac{m}{s^2}$$

σε όλη την τροχιά της
μπάλας.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.

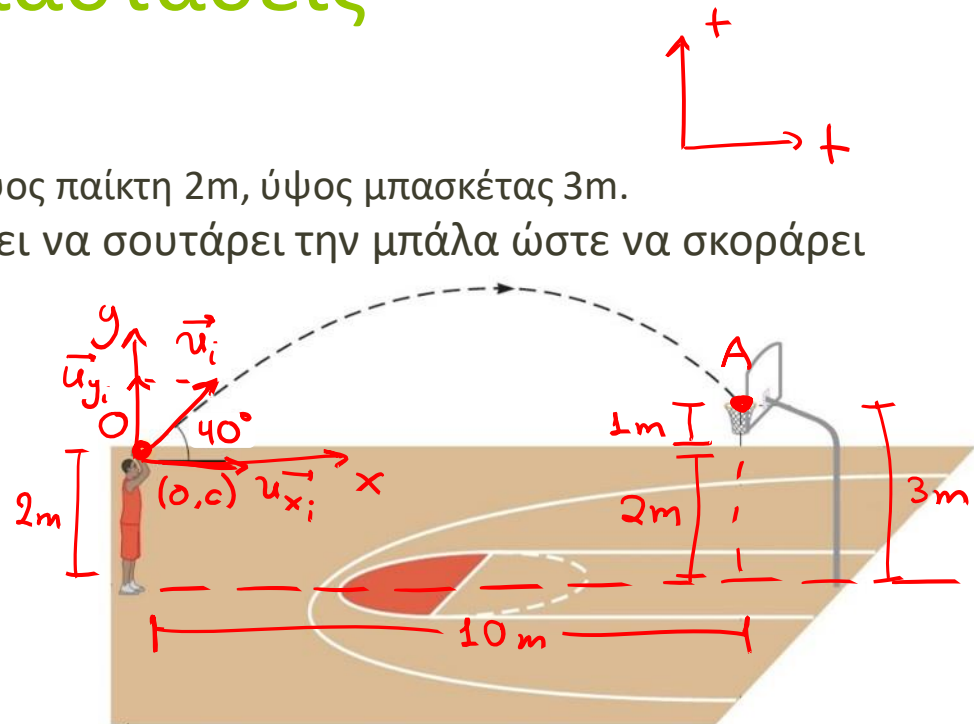
Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$



Θεωράμε σημείο $O(0,0)$
τα χέρια του παίκτη, δηλ.

όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια του έχου.ε:

$u_{x_i} = u_i \cdot \cos(\theta_i)$ | Στον άξονα x έχουμε σταθερή ταχύτητα
 $u_{y_i} = u_i \cdot \sin(\theta_i)$ | και στον y έχουμε σταθερή επιτάχυνση.

Στον x-άξονα: ΟΑ διαδρομή $\rightarrow x_A = x_0 + u_{x_i} \cdot t = x_0 + u_i \cos \theta_i \cdot t$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.

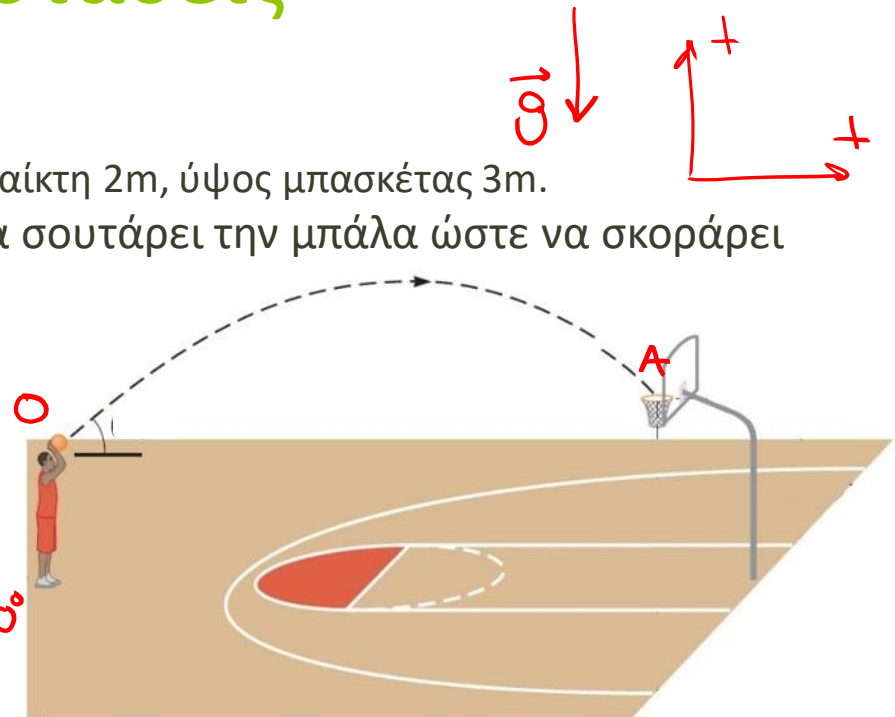
Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$



$$\text{Λύνοντας ως προς } t: t = \frac{x_A}{u_i \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{10}{u_i \cos 40^\circ} \quad (1)$$

$$\text{Στον } y\text{-άξονα: } y_A = y_0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow 1 = 0 + u_i \sin 40^\circ t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 1 = u_i \sin 40^\circ \cdot \frac{10}{u_i \cos 40^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(\frac{10}{u_i \cos 40^\circ} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 10 \cdot \tan 40^\circ - 4.9 \cdot \frac{100}{u_i^2 \cos^2 40^\circ} \Rightarrow \dots u_i \approx 10.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

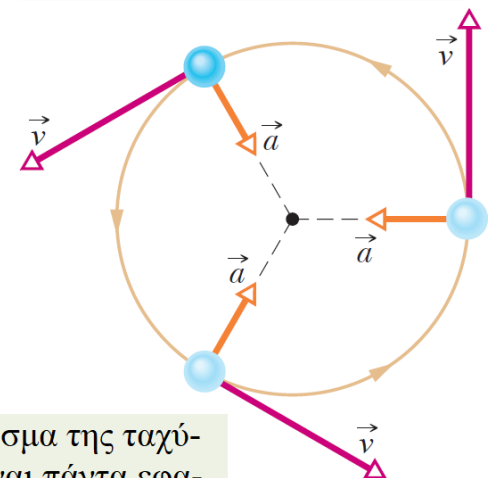
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα σε απόσταση r
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
 - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

- Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
 - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
 - Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

Ταχύτητα

- Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
- Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης

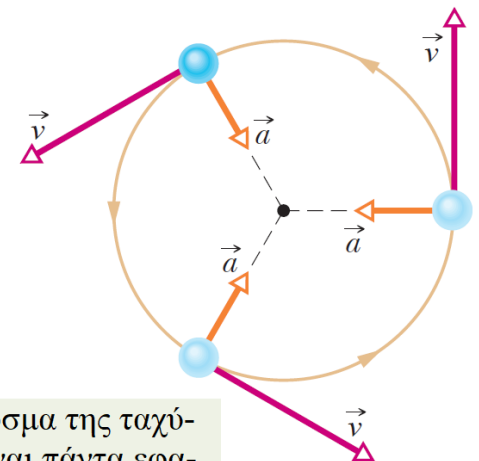
Επιτάχυνση

- Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

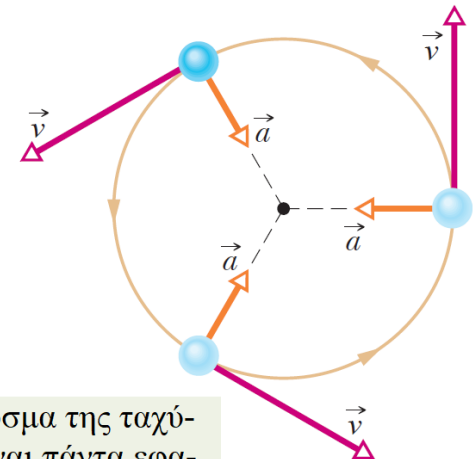
$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

- Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**

- Από την ίδια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
- Ο λόγος

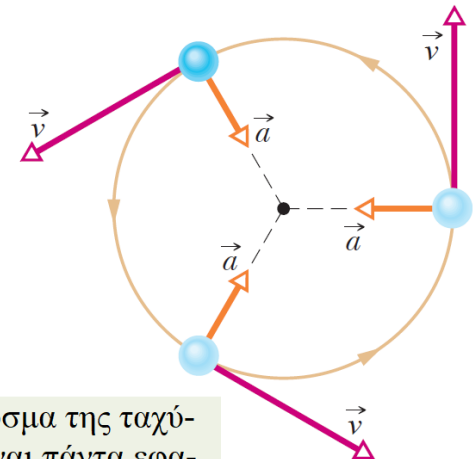
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

- Ισούνται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση
- Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad a = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.

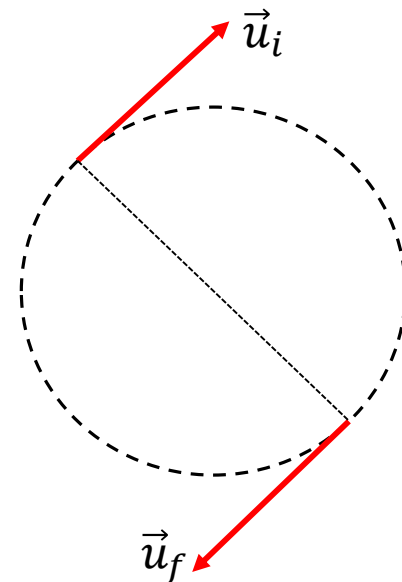
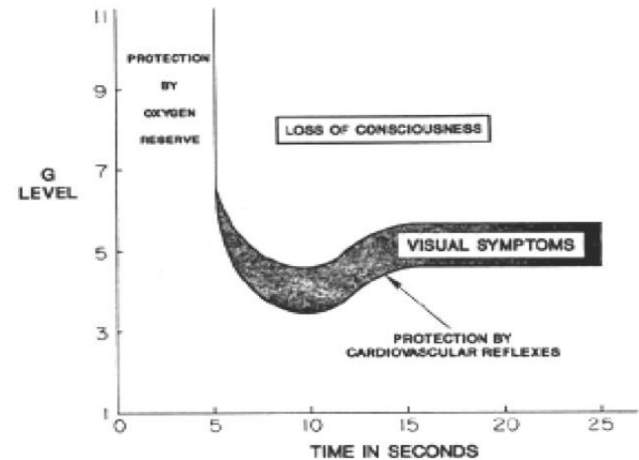


Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s ?



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s?

Ξέρουμε ότι $a = \frac{v^2}{r}$ αλλά δε γνωρίζουμε το r .

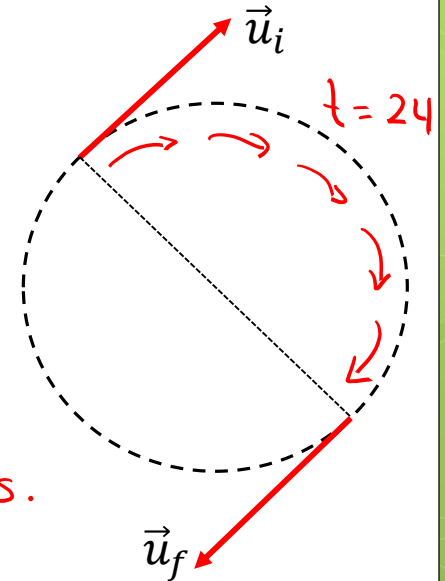
Όμως $u = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{uT}{2\pi}$ και άρα

$$a = \frac{2\pi u}{T}$$

Επίσης αναγνωρίζουμε ότι $\frac{T}{2} = 24 \text{ s} \Rightarrow T = 48 \text{ s}$.

$$\text{Τέλος, } |\vec{u}| = |\vec{u}_i| = |\vec{u}_f| = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } a = \frac{2\pi u}{T} \approx 83.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ που ισούται με } \approx 8.6g.$$





Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης



Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ως τώρα, μελετήσαμε κινήσεις σωματιδίων
 - Ορίσαμε θέση, μετατόπιση, ταχύτητες, επιταχύνσεις...
 - ...καθώς και **μοντέλα κίνησης** με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε πραγματικά φαινόμενα
 - Κίνηση υπό μηδενική ή μη-μηδενική, σταθερή, επιτάχυνση
 - Δεν μας ενδιέφερε η **αιτία** της κίνησης
- Καιρός να τη μελετήσουμε κι αυτή! 😊

Οι Νόμοι της Κίνησης

○ Ερωτήματα

- Γιατί μεταβάλλεται η κίνηση ενός αντικειμένου;
- Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
- Γιατί είναι πιο εύκολο να κινήσουμε ένα “μικρό” από ένα “μεγάλο” αντικείμενο;

○ «Κλειδιά» για τις απαντήσεις

- **Δύναμη (Force – F)** που ασκείται στο αντικείμενο
- **Μάζα (Mass – m)** του αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

○ Δύναμη

- Καθημερινή εμπειρία
 - Πέταγμα μπάλας
 - Σπρώξιμο ντουλάπας
 - Τράβηγμα συρταριού
- Αλληλεπίδραση με αντικείμενα μέσω μυικής δράσης, με αποτέλεσμα την αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης
- Δεν είναι όμως πάντα απαραίτητη η πρόκληση κίνησης
 - Βαριά μπάλα
 - Μεγάλη ντουλάπα
 - Κλειδωμένο συρτάρι

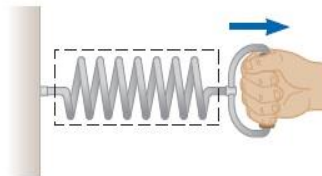
Οι Νόμοι της Κίνησης

- “Οι Δυνάμεις είναι αυτές που αλλάζουν την ταχύτητα ενός σώματος”

(I. Newton)

- Δυο κατηγορίες δυνάμεων
 - Δυνάμεις Επαφής
 - Δυνάμεις Πεδίου

Δυνάμεις Επαφής



a

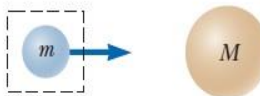


b

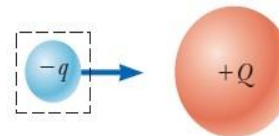


c

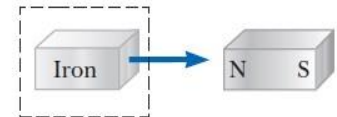
Δυνάμεις Πεδίου



d



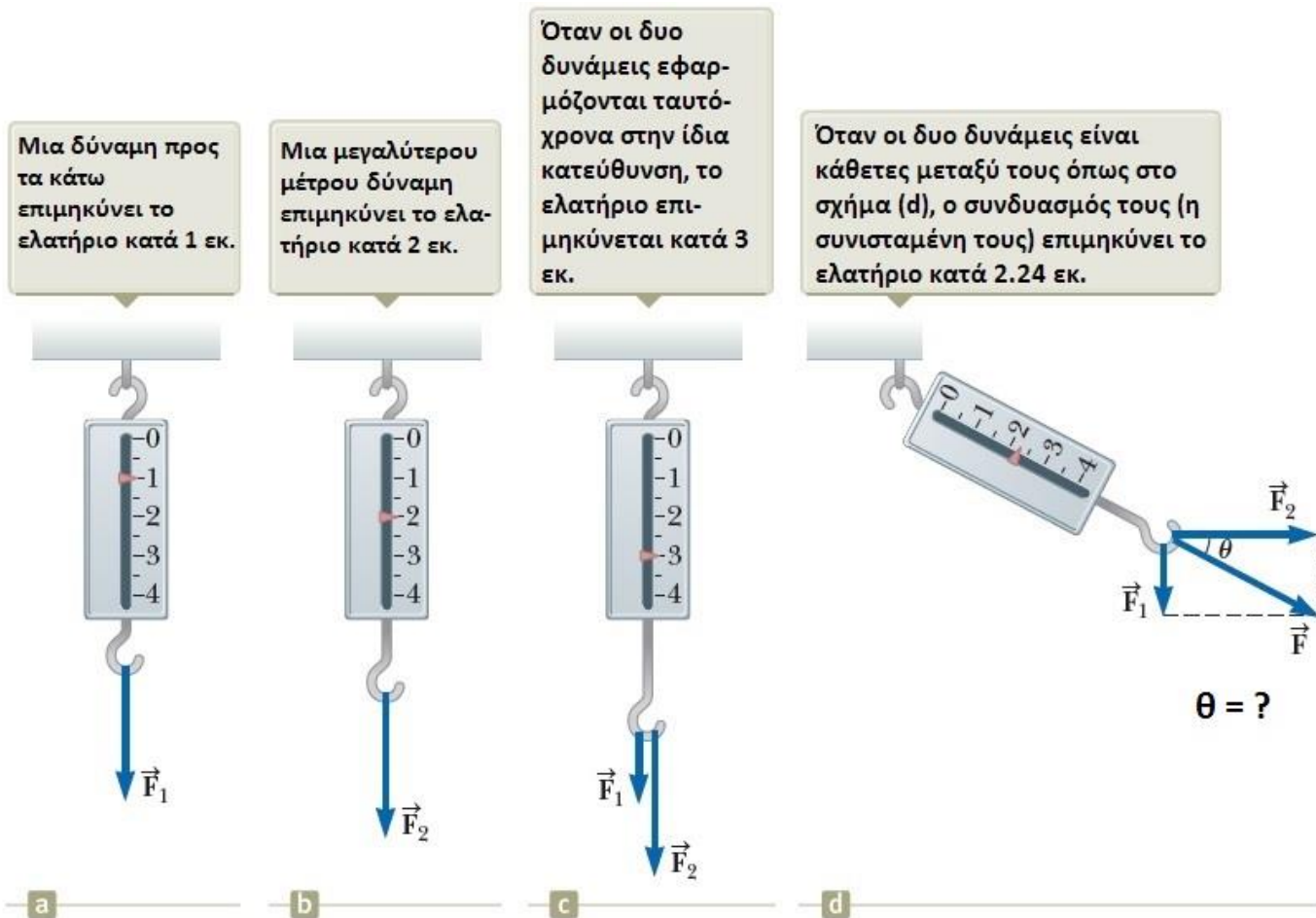
e



f

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Η διανυσματική φύση της Δύναμης



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Συστήματα αναφοράς**

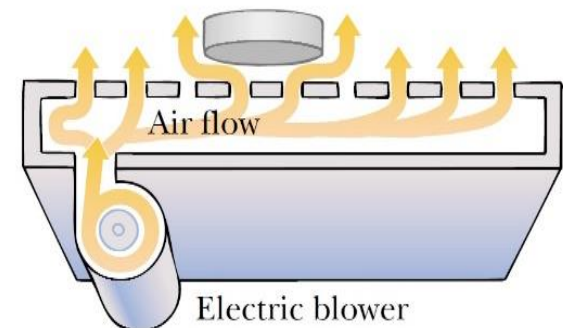
- **Σύστημα αναφοράς** ονομάζουμε το φυσικό αντικείμενο στο οποίο προσαρτούμε το σύστημα συντεταγμένων μας
 - Π.χ. το έδαφος, όταν μετράμε την ταχύτητα ενός σώματος
- Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα σώμα **δεν αλληλεπιδρά** με άλλα σώματα και έχει **μηδενική** επιτάχυνση λέγεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Συστήματα αναφοράς**

- Παράδειγμα

- Έστω μια αεροτράπεζα και ένας δίσκος
 - Η αεροτράπεζα προσομοιώνει επιφάνεια απουσία τριβών, δηλ. δεν ασκείται κάποια δύναμη στο δίσκο – αυτός μπορεί να κινηθεί ελεύθερα
 - Ας εξετάσουμε τα συστήματα αναφοράς ως προς την κίνηση ή ακινησία τους
 - Τοποθετούμε το δίσκο απαλά στην αεροτράπεζα κι αυτός μένει ακίνητος

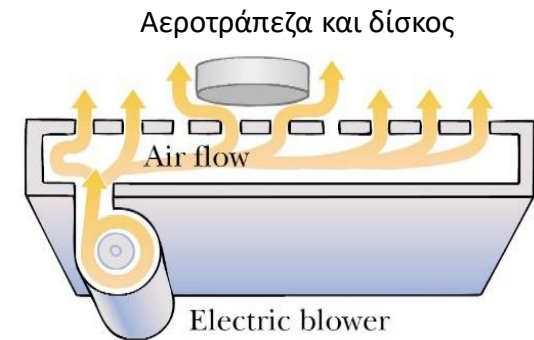


Αεροτράπεζα και δίσκος

Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Συστήματα Αναφοράς

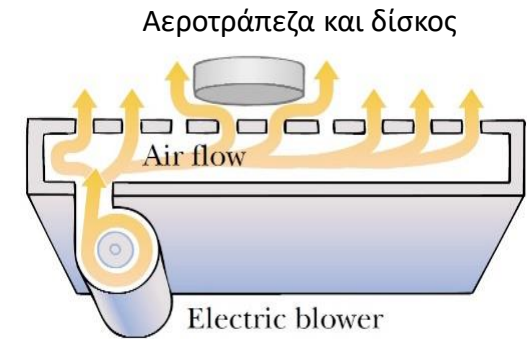
- ◉ 1) Αεροτράπεζα + δίσκος βρίσκονται στο έδαφος, το ίδιο και εμείς (παρατηρητές): αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - ◉ Γιατί? Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση με άλλα σώματα και η επιτάχυνση του δίσκου είναι μηδενική
- ◉ 2) Αεροτράπεζα + δίσκος σε ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, το ίδιο κι εμείς (ως επιβάτες στο τρένο): αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - ◉ Γιατί? Ίδιοι λόγοι με πριν!
- ◉ Οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς που κινείται με **σταθερή ταχύτητα** σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι κι αυτό αδρανειακό



Οι Νόμοι της Κίνησης

● Συστήματα Αναφοράς

- 3) Αεροτράπεζα + δίσκος σε τρένο υπό επιτάχυνση, το ίδιο κι εμείς (ως επιβάτες στο τρένο): μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - Γιατί? Το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης
 - Ένας παρατηρητής στο έδαφος θα σας πει ότι – παρ' όλο που για σας μέσα στο τρένο ο δίσκος φαίνεται να επιταχύνει – βλέπει το δίσκο να ολισθαίνει ως προς το τραπέζι αλλά να κινείται πάντα με την ίδια ταχύτητα ως προς το έδαφος
 - Έτσι, παρ' ότι εμείς – ως επιβάτες – παρατηρούμε μια φαινομενική επιτάχυνση του δίσκου ως προς εμάς (και άρα βρισκόμαστε σε μη αδρανειακό σύστημα), μπορούμε να βρούμε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα για να περιγράψουμε τα φαινόμενα



Οι Νόμοι της Κίνησης

● Πρώτος Νόμος του Newton

- Πάντα μπορούμε να βρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - ...και στη συνέχεια θα θεωρούμε κάθε σύστημα αναφοράς ως αδρανειακό, κι εκεί θα ισχύουν οι νόμοι που θα περιγράψουμε

● Απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς

- ένα σώμα σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία
- ένα σώμα υπό σταθερή ταχύτητα παραμένει υπό σταθερή ταχύτητα

● Με άλλα λόγια

- Όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα σώμα, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική

- Η τάση ενός σώματος να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης λέγεται **αδράνεια**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πρώτος Νόμος του Newton**

- Όμως η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος
- Μπορούν να ασκούνται δυνάμεις επάνω σε ένα σώμα αλλά η συνολική δύναμη (ή **συνισταμένη**) να είναι μηδέν!

- Άρα μια πιο σωστή διατύπωση του 1^{ου} νόμου του Newton θα είναι:

- Αν η συνισταμένη (το διανυσματικό άθροισμα) των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδενική, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική

- Λέμε τότε ότι το σώμα **ισορροπεί**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Από τα προηγούμενα, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:
- Ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια (συνισταμένη) δύναμη
- Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Διαφορετικά σώματα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησής τους
 - Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησής τους
- Γιατί;
 - Γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**
- Η **μάζα** είναι μια ιδιότητα ενός σώματος που **ορίζει «πόση» αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητάς του**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ο 1^{ος} Νόμος του Newton μας εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν δεν ασκούνται δυνάμεις επάνω του
 - ...ή όταν οι δυνάμεις που ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν
- Ο 2^{ος} Νόμος του Newton (που θα δούμε αμέσως) μας εξηγεί τι συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται επάνω του
 - ...οι οποίες προφανώς ΔΕΝ έχουν μηδενική συνισταμένη

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Δεύτερος Νόμος του Newton

- Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση ενός σώματος είναι
 1. ευθέως ανάλογη στη συνολική δύναμη, $\sum \vec{F}$, που ασκείται επάνω του και
 2. αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του, m

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

- και έτσι έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Φυσικά, μπορούμε – και σε πολλές περιπτώσεις **επιβάλλεται** – να αναλύσουμε το 2^ο νόμο σε συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες του συστήματος αναφοράς μας

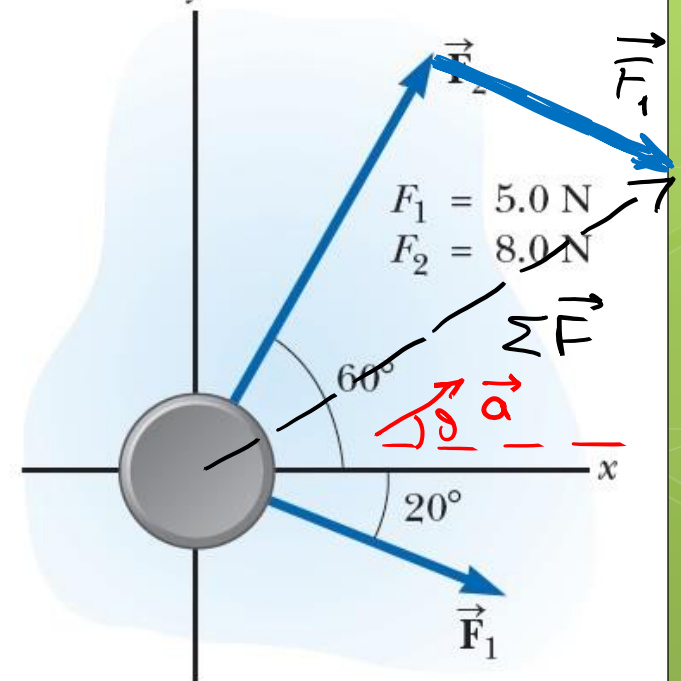
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x, \quad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \quad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

- Μπορούμε να μετατρέψουμε τις παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις σε αλγεβρικές λαμβάνοντας υπ' όψη τη θετική φορά του εκάστοτε άξονα
 -όπως θα δείξουμε στο επόμενο παράδειγμα
- Μονάδα μέτρησης στο S.I.
 - Newton (N) $\Leftrightarrow 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα:

- Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τη χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

- Δίσκος μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

Αναλύουμε σε άξονες τις δυο δυνάμεις, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Δουλεύουμε ξεχωριστά στα άξονες.

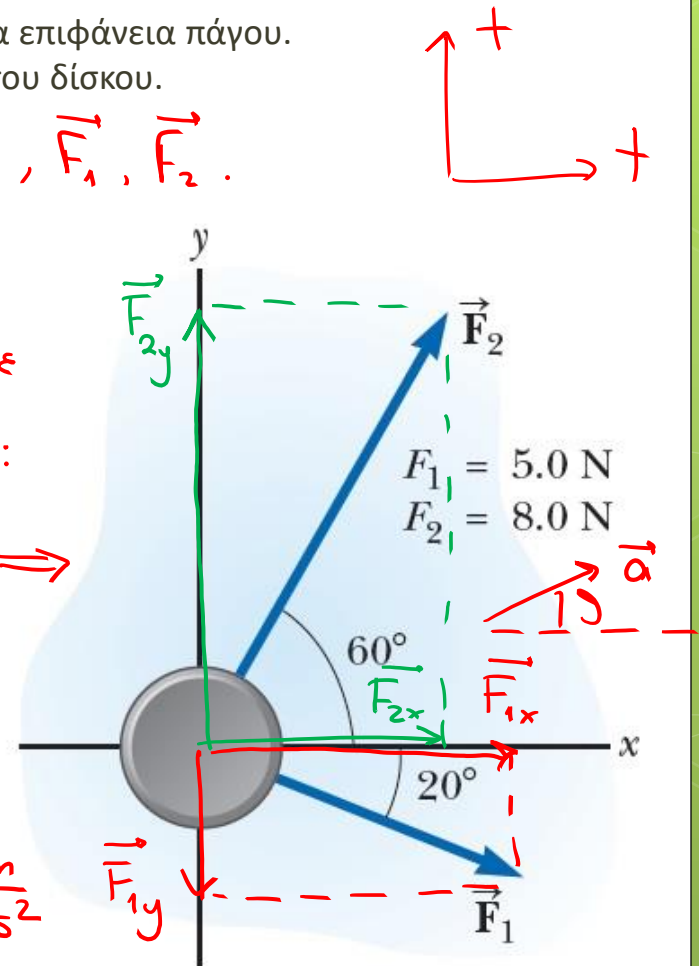
- x-άξονας: το σώμα επιταχύνεται με επιτάχυνση $\vec{a}_x$. Ισχύει ο 2ος Νόμος:

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m \vec{a}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{1x} + F_{2x} = m a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ = m a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{5 \cos 20^\circ + 8 \cos 60^\circ}{0.3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

- Δίσκος μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

y-άξονας: το σώμα επιταχύνεται, άρα ισχύει ο 2ος Νόμος:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{2y} - F_{1y} = ma_y \Rightarrow$$

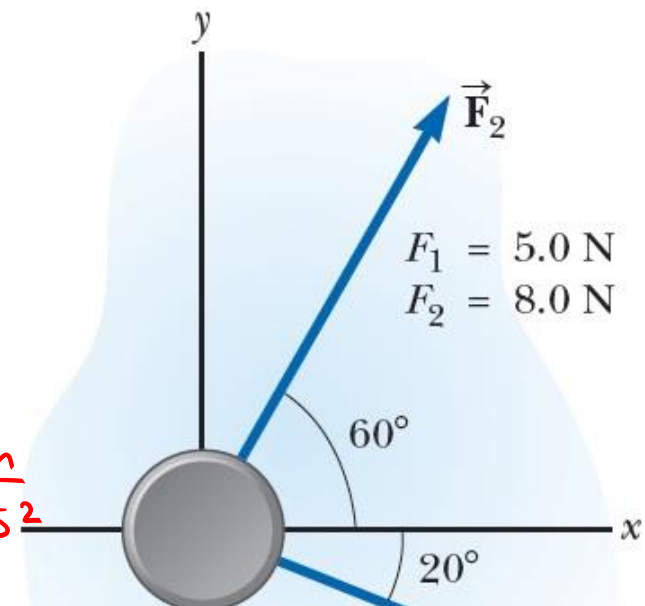
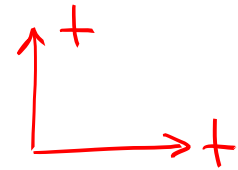
$$\Rightarrow F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 20^\circ = ma_y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin 60^\circ - 5 \sin 20^\circ = 0.3 a_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{8 \sin 60^\circ - 5 \sin 20^\circ}{0.3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Άρα } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = 29 \vec{i} + 17 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Οπότε } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{29^2 + 17^2} \approx 33.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{17}{29} \approx 30^\circ$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Όλα τα σώματα έλκονται από τη Γη
 - Με άλλα λόγια, η Γη ασκεί δύναμη επάνω τους
 - Άρα, τα επιταχύνει!
 -
- Βαρυτική επιτάχυνση $\vec{g}$
- 2^{ος} Νόμος του Newton για αντικείμενο που πέφτει ελεύθερα (απουσία αντιστάσεων του αέρα)

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} \leftrightarrow \vec{F}_g = m\vec{g}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

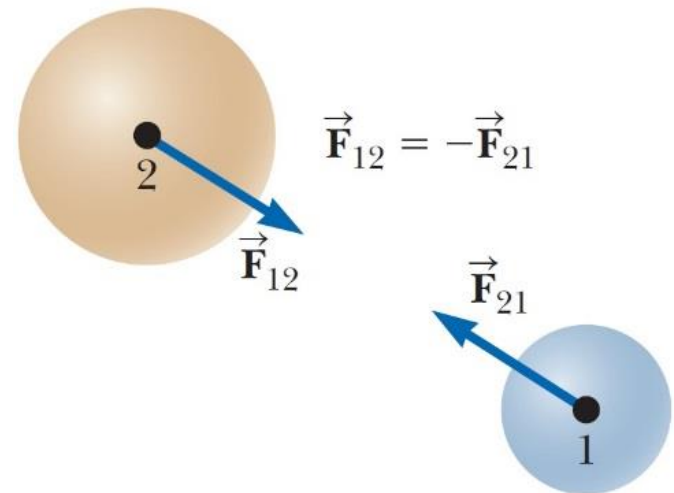
● Τρίτος Νόμος του Newton

● Σε κάθε δράση, υπάρχει μια αντίδραση!

● Πιο τυπικά... ☺

● Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

• Τρεις Νόμοι του Newton

1. Ένα σώμα που υπόκειται σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων, ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνεται)

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

2. Ένα σώμα που υπόκειται σε μη μηδενική συνισταμένη δυνάμεων, επιταχύνεται

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

3. Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ανάλυση** με βάση τους Τρεις Νόμους
- Δυο **νέα** μοντέλα
 - Α) Όταν τα σώματα βρίσκονται σε **ισορροπία** ($\vec{a} = 0$)
 - Β) Όταν σώματα **επιταχύνουν** υπό την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων ($\vec{a} \neq 0$)

Θυμηθείτε τα μοντέλα της Κινητικής!!

Α. Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα

Β. Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**

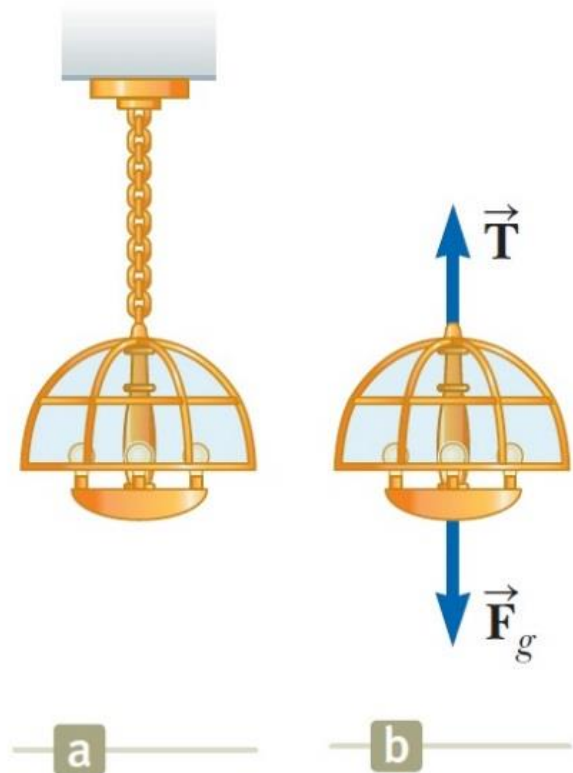
$$(\vec{a} = 0)$$

- η συνισταμένη των δυνάμεων

$$\sum \vec{F} = 0 !$$

- Παράδειγμα

- Ο πολυέλαιος κρέμεται σταθερά από το ταβάνι. Ποιες δυνάμεις ασκούνται επάνω του?

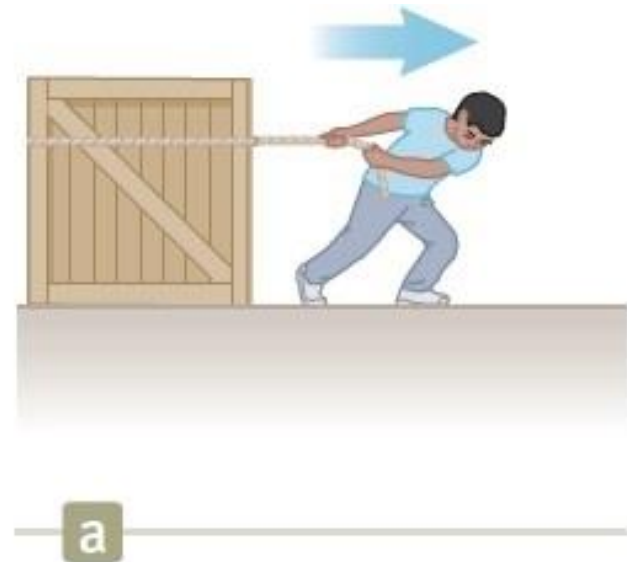


Οι Νόμοι της Κίνησης

- Β) Όταν τα σώματα επιταχύνουν υπό την επίδραση δύναμης ($\vec{a} \neq \mathbf{0}$)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Παράδειγμα
 - Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
 - Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

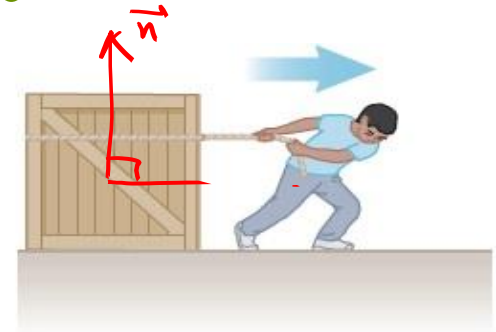


Οι Νόμοι της Κίνησης

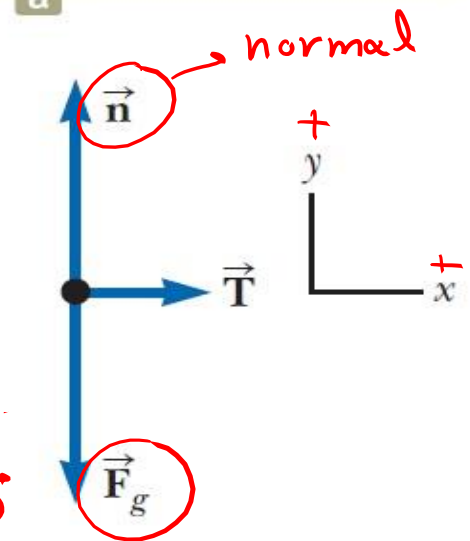
● Παράδειγμα

- Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
- Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

Διάγραμμα
ελεύθερου σώματος



a



b

- Το σώμα (κιβώτιο) επιταχύνεται ΜΟΝΟ στον x -άξονα. Ισχύει ο 2ος Νόμος:
$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{T} = m \vec{a}_x \Rightarrow T = m a_x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_x = \frac{T}{m}. \text{ Άρα } \vec{a}_x = \frac{T}{m} \vec{i}$$

- Το σώμα (κιβώτιο) ισορροπεί στον άξονα y . Ισχύει ο 1ος Νόμος: $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0}$
$$\Rightarrow n - F_g = 0 \Rightarrow n = F_g = mg.$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Τέσσερα μοντέλα ανάλυσης της κίνησης

Κίνηση υπό
σταθερή
ταχύτητα

$$x_f = x_i + u_x t$$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + u_{x,avg} t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Σώμα σε
ισορροπία

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

Σώμα σε
επιτάχυνση

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Σώμα σε
ακίνησία

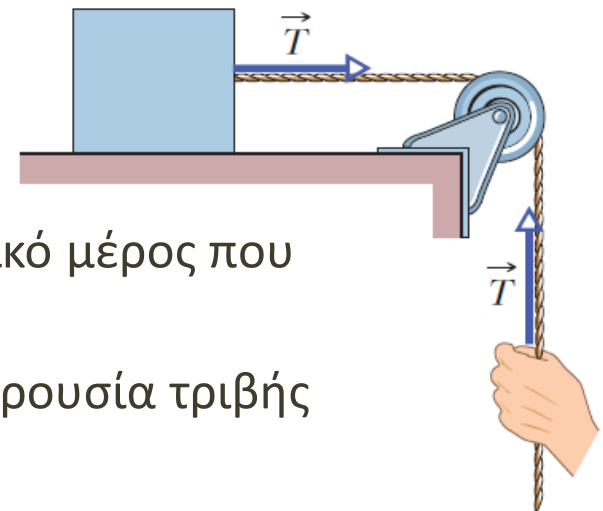
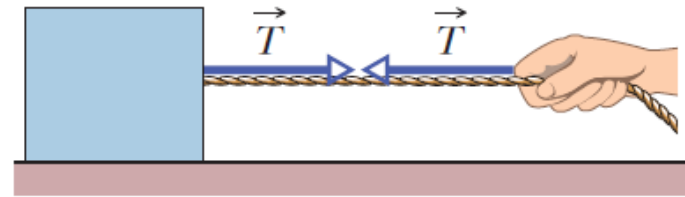
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο σημεία** που πρέπει να προσέξετε
- 1) Είναι δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις (άξονες)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Ισορροπία στον άξονα y
 - Επιτάχυνση στον άξονα x
- 2) Είναι δυνατόν να έχετε πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης στην ίδια κατεύθυνση (άξονα)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Σώμα υπό επίδραση δύναμης στον άξονα x
 - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Τάση νήματος και τροχαλίες

- Έστω ένα **τεντωμένο νήμα** (ή καλώδιο ή σχοινί ή άλλο παρόμοιο) που δένεται σε ένα σώμα
- Αν τραβήξουμε το σώμα μέσω του νήματος, το νήμα τραβά το σώμα (και το χέρι) με δύναμη $\vec{T}$ με κατεύθυνση μακριά από (προς) το σώμα και κατά μήκος του νήματος
- Η δύναμη συχνά ονομάζεται **τάση νήματος**
- Συχνά το νήμα θεωρείται αβαρές και ανελαστικό (χωρίς βάρος και χωρίς ικανότητα «τεντώματος» ή «συμπίεσης»)
- Μια **τροχαλία** αποτελείται από ένα κυλινδρικό μέρος που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα
- Θεωρούνται και αυτές αβαρείς και χωρίς παρουσία τριβής κατά την κύλισή τους

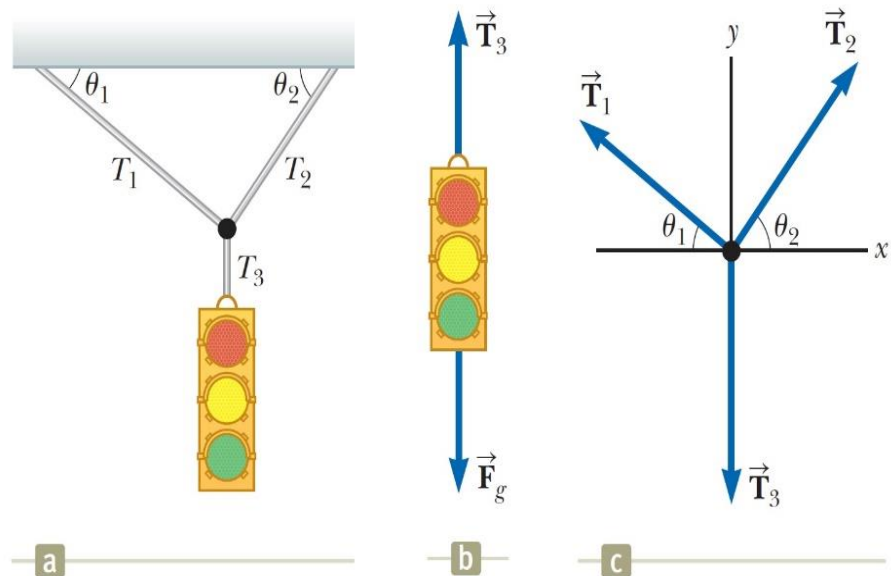


Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα

Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δυο καλώδια, όπως στο Σχήμα.

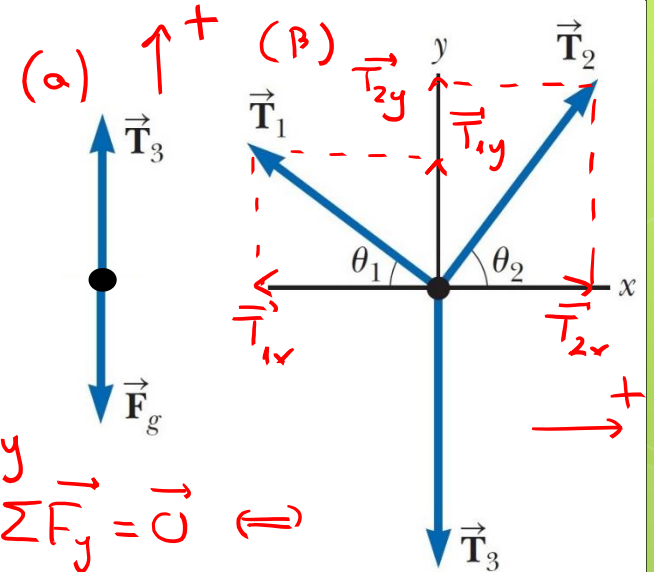
Οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι ίσες με 37 και 53 μοίρες, αντίστοιχα. Τα πάνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν δύναμη μεγαλύτερη από 100 N. Μπορεί να συμβεί αυτό;



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

Δίνονται: $\cos(37) = 0.8, \sin(37) = 0.6$
 $\cos(53) = 0.6, \sin(53) = 0.8$



Στο σχήμα (α) το φανάρι στεν ἄξονα γγ
 ισορροπεί. Ισχύει ο 1ος Νόμος Newton: $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{T}_3 + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow T_3 - F_g = 0 \Leftrightarrow T_3 = F_g = mg = 122 \text{ N} \text{ (1)}$$

Στο σχήμα (β), το φανάρι ισορροπεί στεν ἄξονα γγ. Ισχύει
 ο 1ος Νόμος Newton:

• y-ἄξονας: $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_{2y} + \vec{T}_{1y} + \vec{T}_3 = \vec{0} \Rightarrow$

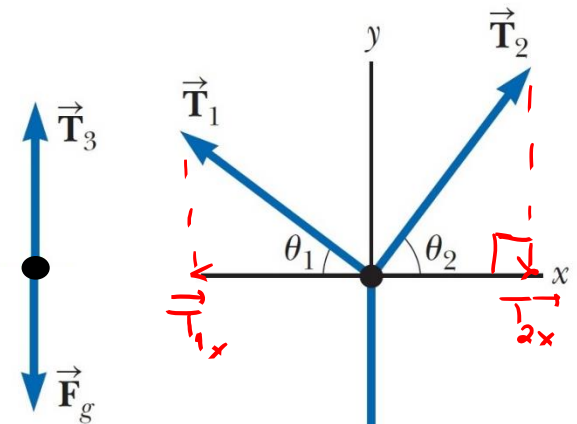
$$\Rightarrow T_{2y} + T_{1y} - T_3 = 0 \Leftrightarrow T_2 \sin \theta_2 + T_1 \sin \theta_1 = T_3 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 122 \text{ N} \text{ (2)}$$

• x-ἄξονας: $\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \Rightarrow T_{2x} - T_{1x} = 0$

Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

Δίνονται: $\cos(37) = 0.8$, $\sin(37) = 0.6$
 $\cos(53) = 0.6$, $\sin(53) = 0.8$



$$\Leftrightarrow T_{2x} = T_{1x} \Leftrightarrow T_2 \cos \theta_2 = T_1 \cos \theta_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_2 = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} T_1 = \frac{\cos 37^\circ}{\cos 53^\circ} T_1 = \frac{0.8}{0.6} T_1 = \frac{4}{3} T_1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{4}{3} T_1 \quad (3)$$

$$\text{Η (2) } \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{4}{3} T_1 \sin 53^\circ + T_1 \sin 37^\circ = 122 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} T_1 \cdot 0.8 + T_1 \cdot 0.6 = 122 \Leftrightarrow T_1 = 73.2 \text{ N} < 100 \text{ N}$$

$$\text{Επίσης, } T_2 = \frac{4}{3} T_1 = \frac{4}{3} \cdot 73.2 = 97.6 \text{ N} < 100 \text{ N}$$

Άρα τα καλώδια δεν θα σπάσουν.

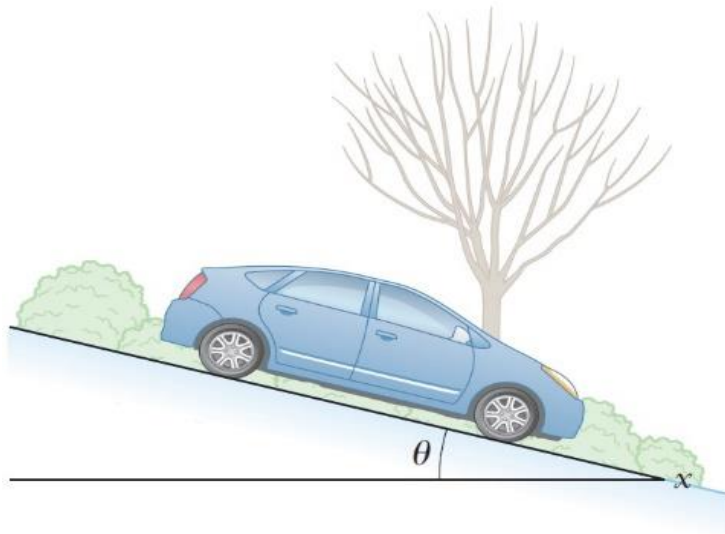
Οι Νόμοι της Κίνησης

◉ Παράδειγμα:

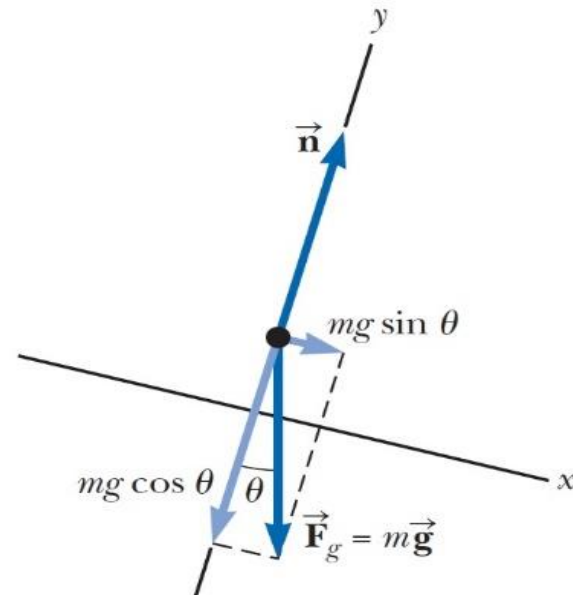
Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

A) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

B) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



a



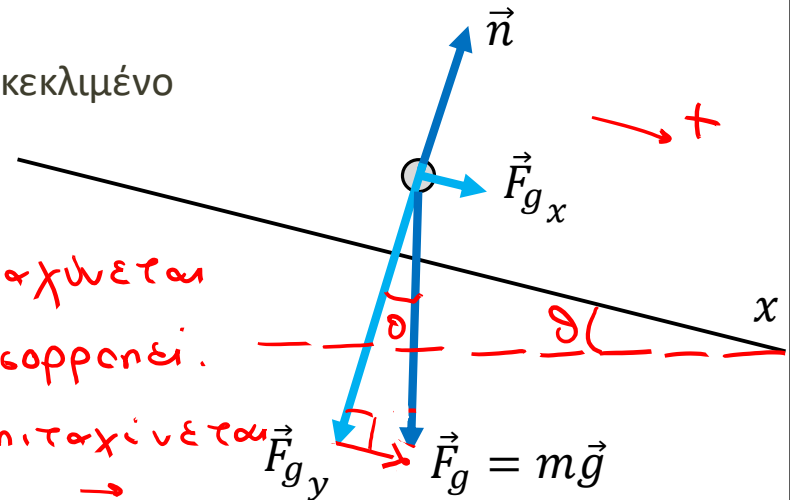
b

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Παράδειγμα – Λύση:

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.



Το σώμα μάζας m κινείται και επιταχύνεται μόνο στον x . Στον άξονα y γ'γ ισορροπεί.

Άρα $\vec{a}_y = \vec{0}$ Στον άξονα x επιταχύνεται άρα ισχύει ο 2ος Νόμος Newton: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{gx} = m\vec{a}_x \Rightarrow F_{gx} = ma_x \Leftrightarrow F_g \sin\theta = ma_x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mg \sin\theta = ma_x \Leftrightarrow a_x = g \sin\theta$$

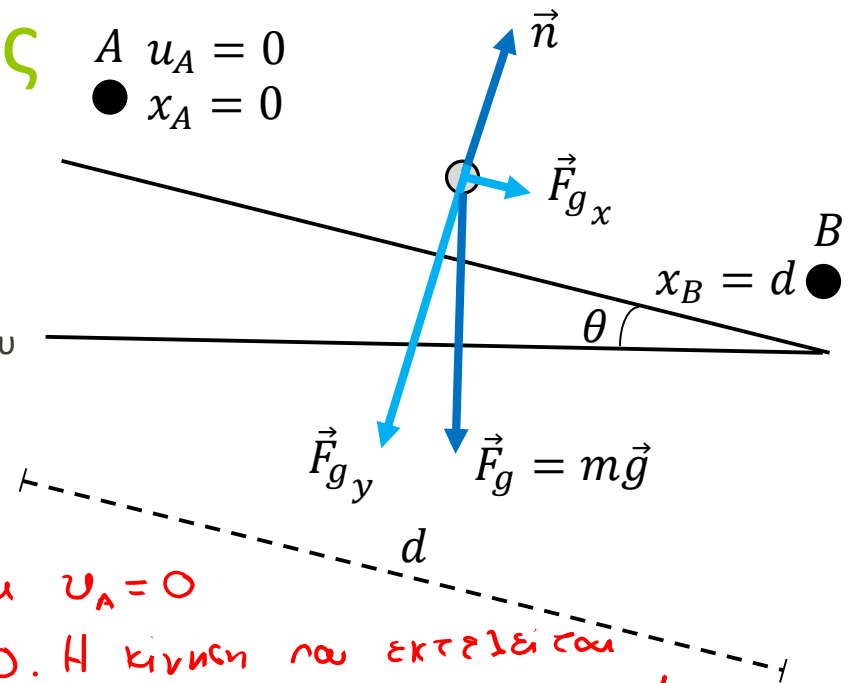
$$\text{Συνολικά, } \vec{a} = g \sin\theta \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = g \sin\theta \cdot \vec{i}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Παράδειγμα – Λύση:

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



Στην κορυφή του κεκλιμένου ισχύει $u_A = 0$
 και $x_A = 0$, ενώ στη βάση, $x_B = d$. Η κίνηση που εκτελείται
 είναι ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση, την οποία γνωρίζουμε,
 μόνο όταν άξονα x έχουμε. Από εξίσωση κινητικής έχουμε:

$$x_B = x_A + u_{Ax}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Leftrightarrow d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}g \sin \theta \cdot t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{2d}{g \sin \theta} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}. \text{ Επίσης, } u_{Bx} = u_{Ax} + a_x t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{Bx} = 0 + g \sin \theta \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}} = \sqrt{2gd \sin \theta}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

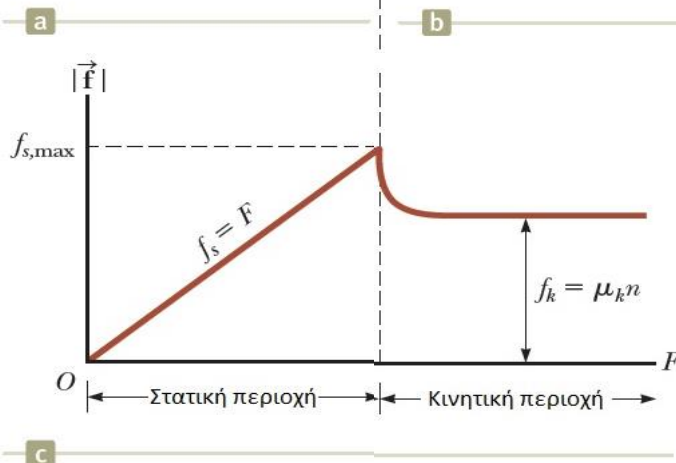
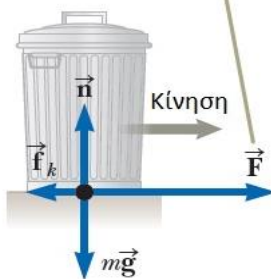
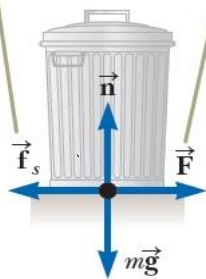
◉ Δυνάμεις Τριβής

- ◉ Ως τώρα, τις αγνοήσαμε
- ◉ Πολύ σημαντικές (είναι ο λόγος που περπατάμε, που τα αυτοκίνητα κινούνται, που μπορούμε να κρατήσουμε ένα μολύβι, που μπορούμε να δέσουμε τα κορδόνια μας κλπ)
- ◉ **Τριβή ονομάζουμε τη δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος που εφάπτεται σε επιφάνεια**
- ◉ Πολλά είδη τριβής
 - ◉ Στατική τριβή, τριβή ολίσθησης, τριβή ρευστών, κ.α.
- ◉ Στη Κίνηση Σωμάτων, μας ενδιαφέρουν κυρίως οι:
 - ◉ Στατική τριβή
 - ◉ Τριβή ολισθήσεως

Οι Νόμοι της Κίνησης

Για μια μικρή δύναμη που εφαρμόζεται στον κάδο, το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής ισούται με το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης.

Όταν το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης υπερβεί το μέτρο της μέγιστης δύναμης της στατικής τριβής, ο κάδος απελευθερώνεται και επιταχύνεται προς τα δεξιά.



● Στατική Τριβή

- Δύναμη $\vec{f}_s$ που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που την προκαλεί σε ένα ακίνητο αντικείμενο

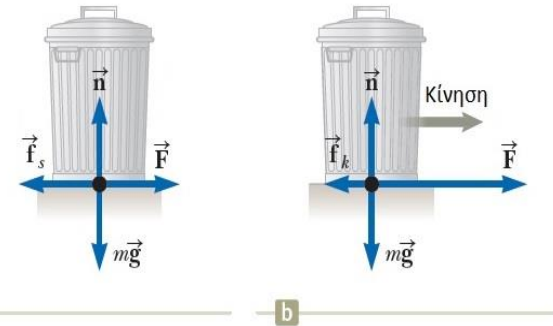
● Τριβή Ολίσθησης

- Δύναμη $\vec{f}_k$ που αντιστέκεται στην κίνηση για ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε κίνηση

Οι Νόμοι της Κίνησης

ο Παρατηρήσεις

- ο Το μέτρο της δύναμης της **στατικής** τριβής f_s ανάμεσα σε δυο επιφάνειες σε επαφή μπορεί να πάρει τιμές



$$f_s \leq \mu_s n \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s n$$

όπου η σταθερά μ_s λέγεται **συντελεστής στατικής τριβής**, και n είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται από την ακίνητη επιφάνεια στην κινούμενη επιφάνεια (από το έδαφος στον κάδο)

- ο Το μέτρο της δύναμης της τριβής **ολίσθησης** ανάμεσα σε δυο επιφάνειες ισούται με

$$f_k = \mu_k n$$

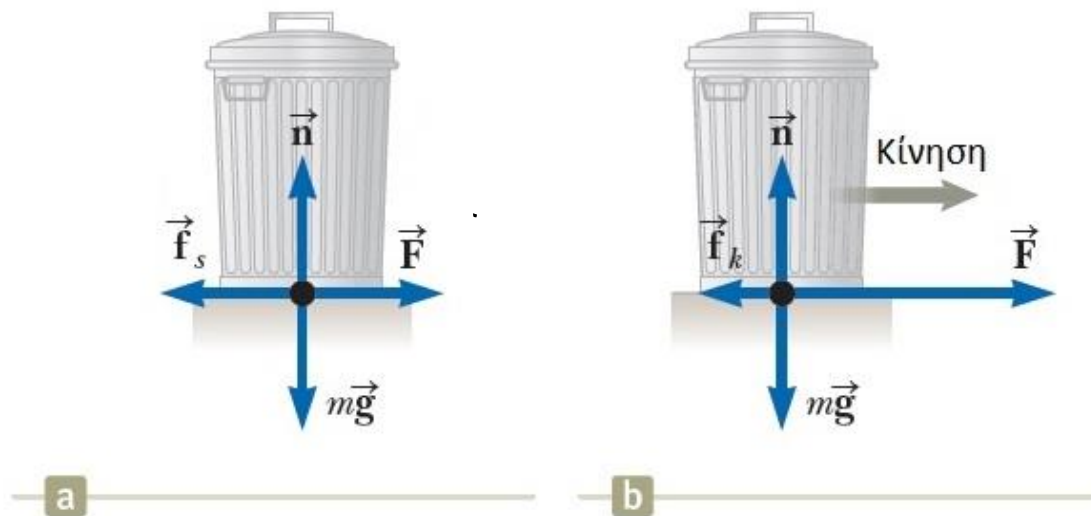
Οι εξισώσεις αυτές ΔΕΝ είναι διανυσματικές!!

όπου η σταθερά μ_k λέγεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

- ο Οι συντελεστές αυτοί θα θεωρούνται σταθεροί

Οι Νόμοι της Κίνησης

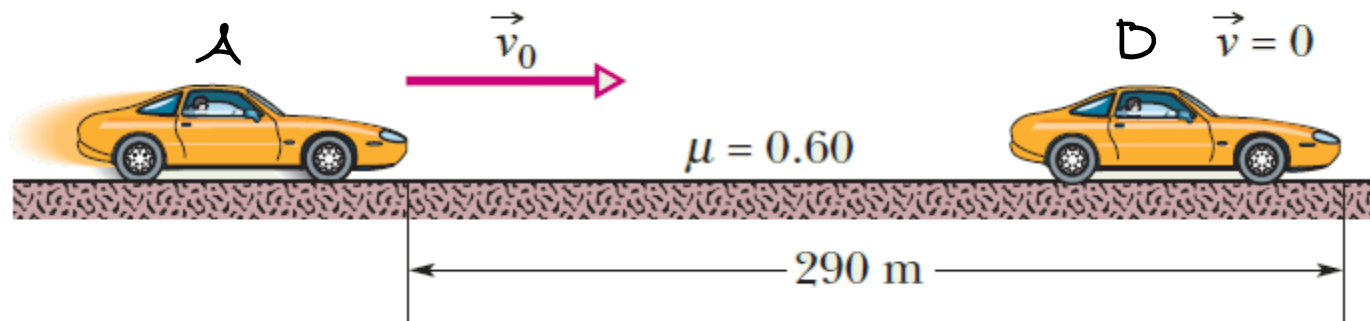
- Οι τιμές των συντελεστών εξαρτώνται από το είδος της επιφάνειας
- Η **διεύθυνση** της δύναμης τριβής είναι πάντα **παράλληλη με την επιφάνεια** στην οποία εφάπτεται το σώμα, και η **φορά** της πάντα **αντίθετη** στην κίνηση (ή στην προσπάθεια κίνησης) σε σχέση με την επιφάνεια



Οι Νόμοι της Κίνησης

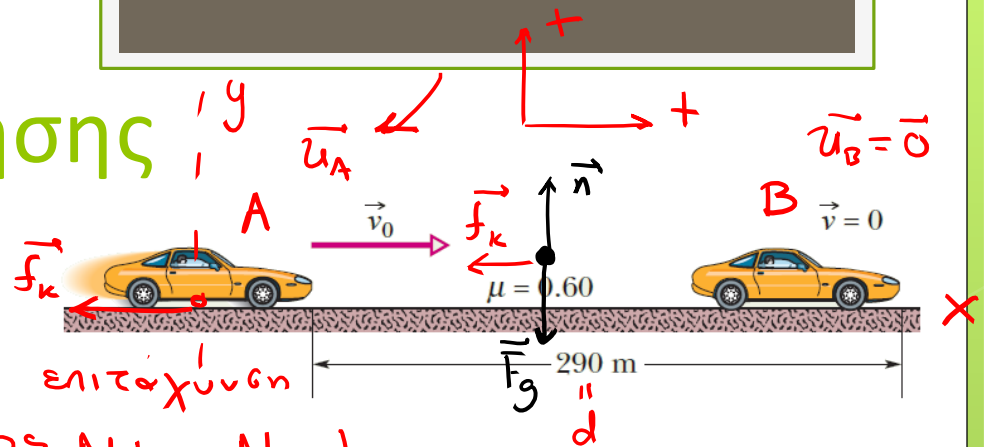
● Παράδειγμα:

- Όταν οι τροχοί ενός αυτοκινήτου «κλειδώνουν» (σταματούν να γυρίζουν) εξ' αιτίας ενός απότομου φρεναρίσματος, το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο και «αποτυπώνει» στο οδόστρωμα ίχνη από τα ελαστικά του. Το ρεκόρ για τα μεγαλύτερα σε μήκος ίχνη ελαστικών σε δημόσιο δρόμο έγινε το 1960 στην Αγγλία – το μήκος του ίχνους ήταν 290 μέτρα! Υποθέτοντας ότι $\mu_k = 0.6$ και ότι το αυτοκίνητο επιταχυνόταν σταθερά κατά το φρενάρισμα, πόσο γρήγορα έτρεχε το αυτοκίνητο ακριβώς όταν «κλείδωσαν» οι τροχοί του;



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:



Έχουμε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση
στον άξονα x ισχύει ο 2ος Νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{f}_k = m \vec{a}_x \Rightarrow -f_k = m a_x \Leftrightarrow a_x = -\frac{f_k}{m} \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει επίσης } f_k = \mu_k n \xrightarrow{(1)} a_x = -\frac{\mu_k n}{m} \quad (2)$$

Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος Νόμος

$$\text{Newton: } \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow n - F_g = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = F_g = mg \quad (3) \quad \text{Η } (2) \xrightarrow{(3)} a_x = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g \quad (4)$$

$$\text{Από τις εξισώσεις της Κινητικής, } v_B^2 = v_A^2 + 2a_x(x_B - x_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_B^2 = 0 = v_A^2 - 2\mu_k g(d - 0) \Rightarrow v_A^2 = 3410.4 \Rightarrow v_A \approx 58 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα

- Θέση
- Ταχύτητα
- Επιτάχυνση
- Δύναμη

και με αρχές όπως ο 2^{ος} νόμος του Newton, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα...

- Στην πράξη, πολλές φορές αντιμετωπίζουμε δυσκολίες...
- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική/συμπληρωματική προσέγγιση, που θα κάνει τα προβλήματα πιο απλά...

Ενέργεια Συστήματος

- Κάποιες έννοιες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια...
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**.
- Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
 - Βενζίνη και πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
 - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
 - Φαγητό για κατανάλωση

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
- Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Kinetic energy K



Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης. Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια. Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.

Potential energy U



Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικειμένου. Το τρενάκι της εικόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.

Thermal energy E_{th}



Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενεργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα. Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.

Ενέργεια Συστήματος

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ακριβή ορισμό της ενέργειας.
- Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια
 - Είναι περισσότερο... «αφηρημένη» έννοια
 - Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί **έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός συστήματος**
 - **Αν η χρήση αυτών των αριθμών γίνει σωστά, μπορούμε να προβλέψουμε αποτελέσματα πειραμάτων και να κατασκευάσουμε μηχανές!**
- Κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/μετασχηματισμούς αυτής

Ενέργεια Συστήματος

- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το **σύστημα**
- Αργότερα, θα μιλήσουμε για μοντέλα ανάλυσης ενός συστήματος
 - ...αντί ενός μόνο σώματος, που είχαμε ως τώρα
- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα σύστημα και πώς σχετίζεται με την ενέργεια
 - Συστήματα μπορεί να είναι:
 - Ένα απλό σώμα ή αντικείμενο
 - Πολλά σώματα ή αντικείμενα
 - Μια περιοχή του χώρου
 - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος

Προς συζήτηση

Ενέργεια Συστήματος

- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, είτε αγνοούμε (**απομονωμένο** σύστημα) είτε ενδιαφερόμαστε (**μη απομονωμένο** σύστημα) για τις επιδράσεις του περιβάλλοντος στο σύστημα
- Ανεξαρτήτως του συστήματος που επιλέγουμε πάντα υπάρχει το **όριο/σύνορο συστήματος**:
 - Μια φανταστική επιφάνεια που χωρίζει το σύστημα με το περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

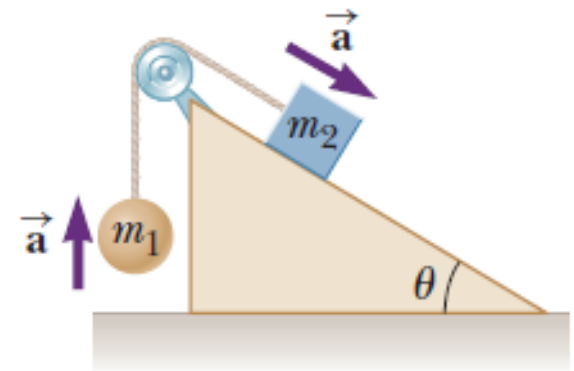
● Παράδειγμα:

- Σύστημα == σπόγγος
- Επιφάνεια σπόγγου == σύνορο συστήματος
- Η δύναμη (μέσω του χεριού) είναι μια επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, η οποία ασκείται επάνω στο σύνορο του συστήματος



● Παράδειγμα:

- Σύστημα == σώματα + σχοινί
- Οι δυνάμεις από το σχοινί επάνω στα σώματα είναι εσωτερικές, και δεν ανήκουν στο περιβάλλον του



Ενέργεια Συστήματος

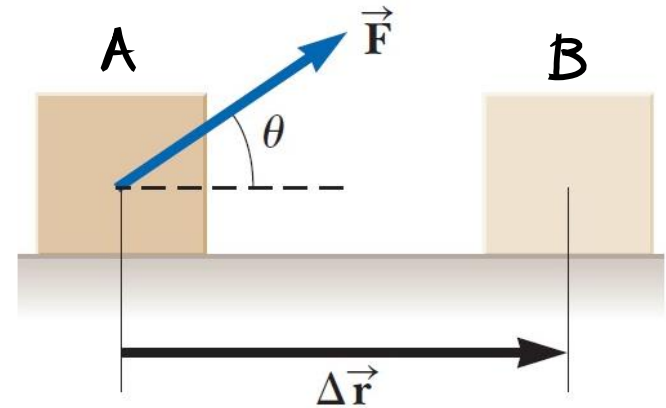


- Αναγνωρίζουμε το σύστημα: σπόγγος
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με τη δύναμη που βάζουμε (όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο;**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;
 - Μέτρο δύναμης – Κατεύθυνση – Μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα

- Ένα σώμα (σύστημα) που μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια σταθερή δύναμη που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο



- Το **έργο (Work) W** που **παράγεται** στο σύστημα από τη δύναμη που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ορίζεται ως
 - το γινόμενο του μέτρου της σταθερής **δύναμης $\vec{F}$** , του μέτρου της **μετατόπισης $\Delta \vec{r}$** του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου της γωνίας θ** ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:

$$W \equiv |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos(\theta) = F \Delta r \cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

- Διακρίνετε τη διαφορά με την «κοινή» αίσθησή σας για το έργο;
- Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων σας για 2'
- Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
- Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι
$$W = 0$$
 - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

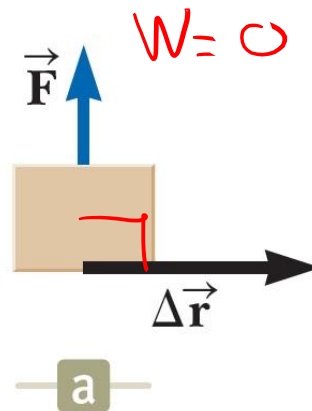
Ενέργεια Συστήματος

$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta)$$

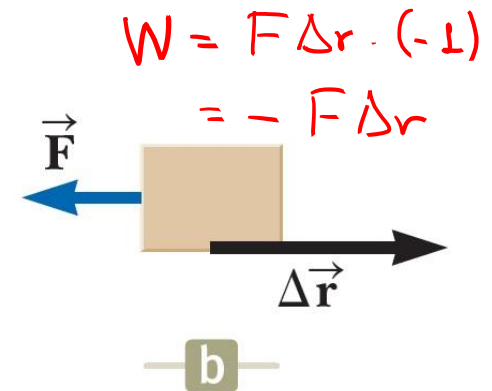
- Quiz: Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου



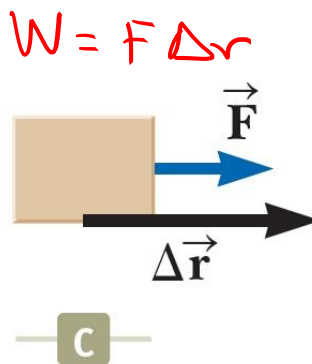
b
d
a
c



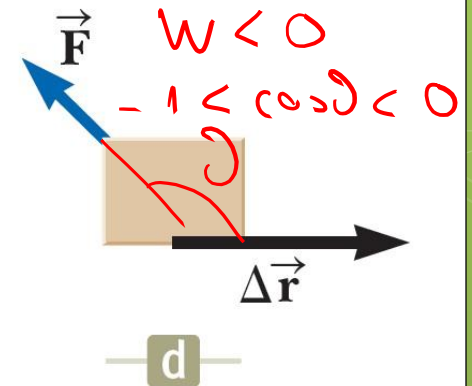
$$W = 0$$



$$W = F \Delta r \cdot (-1) \\ = -F \Delta r$$



$$W = F \Delta r$$



$$W < 0 \\ -1 < \cos \theta < 0$$

Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

έργο == μεταφορά ενέργειας

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
 - Έργο θετικό → Μεταφορά ενέργειας προς το σύστημα
 - Έργο αρνητικό → Μεταφορά ενέργειας από το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta)$$

μοιάζει περίεργη...

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos(\theta)$$

- Άρα το έργο W μπορεί να γραφεί ως $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$!

Ενέργεια Συστήματος

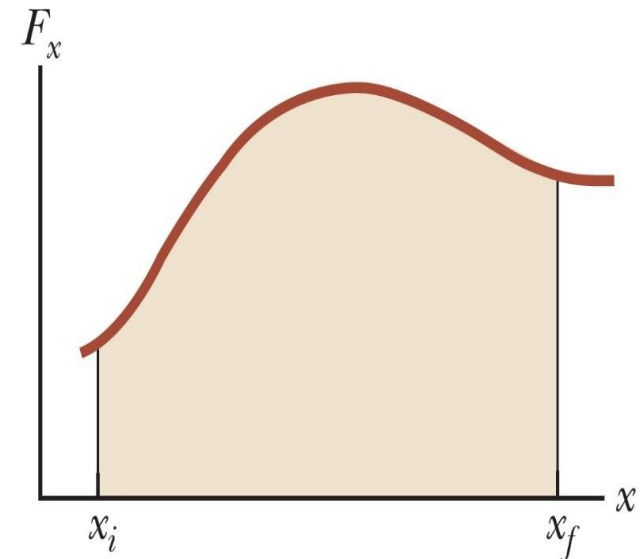
- Παράδειγμα

- Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = 2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}$ m λόγω μιας σταθερής δύναμης $\vec{F} = 5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}$ N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (5\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= 10 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_1 + 4 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0 + 15 \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_0 + 6 \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_1 \\ &= 10 + 0 + 0 + 6 \\ &= 16 \text{ J} \end{aligned}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Η συζήτησή μας αφορούσε έργο υπό σταθερή δύναμη
 - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
 - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
 - Ας πούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της – τι συμβαίνει τότε?
- Παράδειγμα:
 - Η x -συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση

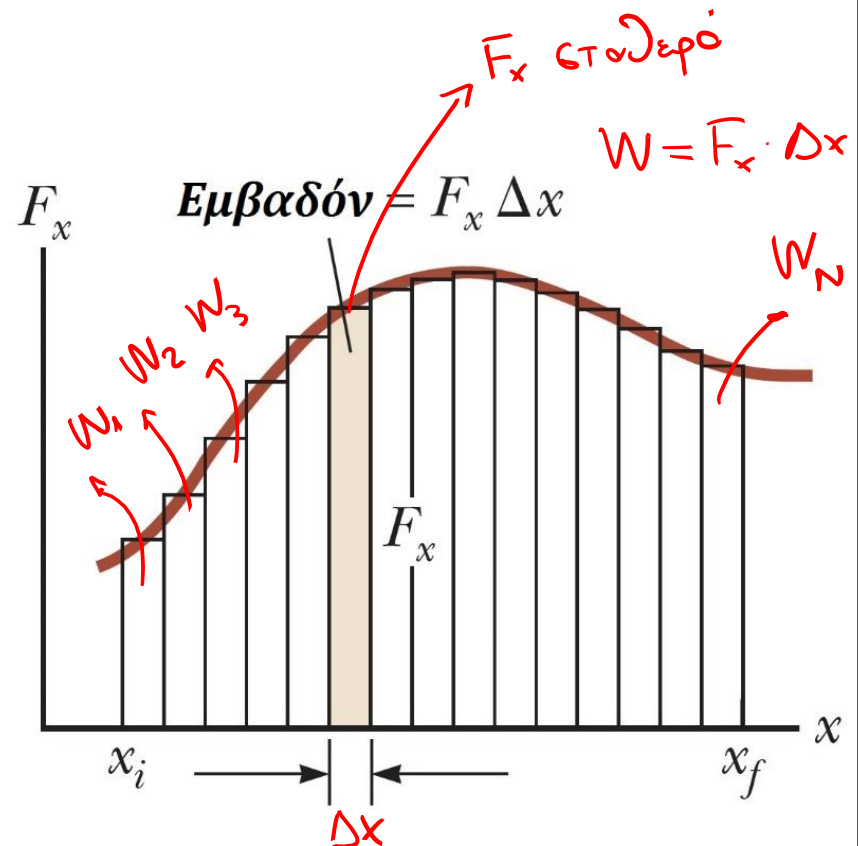


Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!

- Προσέγγιση:

- Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx .
- Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j , που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλογράμμου.



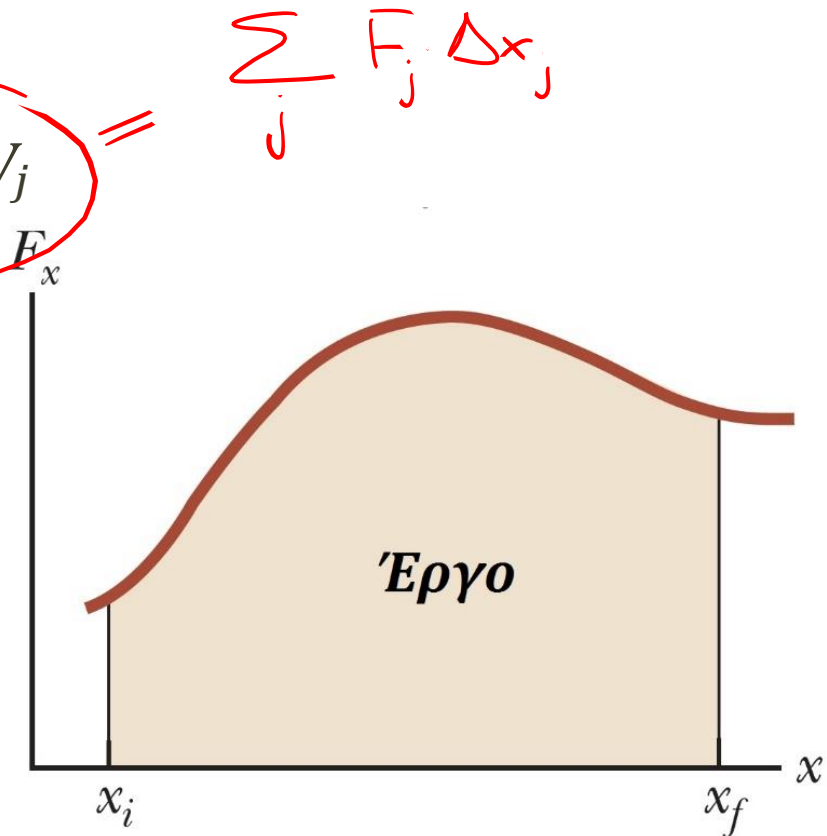
Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για απειροστά μικρά διαστήματα Δx) σταθερή!

- Παράδειγμα:

- Το συνολικό έργο είναι $\sum_j W_j$

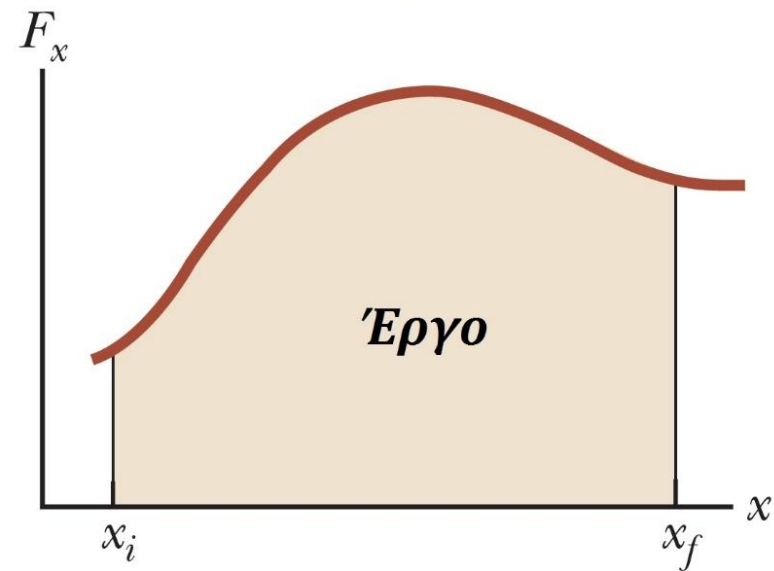
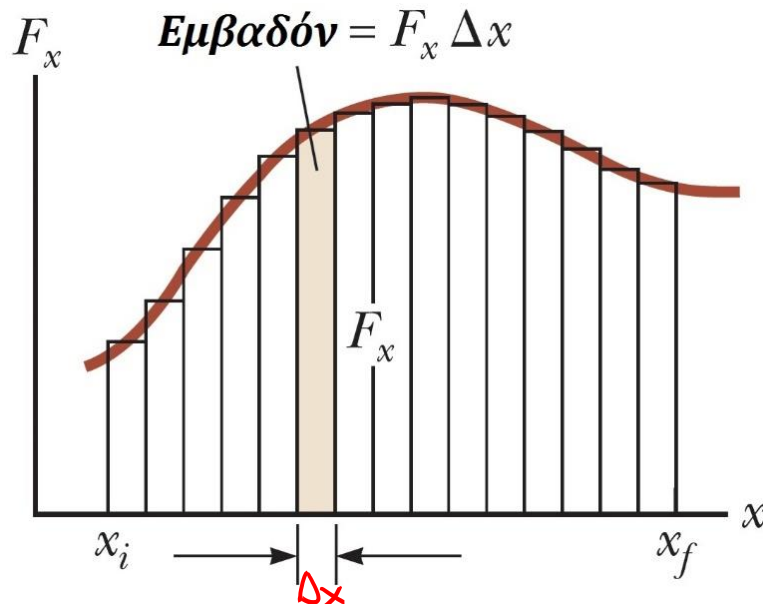
- Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \rightarrow 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!



Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

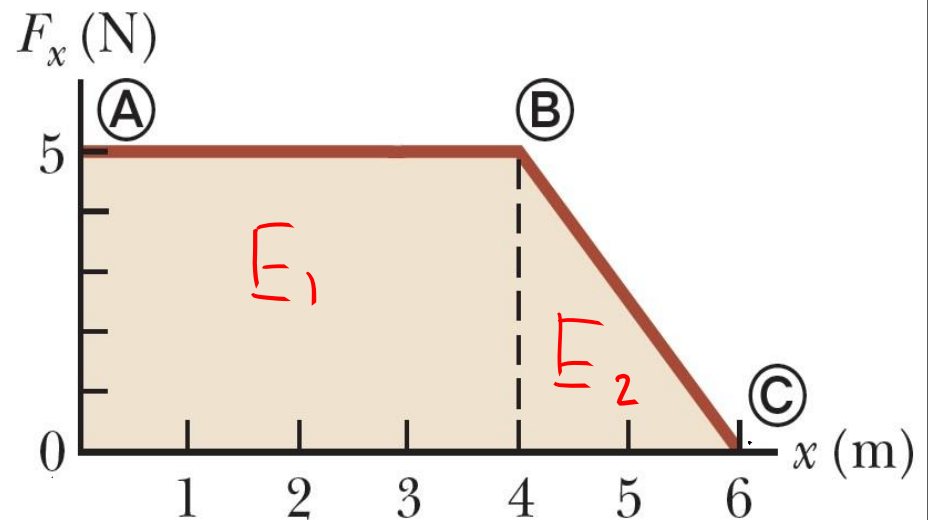
$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int \vec{F}_x \cdot d\vec{x}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Παράδειγμα:

- Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x = 0$ ως $x = 6$ m.



Ενέργεια Συστήματος

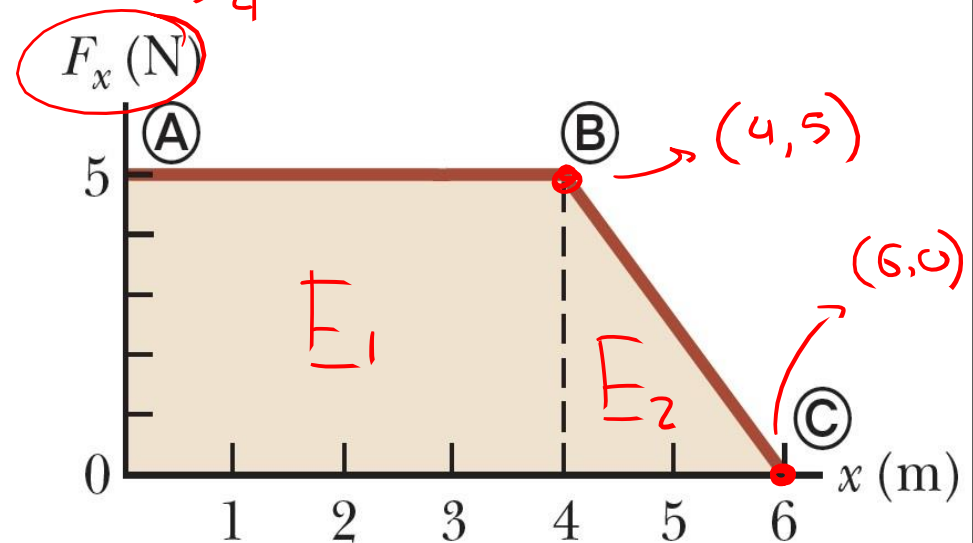
● Παράδειγμα – Λύση:

$$W = E_1 + E_2 = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 20 + 5 = 25 \text{ J}$$

$$W = \int_0^6 F_x dx = \int_0^4 5 dx + \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x + 15\right) dx \dots$$

Homework

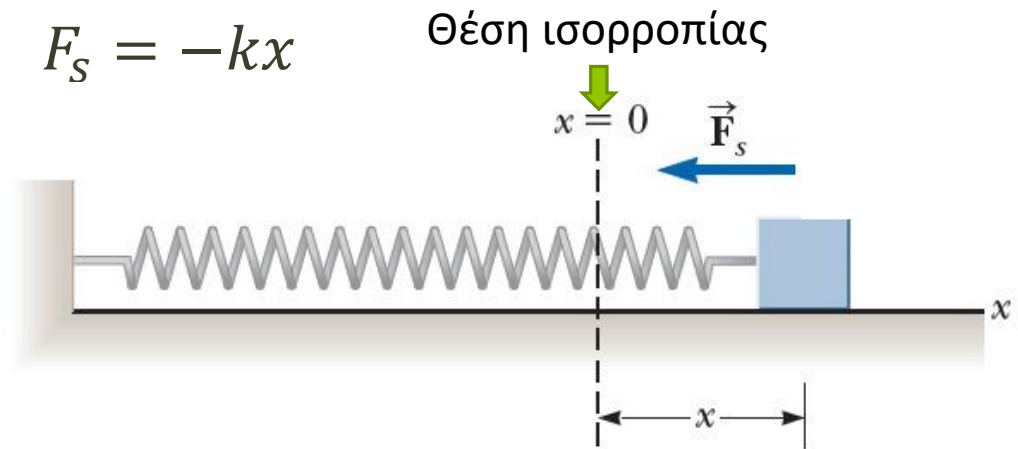
Δείξτε ότι $W = 25 \text{ J}$



Ενέργεια Συστήματος

- Δύναμη ελατηρίου

- Σύστημα == σώμα – δεμένο στο ελατήριο
- Δύναμη $\vec{F}_s$ εγείρεται επάνω στο σώμα από το ελατήριο όταν το τελευταίο εκτείνεται ή συμπιέζεται
- Η δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους)
- Δύναμη ελατηρίου στο σώμα: **Νόμος του Hooke**



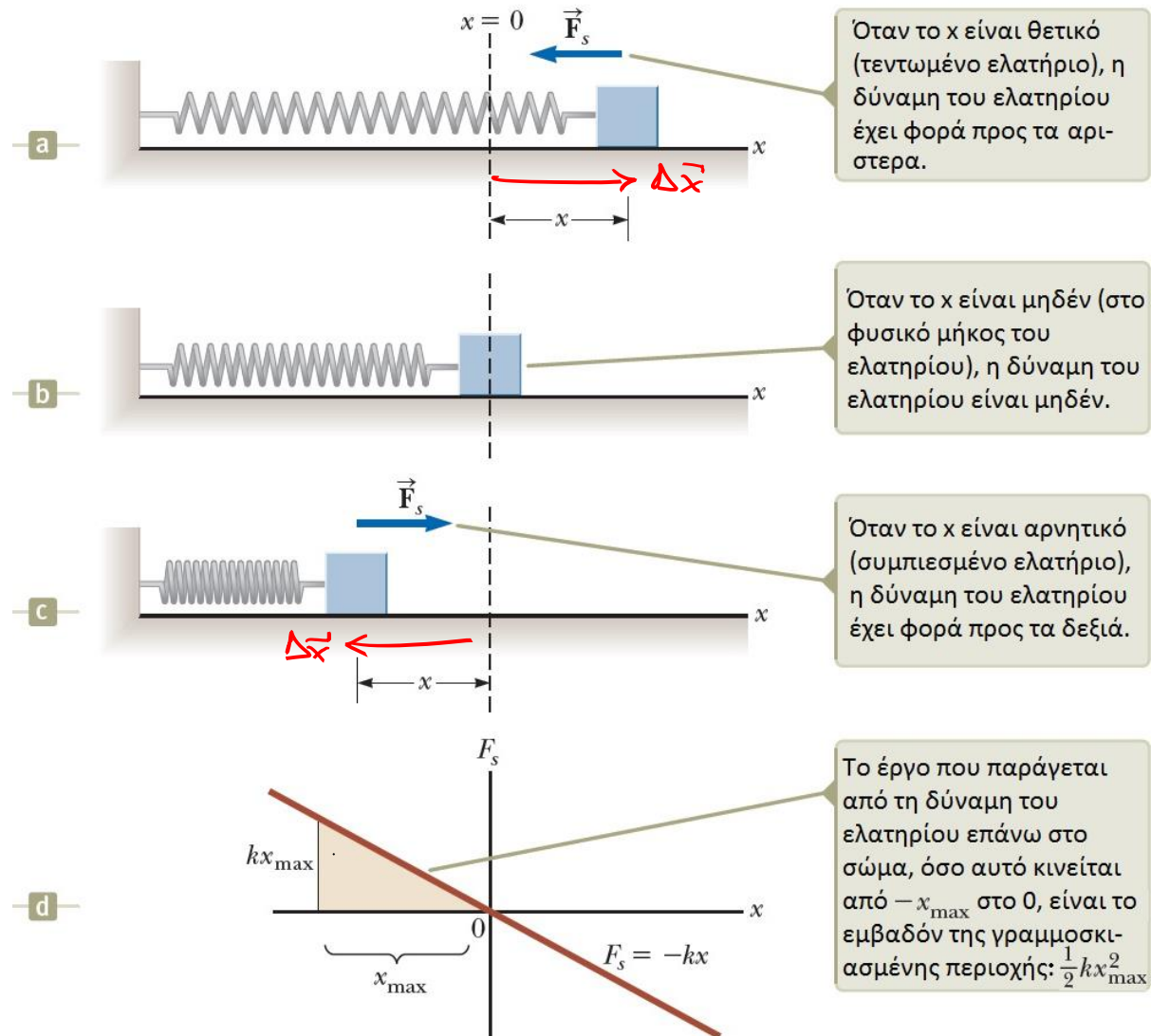
Ενέργεια Συστήματος

○ Δύναμη ελατηρίου

- Η τιμή της σταθεράς k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
 - Μεγάλο $k \rightarrow$ σκληρό ελατήριο
 - Μικρό $k \rightarrow$ μαλακό ελατήριο
- Μονάδες της σταθεράς k είναι **N/m**
- Διανυσματική μορφή

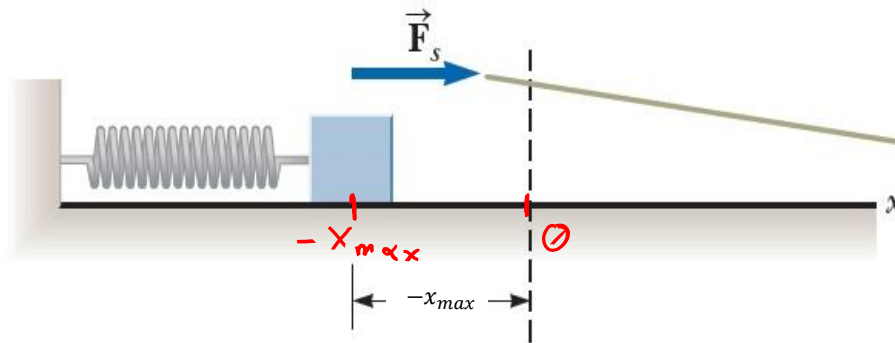
$$\vec{F}_s = F_s \vec{i} = -kx\vec{i}$$

Ενέργεια Συστήματος



Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.



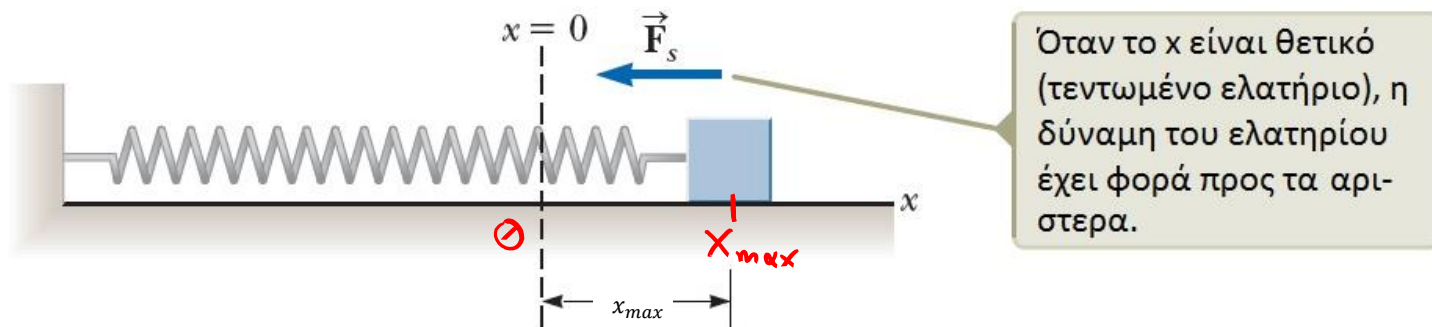
Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα δεξιά.

- Έστω η τελική θέση $x_f = 0$ (θέση ισορροπίας)
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2} \Big|_{-x_{max}}^0 = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του, περνώντας από τη θέση ισορροπίας (θέση $x_i = 0$)



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_{max}$
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_0^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 < 0$$

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max} είναι μηδέν!!
- Όμως για μια **οποιαδήποτε** μετατόπιση από μια θέση x_i σε μια θέση x_f , ισχύει:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

που δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μηδέν...

- Η παραπάνω σχέση δίνει το **έργο της δύναμης του ελατηρίου** από μια οποιαδήποτε θέση ως μια οποιαδήποτε άλλη

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω μια εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα

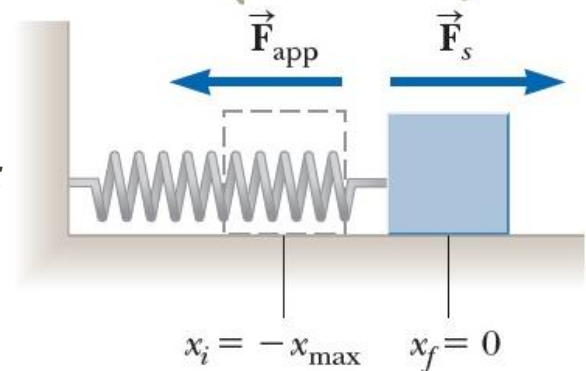
- Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0

- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int -\vec{F}_s \cdot d\vec{x} \\ &= \int_{x_i}^{x_f} -(-kx\vec{i}) \cdot (dx \vec{i}) \\ &= \int_{-x_{max}}^0 kx dx = -\frac{1}{2} kx_{max}^2 \end{aligned}$$

- Για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 = -W_s$$

Αν η διαδικασία της κίνησης του σώματος γίνεται ΠΟΛΥ αργά, τότε η $\vec{F}_{app}$ είναι ίση σε μέτρο και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_s$, για κάθε χρονική στιγμή.

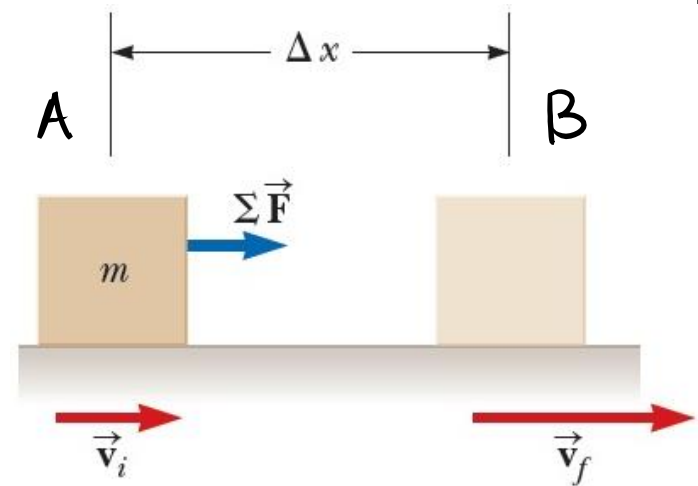


Ενέργεια Συστήματος

- Έργο == Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας
 - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
 - Πιθανότατα αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος
- 1^{ος} Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα:

Κινητική Ενέργεια

- Έστω το διπλανό παράδειγμα:
 - Σύστημα == σώμα μάζας m
 - Σώμα επιταχύνει από $\vec{u}_i$ σε $\vec{u}_f$
 - Σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης (μοντέλο κίνησης I)



Ενέργεια Συστήματος

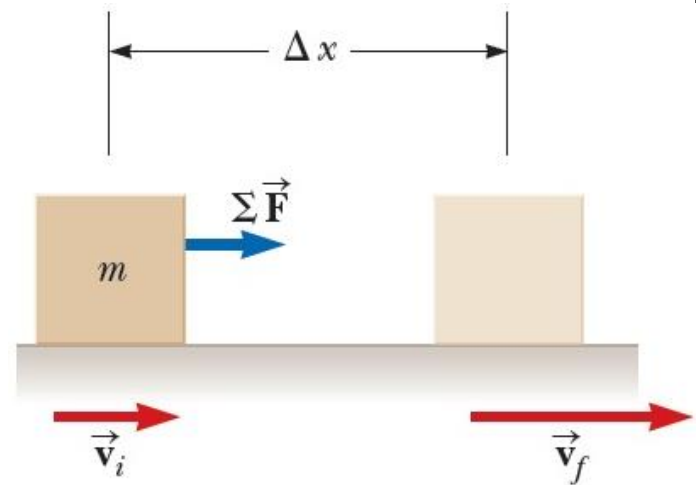
- Θεωρήστε την συνισταμένη των δυνάμεων σταθερή
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση (μοντέλο κίνησης II)
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x}$$

- Από 2^ο νόμο Newton, είναι

$$\Sigma F = ma$$

και με αντικατάσταση έχουμε



Ενέργεια Συστήματος

$$\sum F = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \Leftrightarrow \overbrace{\sum F \Delta x}^{W_F} = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

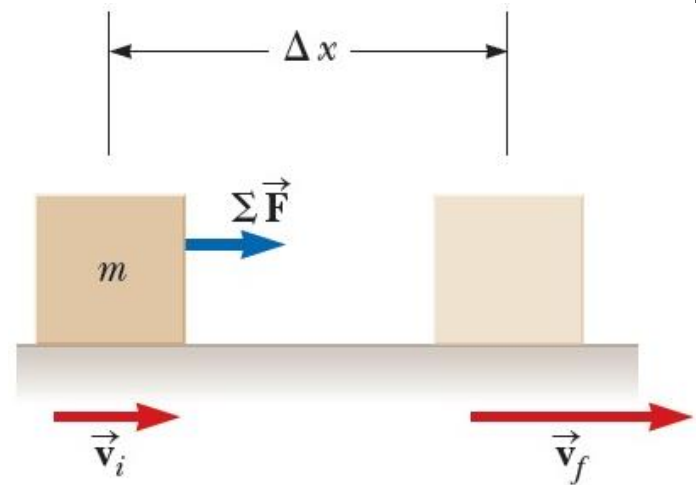
- Το 1^ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης
- Άρα

$$W_{ext} = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

όπου

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$

η **κινητική ενέργεια** του σώματος



Ενέργεια Συστήματος

- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος

- Μονάδα μέτρησης στο SI:

$$kg \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2 = kg \cdot \left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m = 1 \text{ Joule (J)}$$

- Συνοψίζοντας:

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K$$

- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου

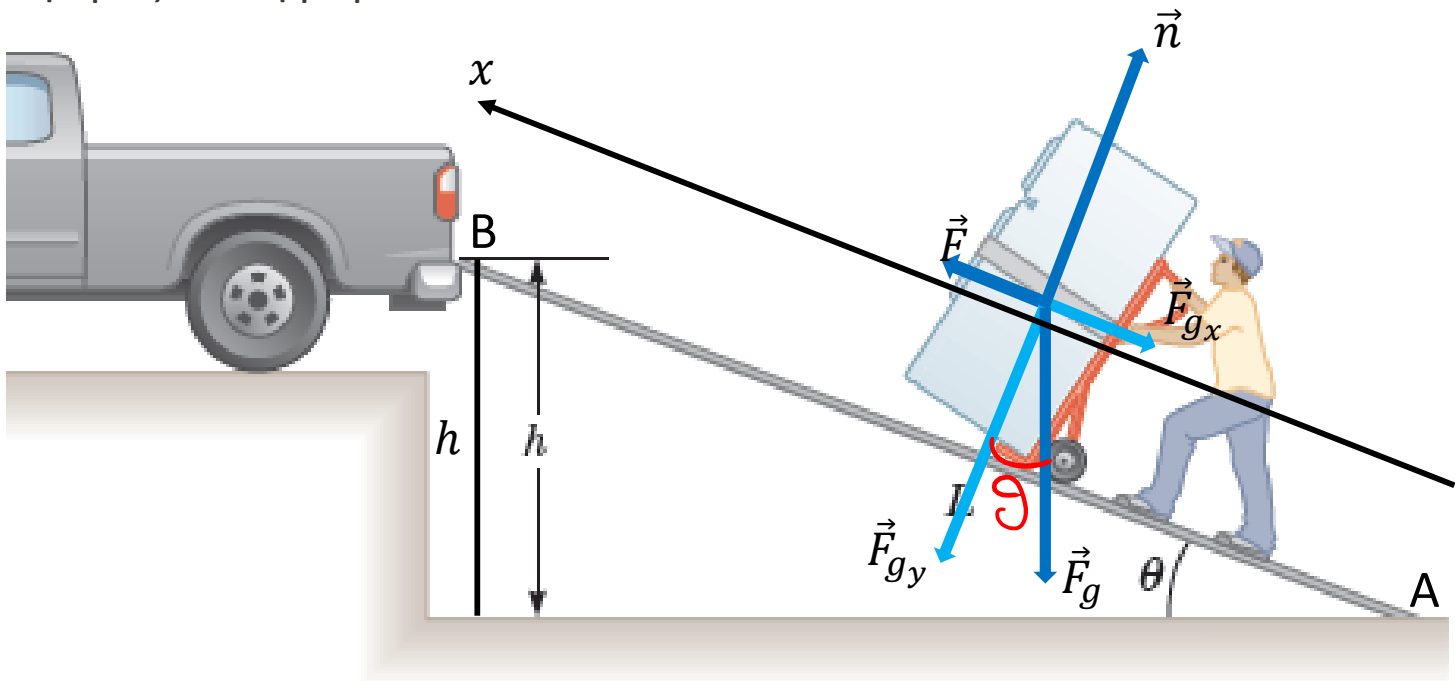
- Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητας του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα:

- Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του με σταθερή ταχύτητα σε ένα φορτηγό χρησιμοποιώντας μια ράμπα υπό γωνία θ όπως στο Σχήμα. Ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας L αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς και τη ράμπα λεία.

$$\Sigma F_x = 0$$



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

Θεωράμε ως σύστημα το ψυγείο.

Στο ψυγείο ασκούνται 3 δυνάμεις

Η $\vec{F}_g$, η $\vec{n}$, και η $\vec{F}$. Από το σημείο A ως το B ισχύει το ΘΜΚΕ:

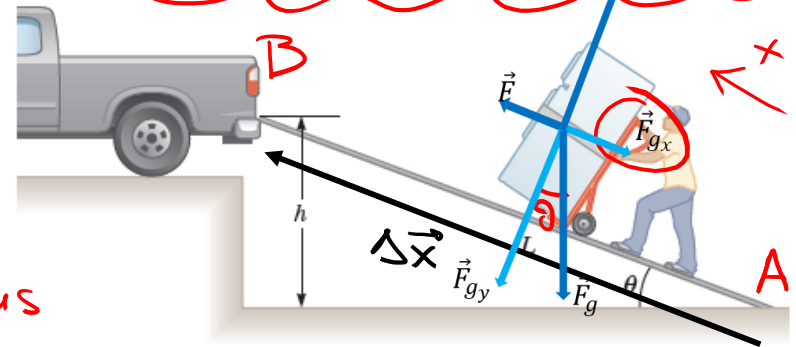
$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_{F_g} + W_n + W_F$$

$$= W_{F_{gx}} + W_{F_{gy}} + W_n + W_F \stackrel{*}{=} W_{F_{gx}} + W_F \Leftrightarrow$$

$$K_B - K_A = W_{F_{gx}} + W_F \Leftrightarrow 0 = W_{F_{gx}} + W_F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_F = -W_{F_{gx}} \Leftrightarrow W_F = -\vec{F}_{gx} \cdot \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_F = -(mg \sin \vartheta \cdot L \cdot \cos(\pi)) = mg \sin \vartheta \cdot L \quad (1)$$



$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = |\vec{F}| |\Delta \vec{x}| \cos \vartheta$$

* Τα έργα $W_{F_{gy}}$, W_n είναι μηδέν γιατί $\vec{F}_{gy} \perp \Delta \vec{x}$
 $\vec{n} \perp \Delta \vec{x}$

Ενέργεια Συστήματος

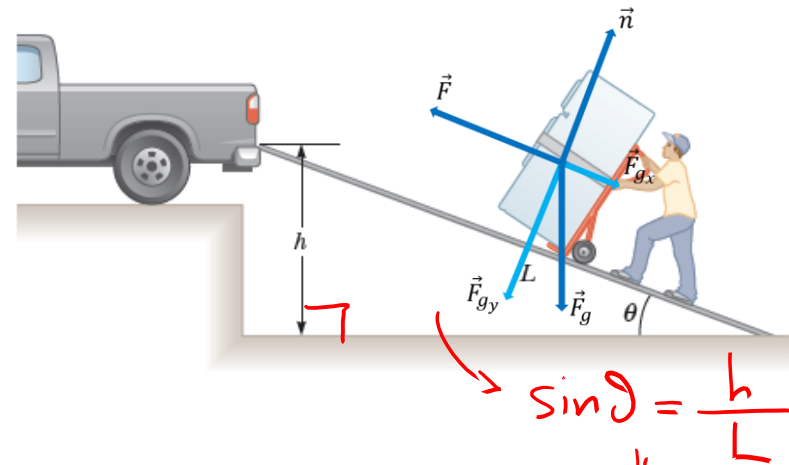
● Παράδειγμα – Λύση:

Όμως από το σχήμα βλέπουμε
ότι ισχύει $\sin\theta = \frac{h}{L}$

και άρα $h = L \sin\theta$, οπότε

① $\Rightarrow W_F = mgh$. Άρα ο φίλος μας ΔΕΝ

έχει δίκιο. Το έργο που παράγεται ενώσω στο
σύστημα (ψυχείο) είναι ανεξάρτητο του L .



$$h = L \sin\theta$$

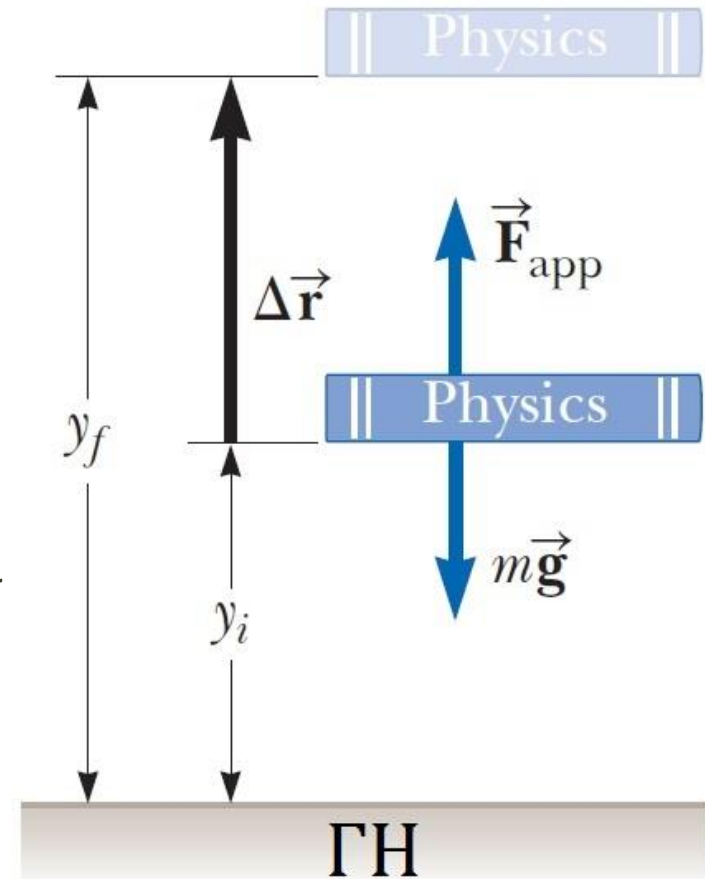
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση **εξωτερικών** δυνάμεων σε ένα σύστημα (κυρίως) **ενός** μόνο σώματος
- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα με δυνάμεις **εσωτερικές** στο σύστημα
 - Δηλ. δυνάμεις που **ΔΕΝ** ασκούνται από το εξωτερικό περιβάλλον
- Τι «ενεργειακό» νέο έχουν να μας πουν τέτοια συστήματα?

Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Μετατοπίζουμε αργά (με σταθερή ταχύτητα) ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω δύναμης $\vec{F}_{app}$
- Αύξηση ενέργειας συστήματος λόγω έργου της $\vec{F}_{app}$
 - Μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα
 - Υπάρχει δύναμη, υπάρχει μετατόπιση προς τα πάνω, άρα υπάρχει μη μηδενικό έργο! (με βεβαιότητα! 😊)
- Καμιά αλλαγή στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης! Γιατί; Υποθέσαμε
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$
δηλ. η ταχύτητα δεν αλλάζει!
- Η ενέργεια πρέπει να έχει αποθηκευτεί με άλλη μορφή!

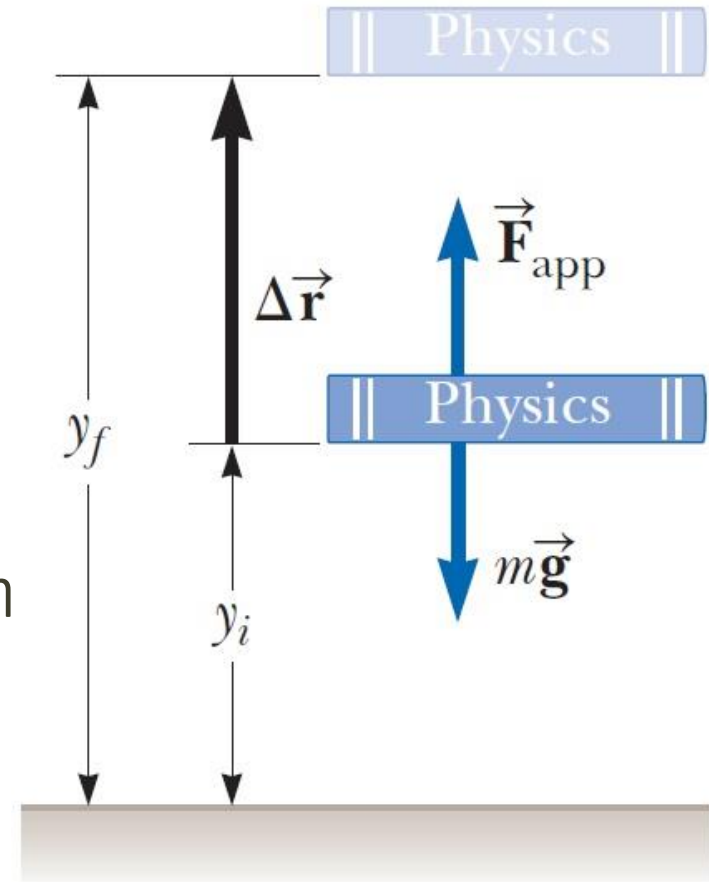


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Αν αφήσουμε όμως το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει κινητική ενέργεια!
 - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
 - Προέρχεται από το έργο της δύναμης $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του νωρίτερα
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει λέγεται

βαρυτική δυναμική ενέργεια



Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

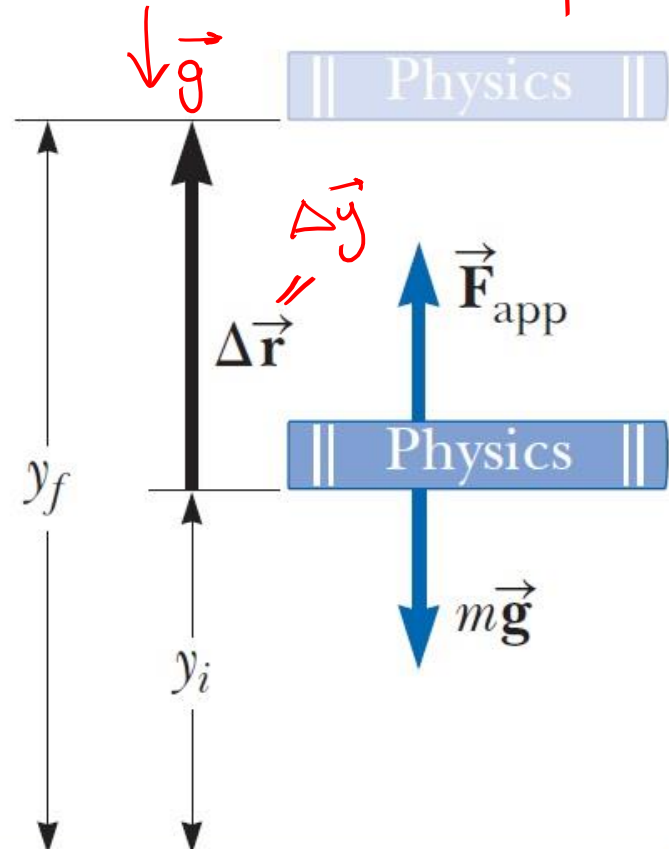
- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \vec{F}_{app} \cdot \Delta \vec{r} = -m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_f - mgy_i \\ &= U_{gf} - U_{gi} = \Delta U_g \end{aligned}$$

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**

$$U_g = mgy$$

- Το έργο της εξωτ. δύναμης κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με τη μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-σώμα!



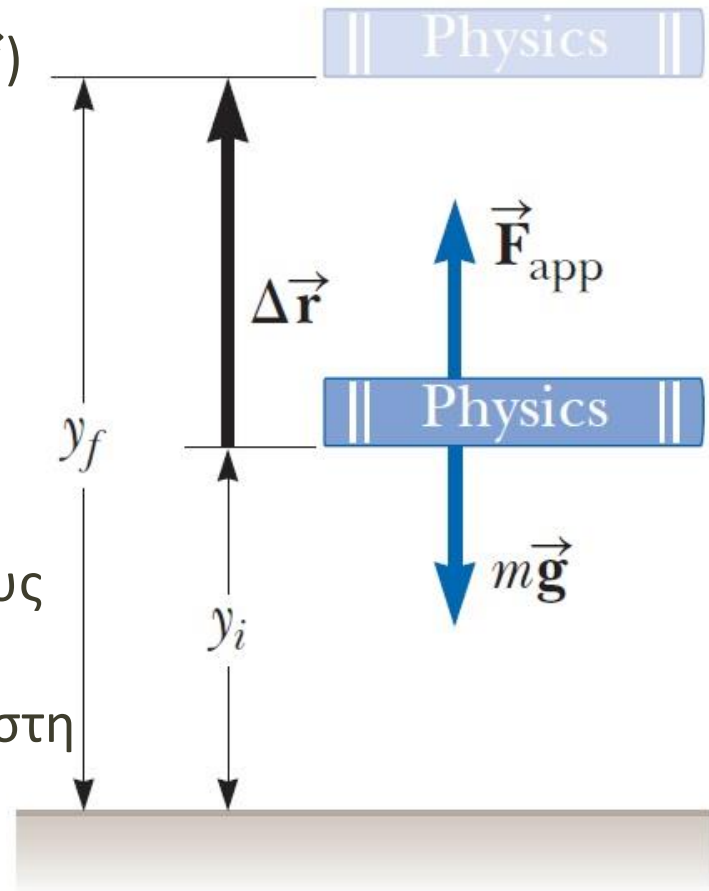
Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{F_g} &= \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r} = m\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_i - mgy_f \\ &= U_{gi} - U_{gf} = -\Delta U_g \end{aligned}$$

- Άρα το έργο της δύναμης του βάρους κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με την **αρνητική** μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-σώμα!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**

- Είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με **μεταβολή της κινητικής του ενέργειας**, που μεταφράζεται σε **κίνηση** των μελών του συστήματος
- Στην προηγούμενη περίπτωση, είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως **δυναμική ενέργεια** στο σύστημα, που αναπαριστά αλλαγή στη

διάταξη / διαμόρφωση / σύνθεση

των μελών του συστήματος.

- Εν προκειμένω, το βιβλίο ανυψώθηκε σε σχέση με την επιφάνεια της Γης (άλλαξε η μεταξύ τους διάταξη)

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια διάταξη των μελών του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική
- Για παράδειγμα, όταν τα σώματα βρίσκονται **ακριβώς πάνω** στην επιφάνεια της Γης.
 - Τότε θεωρούμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-σώματα είναι μηδενική
 - Οποιαδήποτε μεταβολή στο ύψος κάποιου σώματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης οδηγεί σε μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος
- Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια άλλης μορφής δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Σύστημα ελατήριο-σώμα (όχι μόνο σώμα!)
- Είδαμε νωρίτερα ότι

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

- Το έργο που παράγεται στο σύστημα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου
 - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα αν θεωρήσουμε ότι

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$

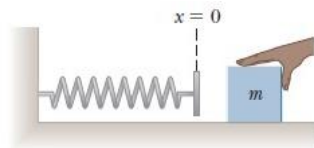
τότε

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \\ &= U_s^f - U_s^i \\ &= \Delta U_s \end{aligned}$$

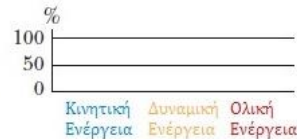
με U_s την **ελαστική δυναμική ενέργεια** που σχετίζεται με το σύστημα σώματος-ελατηρίου

- Το έργο της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος

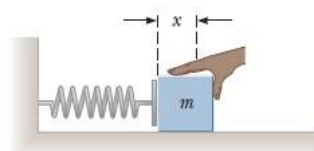
Ενέργεια Συστήματος



Πριν το ελατήριο συμπιεστεί, δεν υπάρχει ενέργεια στο σύστημα ελατηρίου-σώματος.



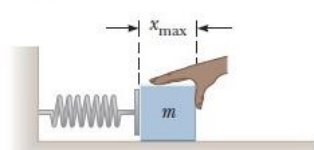
a



Όταν το ελατήριο συμπιέζεται μερικώς, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική ενέργεια.



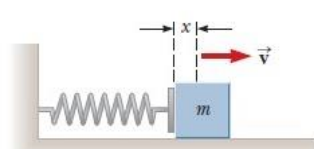
b



Το ελατήριο συμπιέζεται στο μέγιστο βαθμό, και το σώμα κρατείται σταθερό. Υπάρχει ελαστική δυναμική ενέργεια στο σύστημα και καθόλου κινητική ενέργεια.



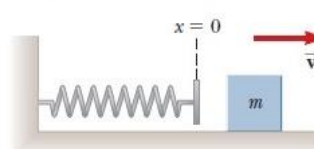
c



Αφού αφήνεται ελεύθερο το σώμα, η ελαστική δυναμική ενέργεια μειώνεται και η κινητική ενέργεια αυξάνεται.



d



Αφού το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι κινητική ενέργεια.



e

Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή.

Ενέργεια Συστήματος

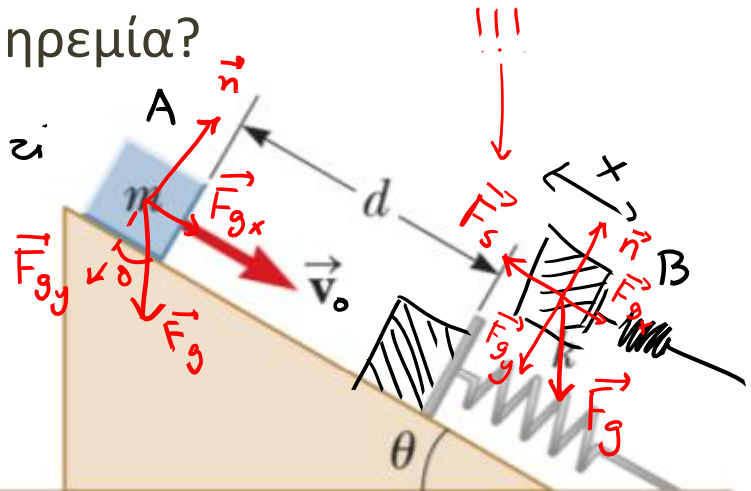
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?

Το σύστημα μας είναι μόνο το κουτί
μάζας m .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο
σύστημα γίνονται στο σχήμα

Εφαρμόσαμε ΘΜΚΕΕ από τη θέση Α ως τη θέση Β.



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

Λρα ΘΜΚΕΕ_{A→B} :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{εξ. δυνάμειν}}$$

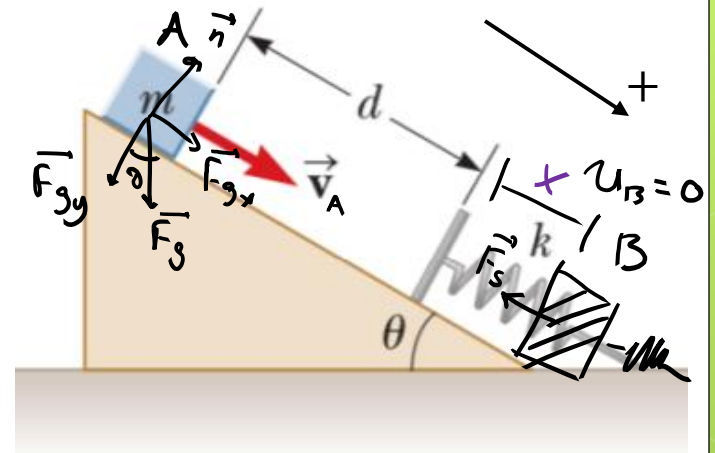
$$= \underbrace{W_{F_{gy}}^{A \rightarrow B}}_{\emptyset} + W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + \underbrace{W_n^{A \rightarrow B}}_{\emptyset} + W_S^{A \rightarrow B} = W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + W_S^{A \rightarrow B}$$

$$K_B - K_A = W_{F_{gx}}^{A \rightarrow B} + W_S^{A \rightarrow B} \Leftrightarrow \emptyset - \frac{1}{2} m u_A^2 = F_{gx} \cdot (d+x) \cdot \cos(\emptyset)$$

$$-\frac{1}{2} m u_A^2 = mg \sin(\emptyset) \cdot (d+x) - \frac{1}{2} k x^2 \quad \left| \quad \begin{array}{l} + (\emptyset - \frac{1}{2} k x^2) \\ - \end{array} \right.$$

$$-\frac{1}{2} m u_A^2 = mg \sin \emptyset \cdot d + mg \sin \emptyset \cdot x - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} k x^2 - mg \sin \emptyset \cdot x - \left(\frac{1}{2} m u_A^2 + mg \sin \emptyset \cdot d \right) = \emptyset$$

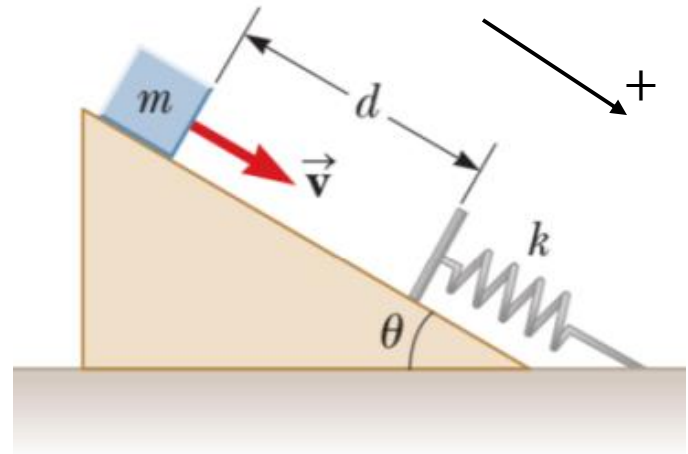


Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:

Λύνοντας το πολυώνυμο

(διαίρωντας με m το πολυώνυμο)



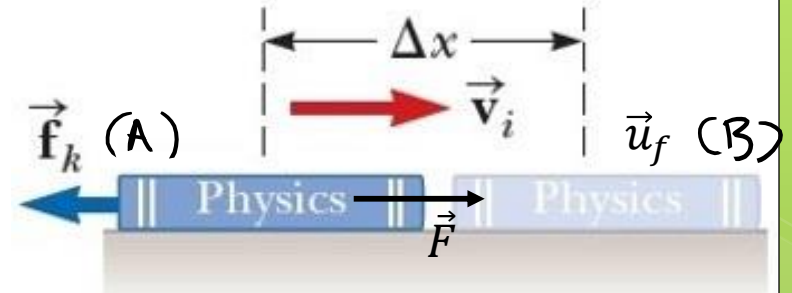
$$x = \frac{g \sin \theta \pm \sqrt{(g \sin \theta)^2 - 4 \frac{k}{2m} \left(-\frac{v_A^2}{2} - g \sin \theta \cdot d \right)}}{2 \frac{k}{2m}}$$

Κρατάμε τη θετική λύση, αφού η θετική φορά
της κίνησης ^{και της} είναι προς τη φορά κίνησης του σώματος.
μετατότισης $\vec{x}$

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα

- Σύστημα == βιβλίο



- Σταθερή δύναμη $\vec{F}$

- Σταθερή επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx

- Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (Μοντέλο I) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (Μοντέλο II):

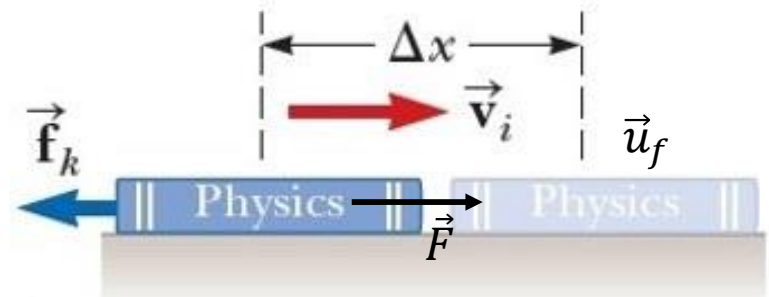
$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = ma$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\Delta x} (u_f^2 - u_i^2)$$

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος

- Σύστημα == βιβλίο



$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

- Πού πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της $\vec{F}$??
- Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε **αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου**:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

- Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος
βιβλίο + επιφάνεια

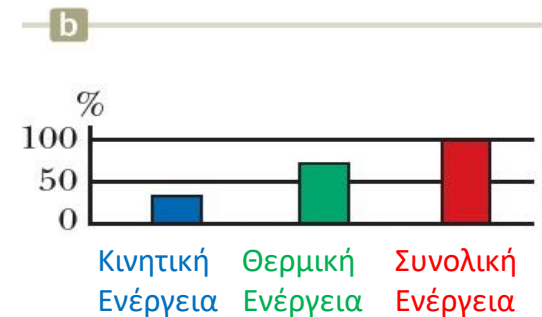
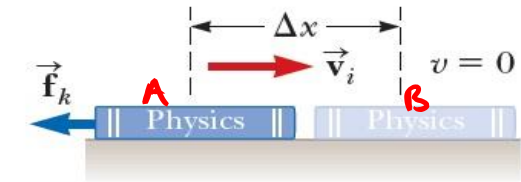
Ενέργεια Συστήματος

- Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε σε **θερμική ενέργεια** του συστήματος βιβλίο και επιφάνεια (όχι μόνο βιβλίο!)
 - Η επιφάνεια και το βιβλίο θερμάνθηκαν!
- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **θερμική ενέργεια**, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

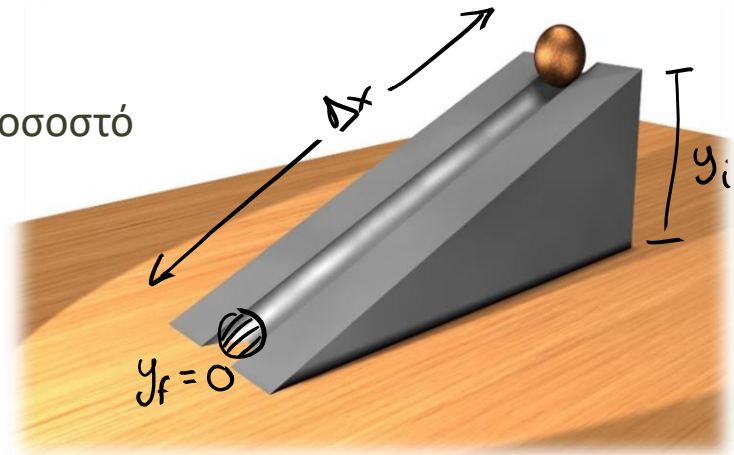
- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\Delta E_{th} = -W_{\tauριβης} = f_k \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σύστημα: **μπάλα + επικλινές + έδαφος (Γη)**
Η απόσταση που μια μπάλα ολισθαίνει σε μια επικλινή επιφάνεια με τριβές, έχει μεγάλη σημασία για το **πόση** δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική
- Μεγαλύτερη απόσταση $\rightarrow$ μεγαλύτερο ποσοστό δυναμικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική λόγω του έργου της δύναμης τριβής
- Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»
- Αντίθετα, το έργο της δύναμης της βαρύτητας δεν εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!



$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (\cancel{y_f} - y_i)\vec{j} = mg y_i$$

$$W_{\text{τριβης}} = -f_k \Delta x$$

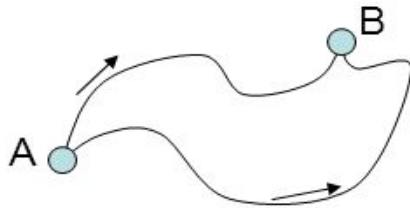
Ενέργεια Συστήματος

- Αυτή η εξάρτηση από τη διαδρομή («μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
 - **Συντηρητικές (*conservative*)**
 - Ανεξάρτητη από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη βαρύτητας
 - **Μη συντηρητικές (*nonconservative*)**
 - Εξάρτηση από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη τριβής ολίσθησης
- **Συντηρητικές δυνάμεις – Ιδιότητες:**
 1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα σε αυτά.
 2. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Ενέργεια Συστήματος

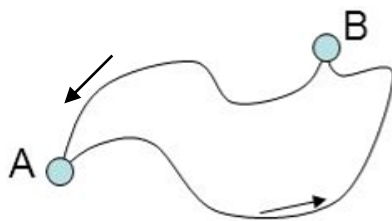
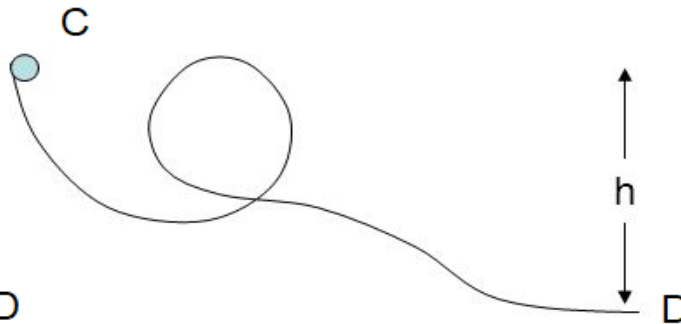
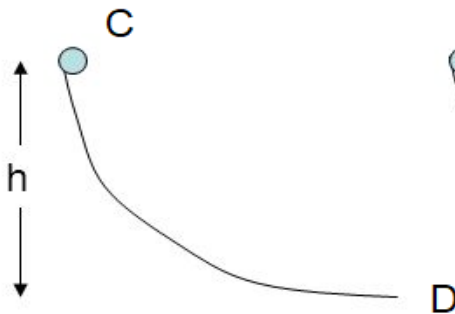
Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:

Έστω ότι οι κινήσεις μεταξύ των σημείων οφείλονται σε μια συντηρητική δύναμη



Το έργο που παράγεται στη διαδρομή από το A στο B είναι το ίδιο για κάθε μια από τις διαδρομές.

Όμοια και για τις διαδρομές από το C στο D.



Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από το A στο B και ξανά μετά στο A είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή)

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται **μη συντηρητική** αν δεν ικανοποιεί (τουλάχιστον μια από) τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
 - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης
- Η δράση αποκλειστικά συντηρητικών δυνάμεων είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα σύστημα, καθώς μπορεί να υποστηρίξει ένα συγκεκριμένο ενεργειακό θεώρημα
- Ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής ενέργειας U ενός συστήματος ως τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Αποδεικνύεται πειραματικά ότι οι **μη συντηρητικές** δυνάμεις που δρουν σε ένα σύστημα **αλλάζουν** τη μηχανική ενέργεια του συστήματος! Αντίθετα, **οι συντηρητικές τη διατηρούν!**

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνο αν στο σύστημα δρουν αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις!

- Προφανώς για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας απαιτείται πολυμελές σύστημα
- Ας επιστρέψουμε λοιπόν στη μελέτη συντηρητικών δυνάμεων...

Ενέργεια Συστήματος

- Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων

- Δύναμη Βαρύτητας $\vec{F}_g$

- $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mgy_i - mgy_f$
- Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f
- $W_g = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($y_i = y_f$)

- Δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_s$

- $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f
- $W_s = 0$, σε κλειστή διαδρομή ($x_i = x_f$)

Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα ύψους $h = 8.5 \text{ m}$. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της.

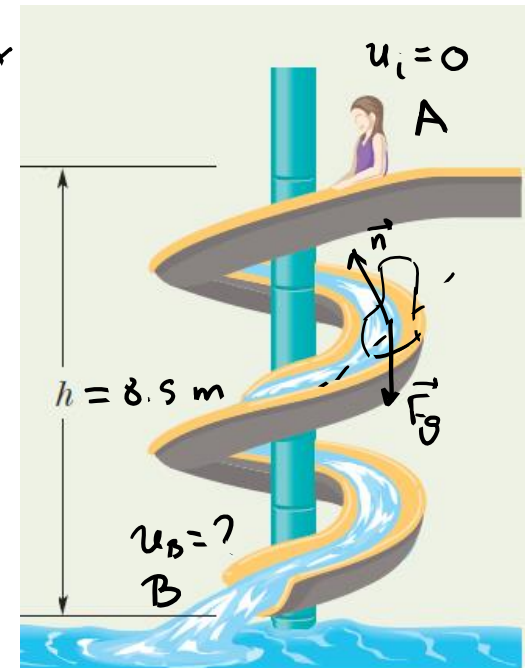
Θεωράμε ως σύστημα το παιδί, την τσαλίζτρα και τη Γ_{η} .

Στο παιδί, ασκούνται δυο δυνάμεις:

1. Η $\vec{F}_g$ (του βάρους)

2. Η $\vec{n}$ ($W_n = 0$ γιατί $\vec{n} \perp \Delta\vec{x}$)

Η $\vec{F}_g$ είναι συντηρητική!



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

Σταθισμός: $\Delta E_{A \rightarrow B}$

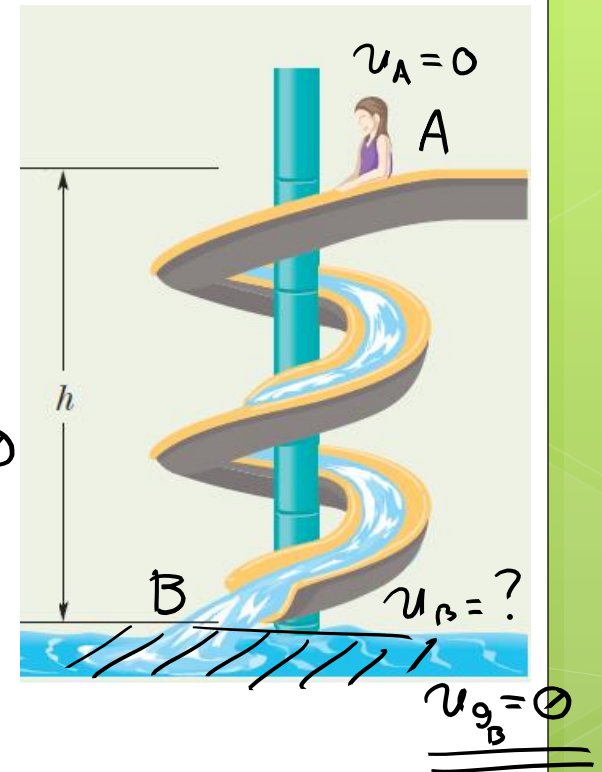
$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \Leftrightarrow \Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{g_{A \rightarrow B}} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} u_B^2 = gh \Rightarrow u_B^2 = 2gh \Rightarrow u_B = \pm \sqrt{2gh}$$

$$\text{Άρα } |u_B| = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 8.5} \approx 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα πολυμελές σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας εσωτερικής συντηρητικής δύναμης, $W_{F,int}$
- Ένα σώμα από τα μέλη του κινείται από μια θέση i (αρχική) σε μια θέση f (τελική)
- Μεταβλήθηκε (έστω αυξήθηκε) η κινητική του ενέργεια
- Πρέπει ισόποσα να μεταβληθεί «αντίστροφα» (μειωθεί) η δυναμική του ενέργεια
 - ...λόγω Α.Δ.Μ.Ε!

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i - U_f$$

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα άλλο σώμα που είναι μέλος του συστήματος** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας

- Π.χ. έργο **βάρους** κατά την ανύψωση βιβλίου στο σύστημα Γη-βιβλίο

$$W_{F_g} = -\Delta U_g$$

- Π.χ. έργο **δύναμης του ελατηρίου** κατά τη μετατόπιση του από τη θέση ισορροπίας στο σύστημα ελατήριο-σώμα

$$W_s = -\Delta U_s$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη** $\vec{F}_{int}$
- Έστω ότι αυτή η δύναμη προκαλεί αλλαγή της διάταξης του συστήματος λόγω της κίνησης ενός από τα σώματα επάνω στο $x'x$ άξονα
 - Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα
- Το έργο της δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός):

$$W_{F,int} = F_{int} \Delta x \cos \theta = F_x \Delta x = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρώντας ότι η μετατόπιση του σώματος Δx είναι απειροστά μικρή, μπορούμε να πούμε ότι και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU είναι απειροστά μικρή

$$\Delta U = -F_x \Delta x \Rightarrow F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Έτσι

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**
- Προφανώς ισχύει και

$$F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Ενέργεια Συστήματος

● Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)

- Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
- Παραδείγματα: σύστημα σώματος-ελατηρίου, σύστημα μπίλιας-κυρτού μώλ-Γης

● Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)

- Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
- Παραδείγματα: σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια, σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου

● Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)

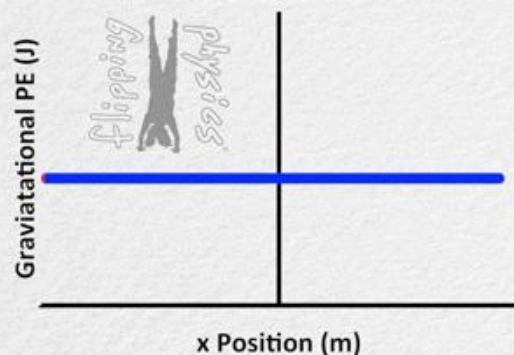
- Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
- Παράδειγμα: σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους, σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

Ενέργεια Συστήματος

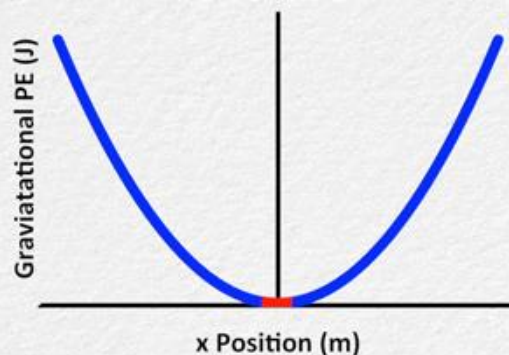
Equilibrium



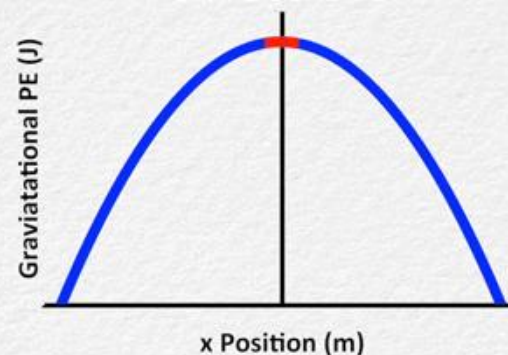
Neutral



Stable



Unstable



Ενέργεια Συστήματος

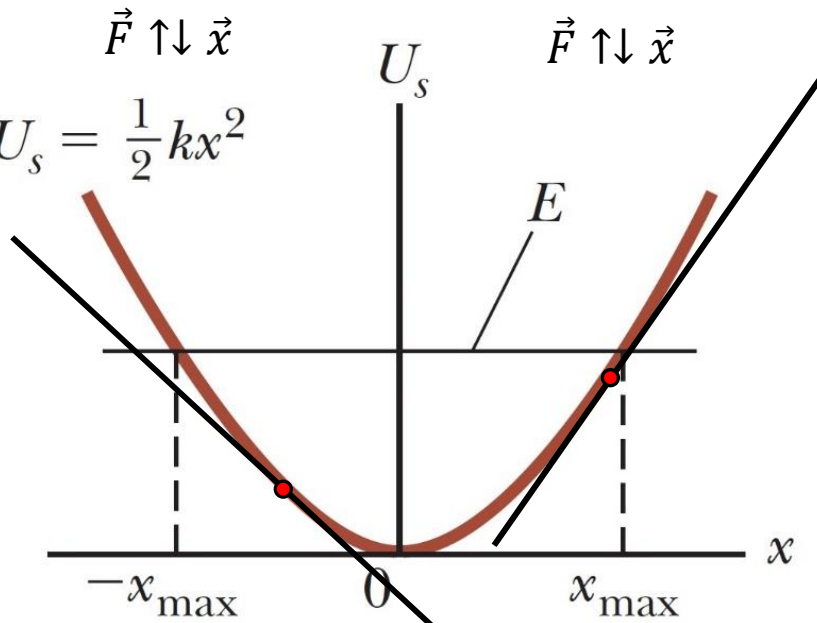
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος
- Παραδείγματα:**

$$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$$

$$\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{x}$$

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$



$$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$$

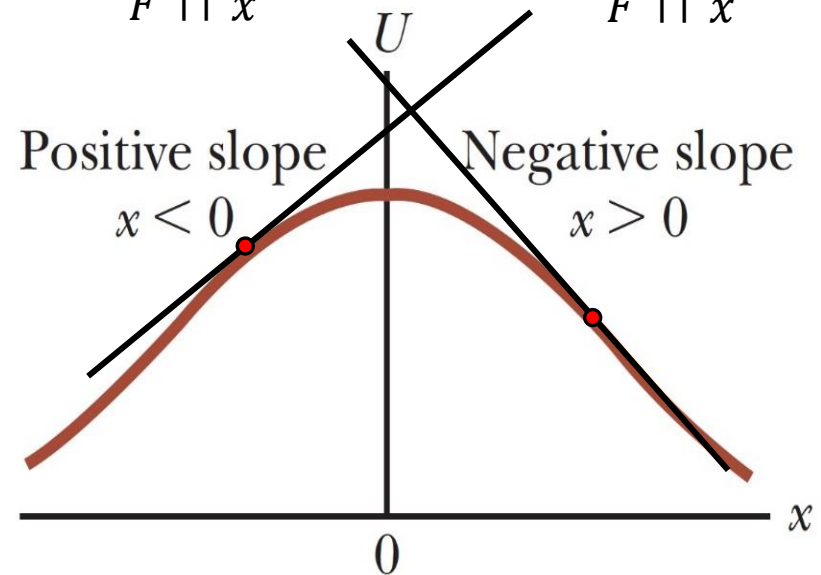
$$\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{x}$$

$$\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$$

$$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$$

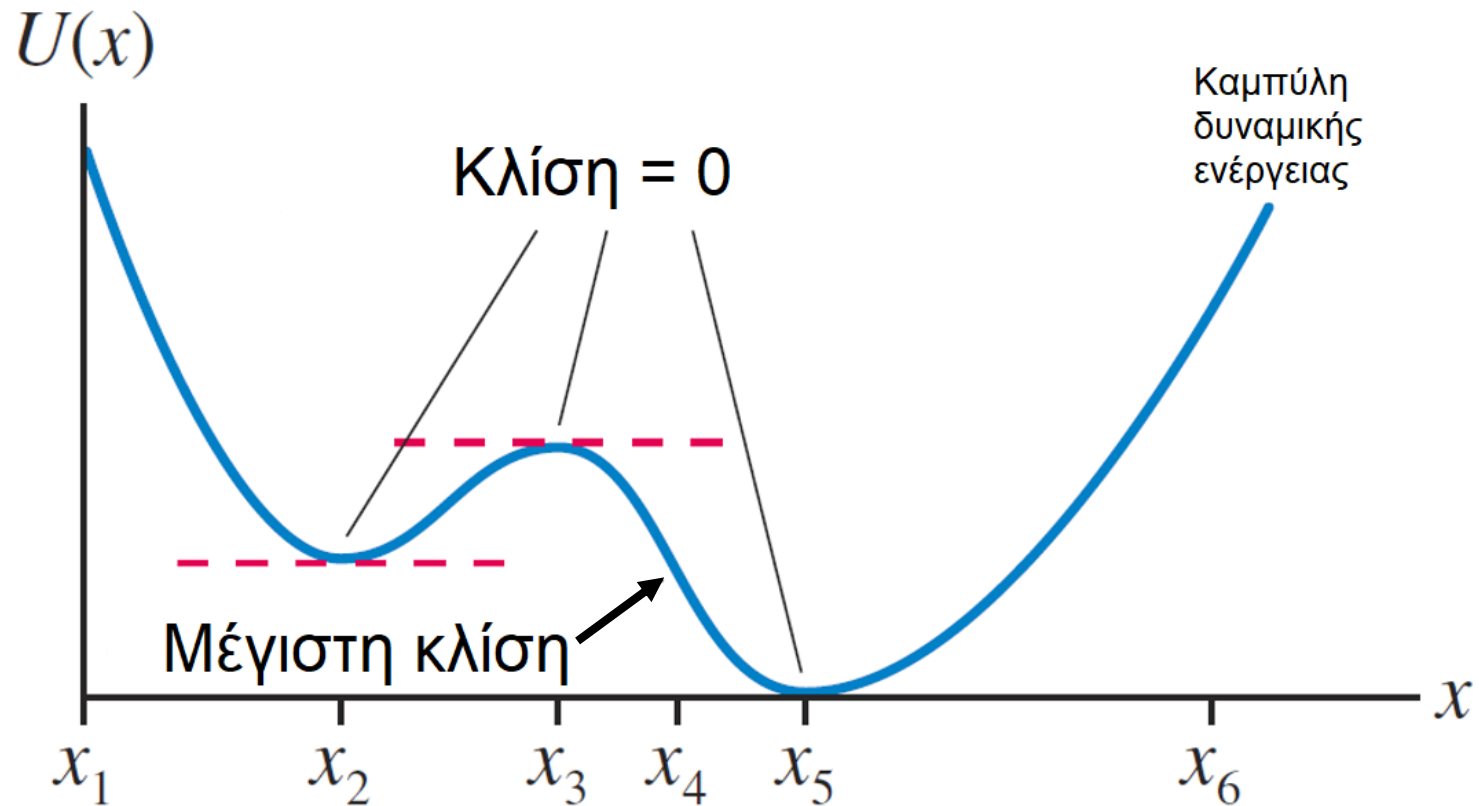
$$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$$

$$\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές** ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης ισορροπίας



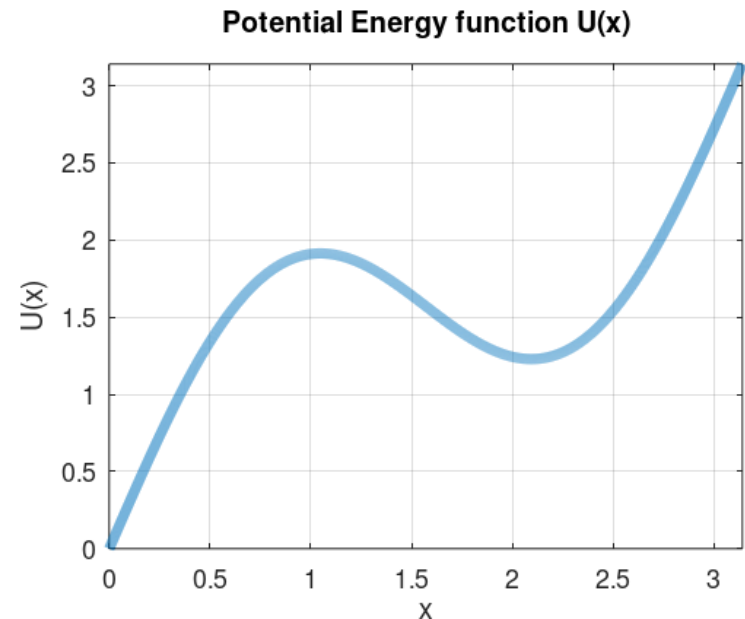
Ενέργεια Συστήματος

- Παράδειγμα:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.



Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

Τα σημεία ισορροπίας αποτελούν λύση της $F_x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{dU}{dx} = 0. \text{ Άρα } U'(x) = \frac{d}{dx} U(x) = (x + \sin(2x))' =$$

$$= 1 + (2x)' \cos(2x) = 1 + 2 \cos(2x). \text{ Άντικαθιστώντας,}$$

$$1 + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Στο διάστημα $[0, \pi]$ έχουμε: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, δύο θέσεις ισορροπίας.

Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Πρόταση 6.10 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b) , ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ .

(i) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.

(ii) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
- β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Με βάση το κριτήριο 2^ο παραχάγουμε:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = (1 + 2\cos(2x))' = 0 + 2 \cdot (2x)'(-\sin(2x)) = -4\sin(2x).$$

- $x_1 = \frac{\pi}{3}$, η 2^η παραχάγος δίνει $-4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \leadsto$ τοπικό
μέγιστο στην $U(x)$
 - $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, η 2^η παραχάγος δίνει $-4 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$ $\leadsto$ αρα ασταθής
περιοχή.
- Ευσταθής περιοχή ισορροπίας $\leftarrow$ τοπικό
ελάχιστο $\leftarrow$



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε δυο ενεργειακά θεωρήματα
 - ΘΜΚΕΕ
 - ΑΔΜΕ
 - Υπάρχει άλλο?
- Διαφορετικές υποθέσεις για καθένα από αυτά
- Οι υποθέσεις σχετίζονταν με το **σύστημα** και τις **δυνάμεις** που δρουν στο σύστημα
 - Εσωτερικές ή εξωτερικές
 - Συντηρητικές ή μη
- Ας κάνουμε μια τελευταία, ομαδική θεώρηση σε αυτά

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**

- Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
 - Υπάρχει ενεργειακό «πάρε-δώσε» με το περιβάλλον

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- **Εξωτερική** δύναμη αλλάζει μέσω έργου την κινητική ενέργεια ενός συστήματος-σώματος
- Έχουμε δει μόνο το **έργο** ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
- Φυσικά, υπάρχουν κι άλλοι τρόποι...

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενέργεια μεταφέρεται
στο σώμα μέσω
έργου.

© Cengage Learning/George Sample



a

Ενέργεια μεταφέρεται
εκτός του ραδιοφώνου
από το μεγάφωνο ως
μηχανικά κύματα.

© Cengage Learning/George Sample



b

Ενέργεια μεταφέρεται
στη λαβή του
κουταλιού μέσω
θερμότητας.

© Cengage Learning/George Sample



c

Ενέργεια εισάγεται
στο ρεζερβουάρ του
αυτοκινήτου μέσω
μεταφοράς ύλης.

Cocoon/Photodisc/Getty Images



d

Ενέργεια εισάγεται
στο σεσουάρ μέσω
ηλεκτρισμού.

© Cengage Learning/George Sample



e

Ενέργεια εξάγεται από
τη λάμπα με τη μορφή
ηλεκτρομαγνητικής
ακτινοβολίας.

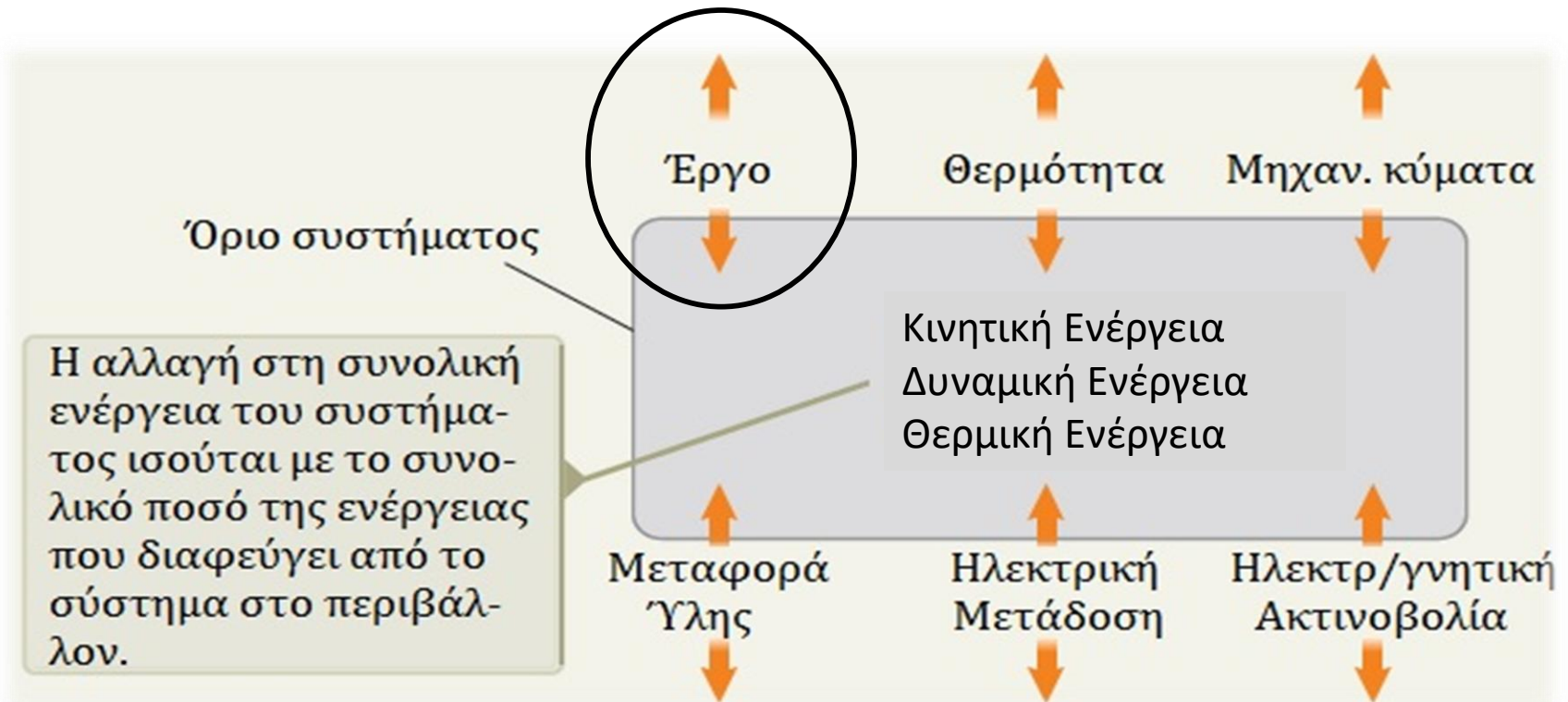
© Cengage Learning/George Sample



f

Διατήρηση της Ενέργειας

Μη απομονωμένα συστήματα



Διατήρηση της Ενέργειας

- Μη απομονωμένα συστήματα
- Αν η **συνολική** ενέργεια σε ένα σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει **ΜΟΝΟΝ** αν ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή στο περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον **μηχανισμό**
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta E_{system} = \sum T$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και **T είναι το ποσό της ενέργειας** που μεταφέρεται εκτός ή εντός συστήματος με κάποιο **μηχανισμό**

Διατήρηση της Ενέργειας

- Μη απομονωμένα συστήματα

ΔE_{system}

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \sum W_{ext.forces}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **μονομελές**, τότε

$$\Delta K = \sum W_{ext.forces}$$

ΘΜΚΕΕ

- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές** με παρουσία μόνο δυναμικών ενεργειών, τότε

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{ext.forces}$$

ΑΔΕ

Διατήρηση της Ενέργειας

- Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα
- Δεν υπάρχει «εισαγωγή/διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή
- Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta E_{system} = 0$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα
 - Αναγκαστικά πολυμελές σύστημα
 - Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$$

ΑΔΕ

αν ασκούνται **συντηρητικές** και **μη** δυνάμεις, δηλ. σε **κάθε** περίπτωση!

- Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

ΑΔΜΕ

μόνον όταν ασκούνται **αποκλειστικά** **συντηρητικές** δυνάμεις!

Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης
προβλημάτων

Σύστημα

Μονομελές

Πολυμελές

Μη απομονωμένο

Μη απομονωμένο

Απομονωμένο

Μόνο συντηρητικές
δυνάμεις

$$\Delta E_{sys} = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Αρχή
Διατήρησης
Ενέργειας

Θεώρημα
Μεταβολής Κινητικής
Ενέργειας – Έργου

Αρχή Διατήρησης
Μηχανικής
Ενέργειας

$$\Delta E_{sys} = 0$$

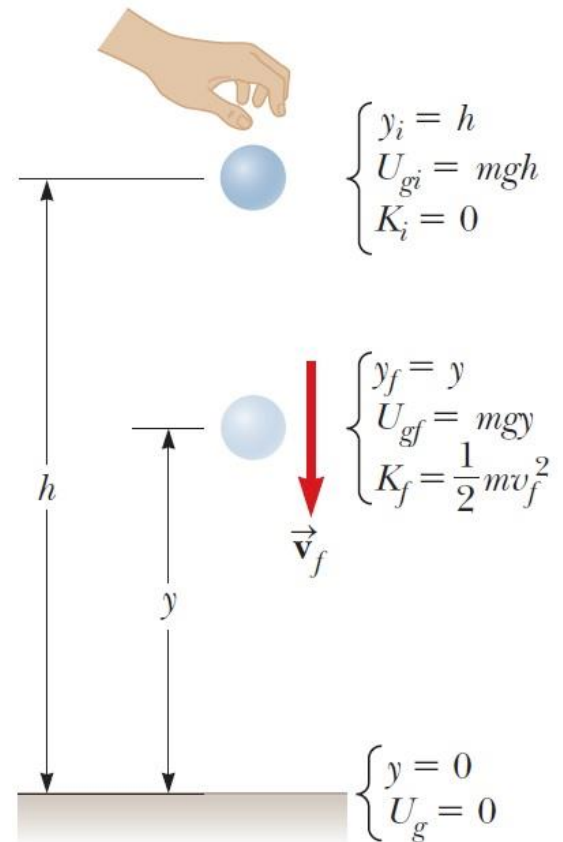
Διατήρηση της Ενέργειας

○ Παράδειγμα:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .

- A) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y . **Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.**

- B) Υπολογίστε ξανά το A) ερώτημα θεωρώντας ως **σύστημα την μπάλα**.



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .
- Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y .
Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

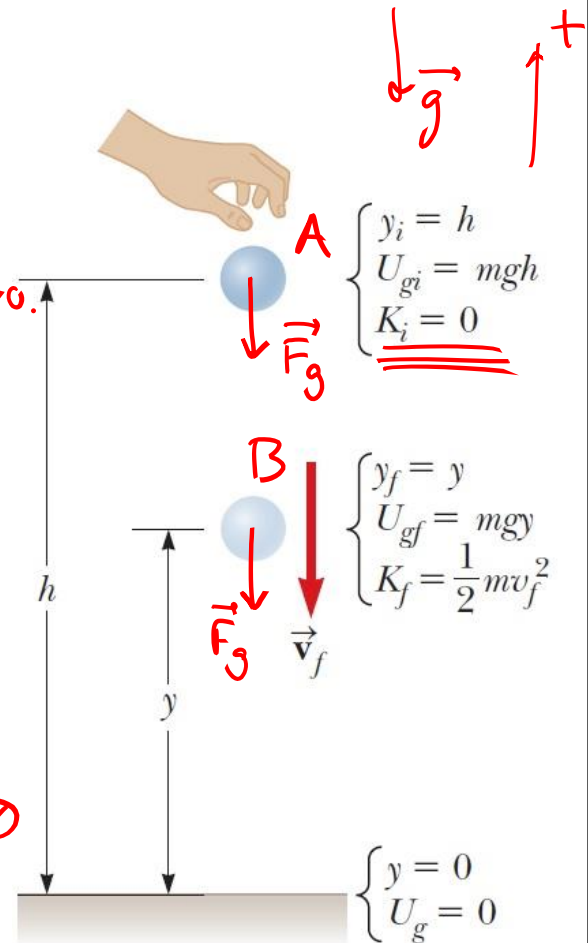
Σύστημα θεωρείται το $\{ \mu\alpha\lambda\alpha + Γ\eta \}$.

Το σύστημα είναι ποσoφoρoί και απομονωμένο.

Η δύναμη τα βάρους, $\vec{F}_g$, είναι η μόνη δύναμη στο σύστημα, είναι εσωτερική και συντηρητική. Άρα μπορούμε να πάρουμε

$$\begin{aligned} \Delta ME_{A \rightarrow B} \quad \Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{gA \rightarrow B} &= 0 \\ K_B - K_A + U_B - U_A &= 0 \\ \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + mgy - mgh &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } u_B^2 = 2g(h-y) \Rightarrow u_B = -\sqrt{2g(h-y)}.$$



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h .
- Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

Θεωράμε ως σύστημα το $\{ \text{μπάλα} \}$. Το σύστημα είναι μονογενές και μη-απορροφητικό. Εφαρμόζεται το ΘΝΚΕΕ.

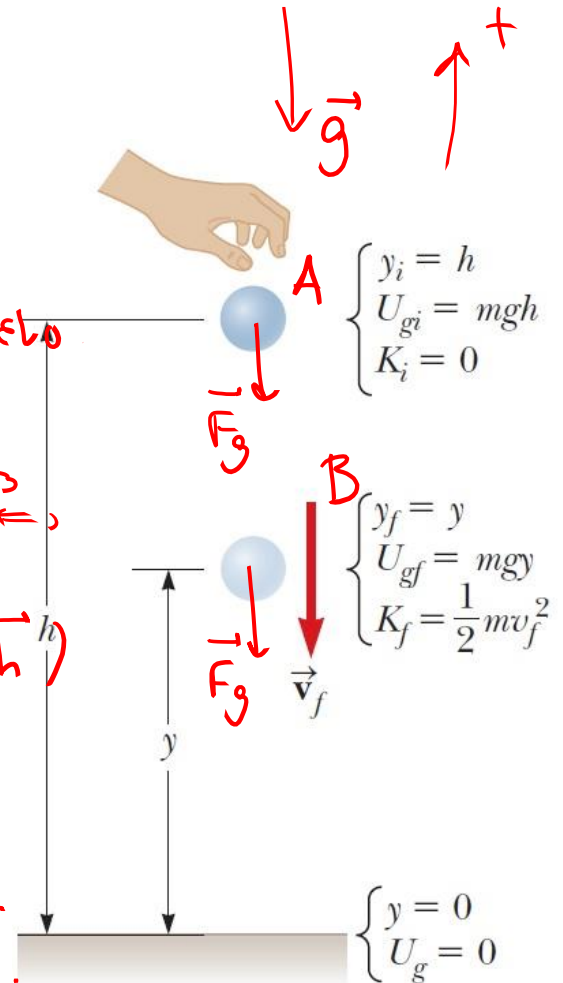
$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{\text{ext}} \Leftrightarrow K_B - K_A = W_{F_g}^{A \rightarrow B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = m \vec{g} \cdot (\vec{y} - \vec{h})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = -m g \vec{j} \cdot (y - h) \vec{j} =$$

$$= -m g (y - h) = m g (h - y)$$

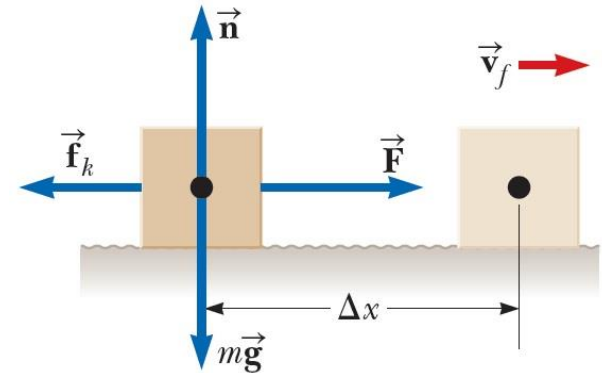
$$\text{Άρα } u_B^2 = 2g(h - y) \Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h - y)}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

○ Παράδειγμα:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



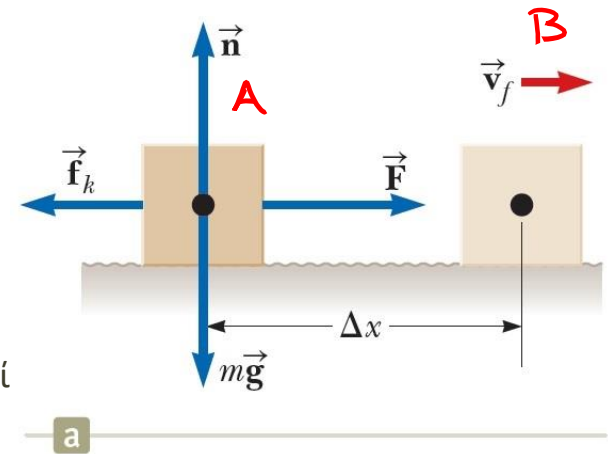
$$W_F = F \Delta x \cos(\theta)$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Επιλέξαμε ως σύστημα το { σώμα μάζας m }, που ελπίδα και η ανεξαρτησία. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ_{A-B}:

$$\Delta K_{A-B} = \sum W_{\text{ext}} \Leftrightarrow K_B - K_A = W_F + \cancel{W_{F_g}} + \cancel{W_n} + W_{f_k}$$

$$\text{Άρα } K_B - K_A = W_F + W_{f_k} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = F \Delta x - f_k \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - f_k \Delta x. \left\{ \Rightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - \mu_k n \Delta x \quad (1) \right.$$

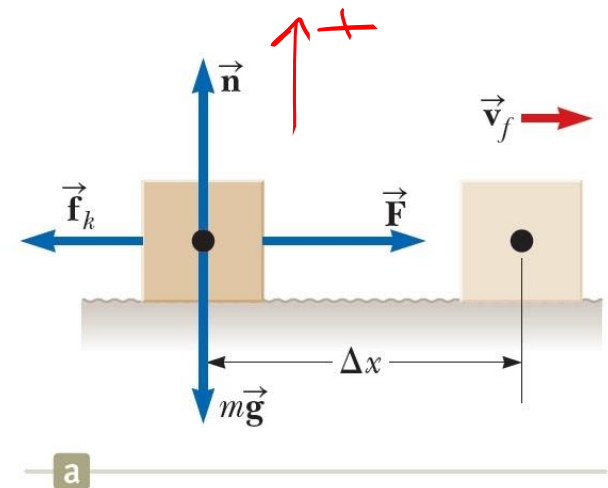
$$f_k = \mu_k n$$

Το σώμα ισορροπεί στον γ'γ $\Rightarrow 1^{\circ}$ Ν. Newton. $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- A) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



$$\Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n - mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = mg} \quad (2)$$

$$\text{Η } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - \mu_k m g \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B^2 = \frac{2F \Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B \approx 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } \vec{u}_B \approx 1.8 \vec{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Λύστε το ξανά θεωρώντας ως σύστημα το σώμα και την οριζόντια επιφάνεια!

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίζουμε ότι **έργο == μεταφορά ενέργειας**
 - Ερώτημα: Πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια?
 - Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να κινεί ένα ασανσέρ μάζας 1500 kg για 5 ορόφους, έχει μεγάλη σημασία αν ο κινητήρας το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! 😊
- Το «πόσο γρήγορα» υποδηλώνει ένα ρυθμό
 - Ρυθμό μεταφοράς ενέργειας == **στιγμιαία ισχύς P (Power)**

$$P = \frac{dE}{dt}$$

- Μονάδα μέτρησης: $1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$

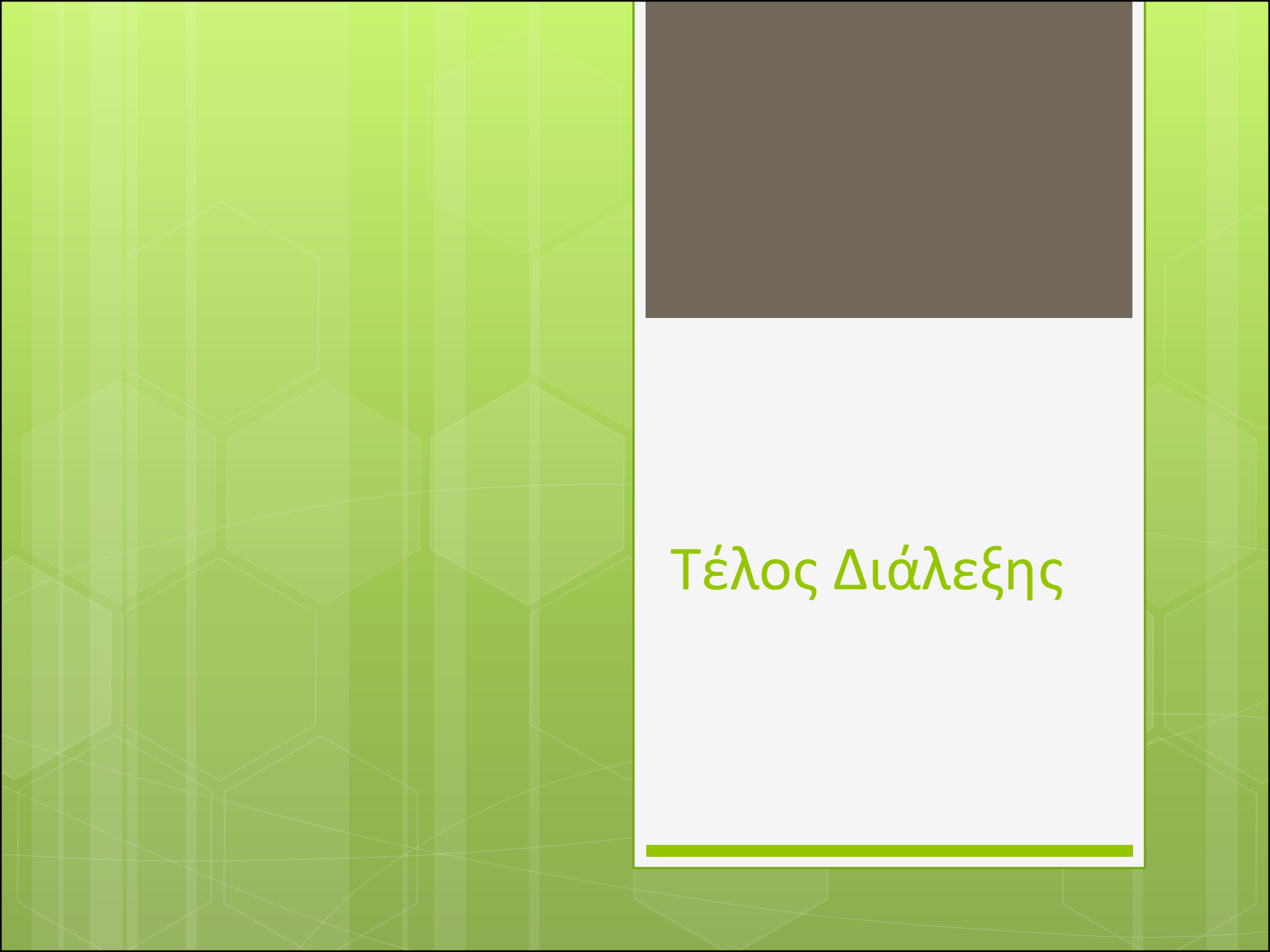
Διατήρηση της Ενέργειας

- Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο **ρυθμός παραγωγής έργου**
- Μέση ισχύς σε διάστημα Δt

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t}$$

- Στιγμιαία ισχύς (για έργο σταθερής δύναμης)

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$



Τέλος Διάλεξης