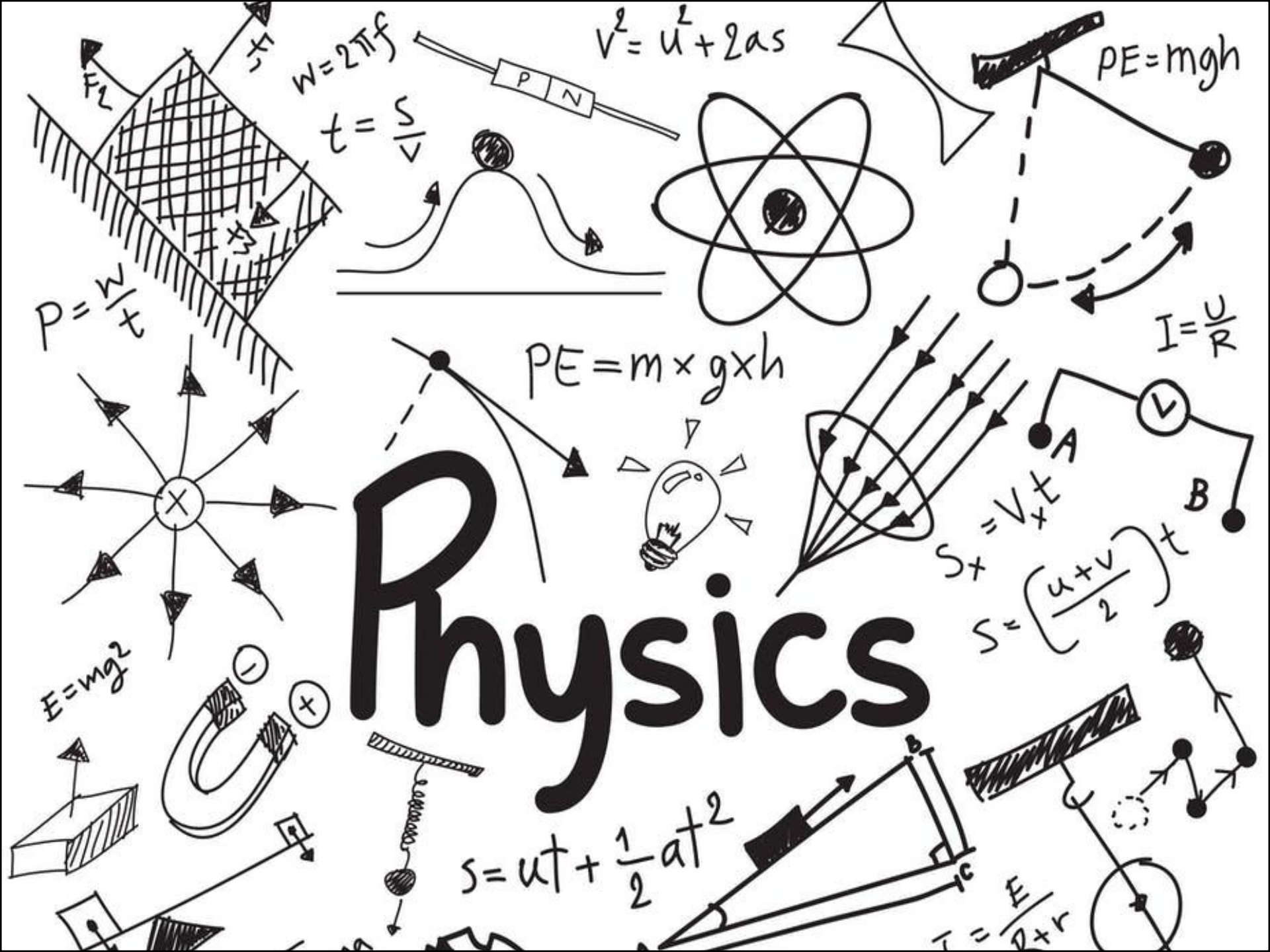

Physics
w=2πf
v² = u² + 2as
PE=mgh
t = s/v
P = W/t
PE = m × g × h
I = U/R
A
B
Sx = Vx t
S = ((u+v)/2) t
E=mg²
s = ut + ½at²
I = E/(R+r)

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **COVID attention**: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

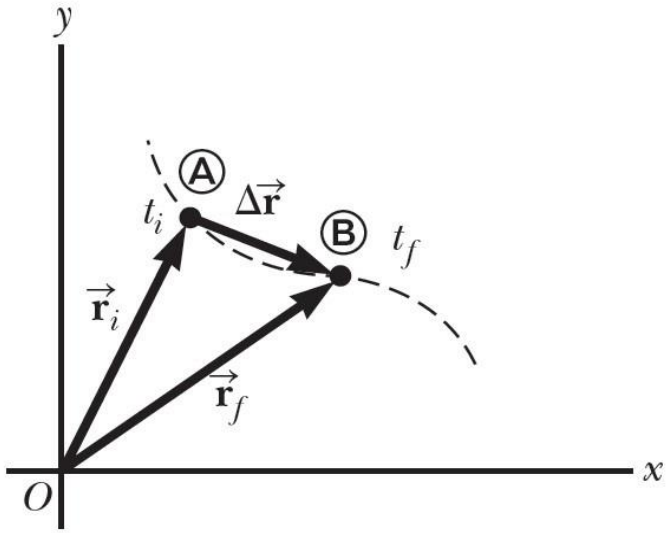
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review…)

- **Διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{\mathrm{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής κι αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{\mathrm{r}} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$
- **Μέση Ταχύτητα**
  - $\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}$
- **Στιγμιαία ταχύτητα**
  - $\vec{\boldsymbol{v}} \equiv \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$



- **Μέση Επιτάχυνση**
  - $\vec{\boldsymbol{a}}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_f - \vec{\boldsymbol{v}}_i}{\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i}$
- **Στιγμιαία Επιτάχυνση**
  - $\vec{\boldsymbol{a}} \equiv \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{\boldsymbol{r}}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review…)

- Εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>
  - $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$
    - $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
    - $u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$
  - $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
    - $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
    - $y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή (ή μηδενική) επιτάχυνση!

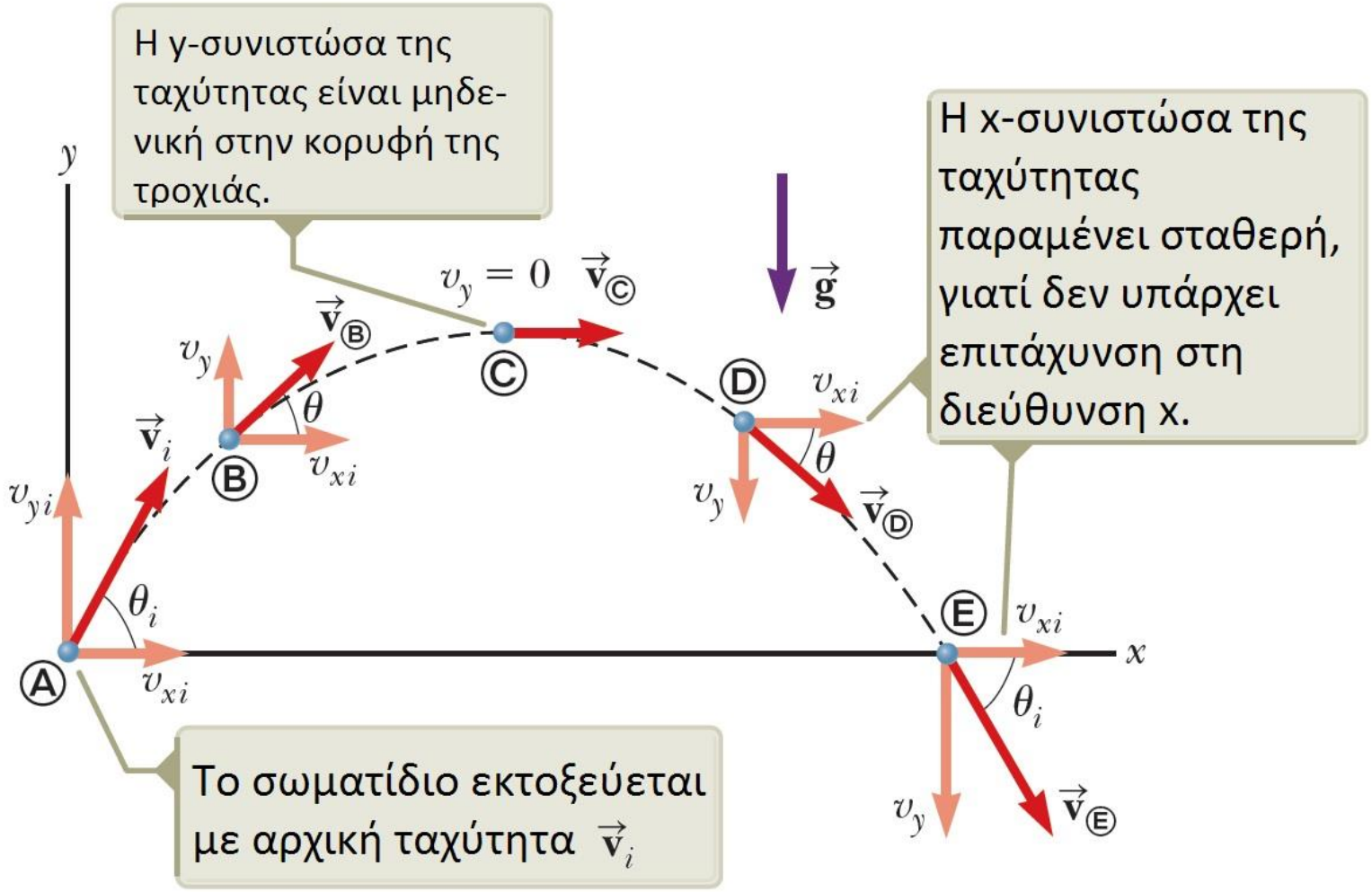
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή.**

- Το μόνο που αλλάζει είναι
  A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας** $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x.
  B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.

- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή…

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

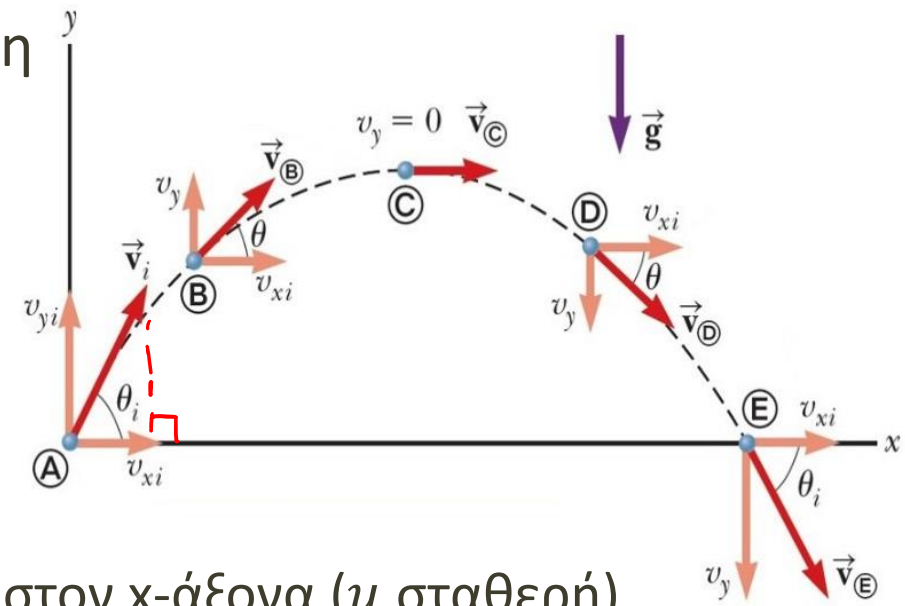


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις **βολής**
  - $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$
  - $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 6 (3 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση



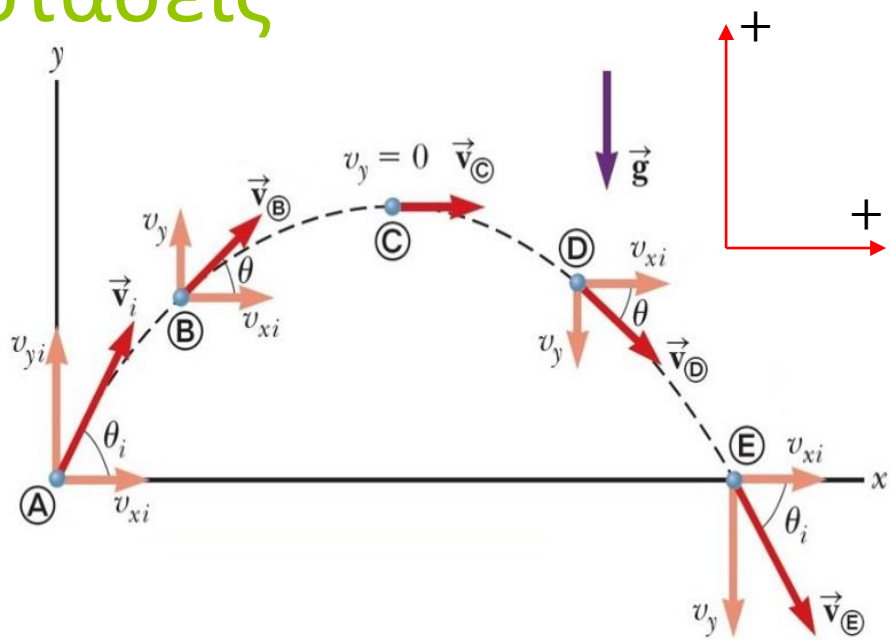
- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:
  - Α) <u>Μηδενική επιτάχυνση</u> στον x-άξονα (<u>u σταθερή</u>)
  - Β) <u>Σταθερή επιτάχυνση</u> στον y-άξονα (g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- **Αλγεβρικές εξισώσεις**
- **1)** $x_f = x_i + u_{xi}t$
- **2)** $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

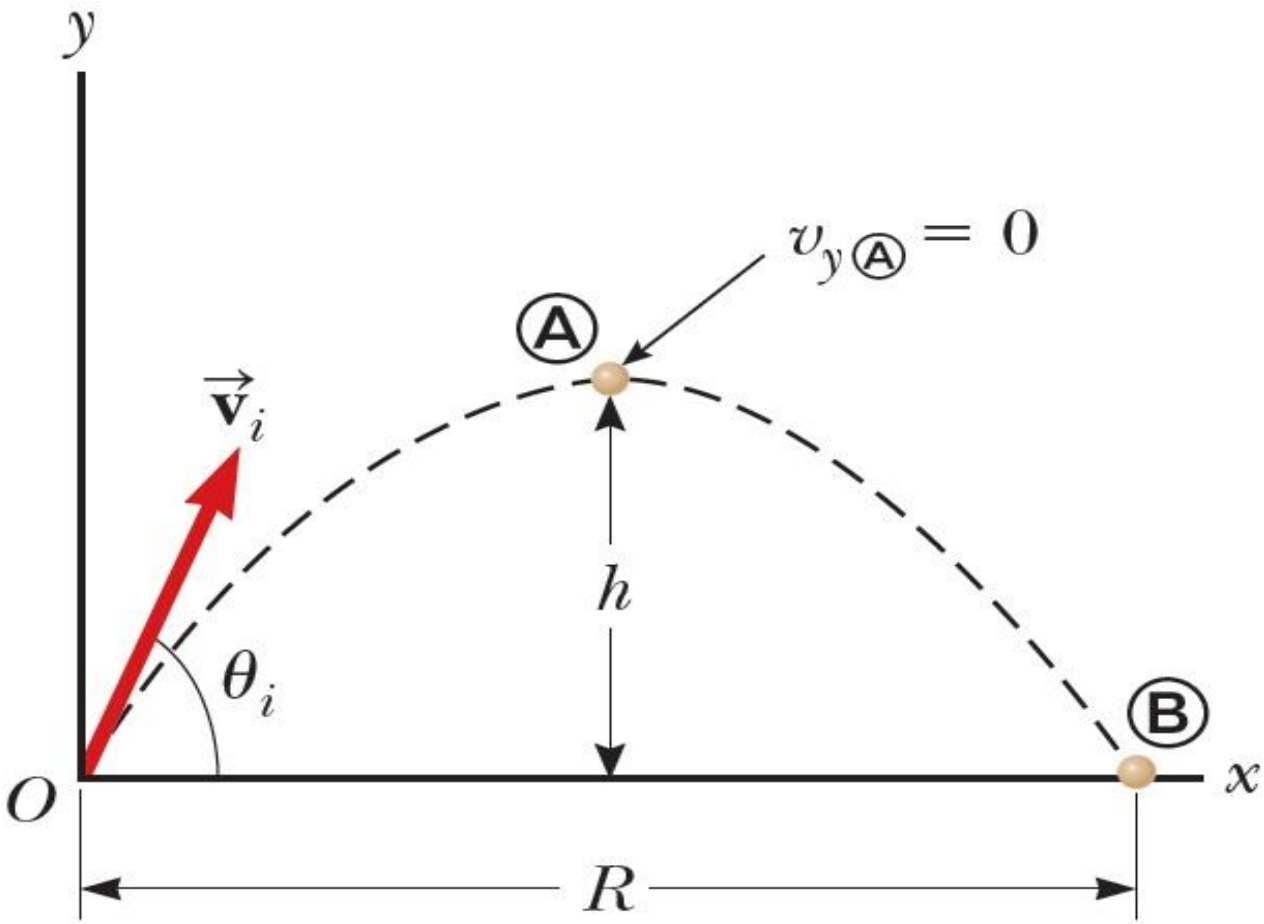
$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

με $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

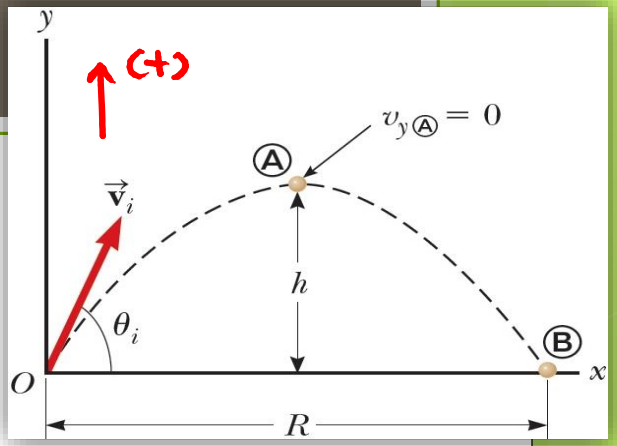
- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Εύρος R** και **Μέγιστο Ύψος h** βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

$$h = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Επίσης,

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

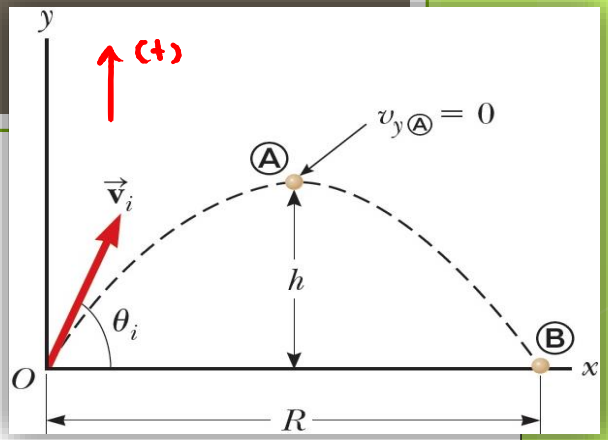
Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$\boxed{h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΒ:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos\theta_i \, t$

Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin\theta_i \Rightarrow t = \frac{2 u_i \sin\theta_i}{g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

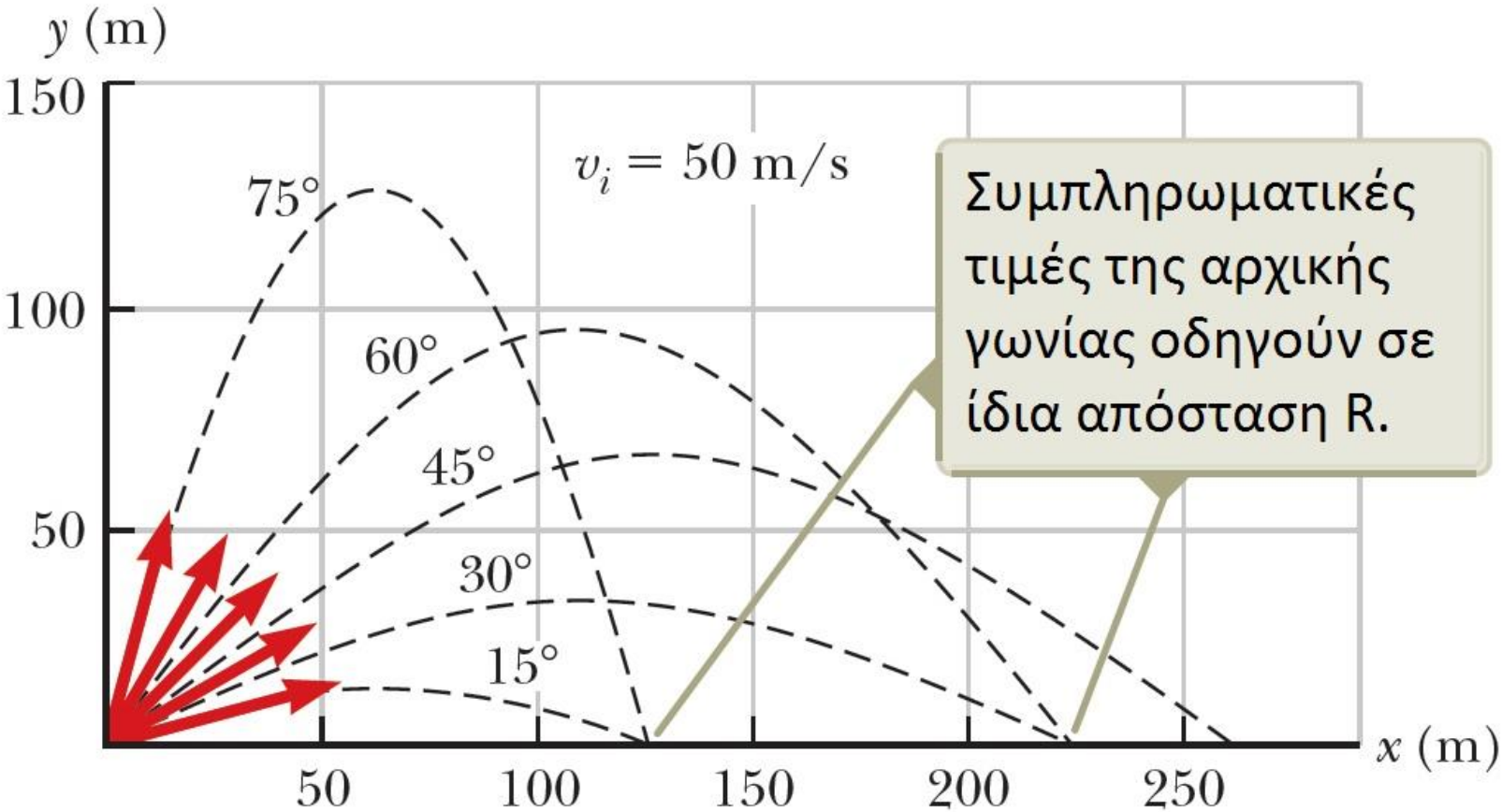
$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2 u_i \sin\theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

Έτσι

$$\boxed{R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}}$$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Συμπληρωματικές τιμές της αρχικής γωνίας οδηγούν σε ίδια απόσταση R.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40˚ με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.

    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

$\vec{g}$

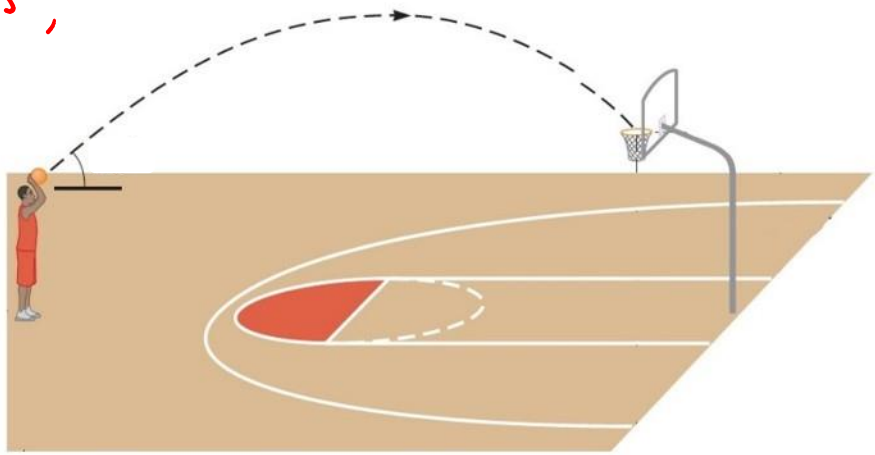
$\vec{a}_y = -\vec{g} = -9.8\vec{j}\ \frac{m}{s^2}$

$\vec{a}_x = \vec{0}$

Η επιτάχυνση $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ εξαρτάται μόνο από την επιτάχυνση της βαρύτητας, άρα

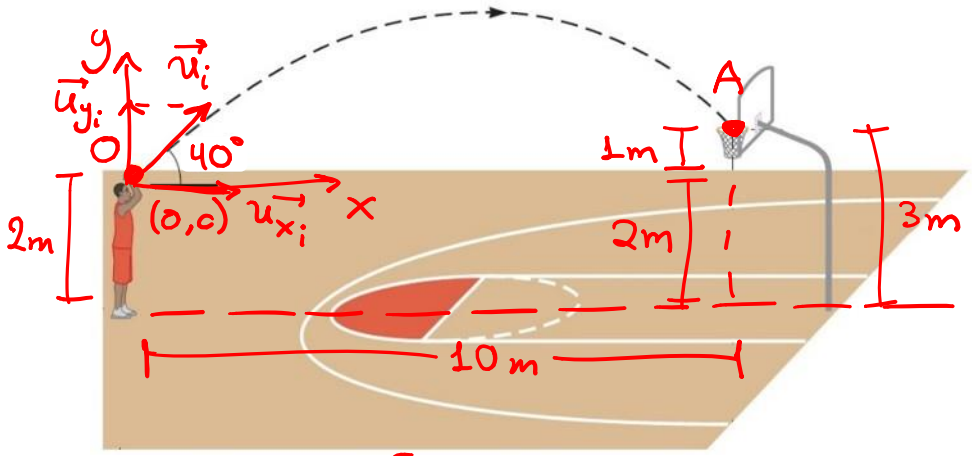
$$\vec{a} = -\vec{g} = -9.8\vec{j}\ \frac{m}{s^2}$$

σε <u>όλη</u> την τροχιά της μπάλας.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84,$
    $\cos(40^o) = 0.76,$
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Θεωρούμε σημείο O(0,0) τα χέρια του παίκτη, δηλ. όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια του. Έχουμε:

$u_{x_i} = u_i \cdot \cos(\theta_i)$
$u_{y_i} = u_i \cdot \sin(\theta_i)$

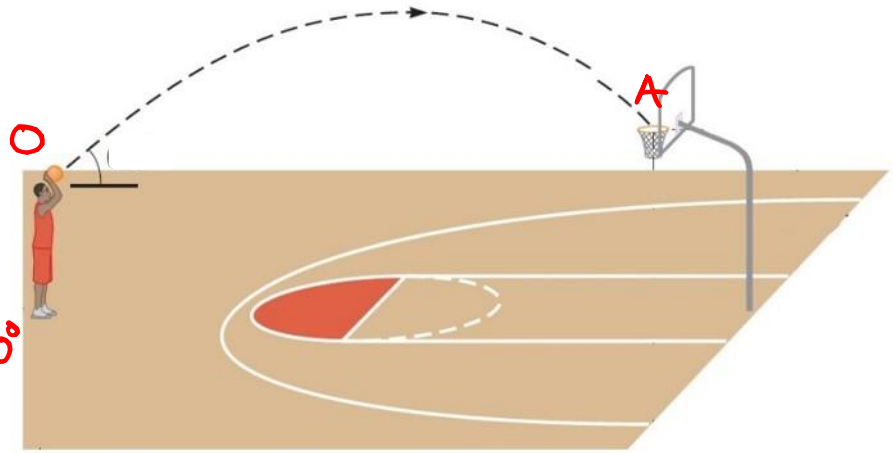
Στον άξονα x'x έχουμε σταθερή ταχύτητα και στον y'y σταθερή επιτάχυνση.

Στον x-άξονα: ΟΑ διαδρομή → $x_A = x_0 + u_{x_i} \cdot t = \cancel{x_0}^{\,0} + u_i \cos\theta_i \cdot t$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84,$
    $\cos(40^o) = 0.76,$
    $\cos^2(40^o) = 0.58$

$\vec{g}$ ↓ +, +



Λύνοντας ως προς t : $t = \frac{x_A}{u_i \cos 40^o} = \frac{10}{u_i \cos 40^o}$ (1).

Στον y-άξονα: $y_A = y_0 + u_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow 1 = 0 + u_i \sin 40^o \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ (2)

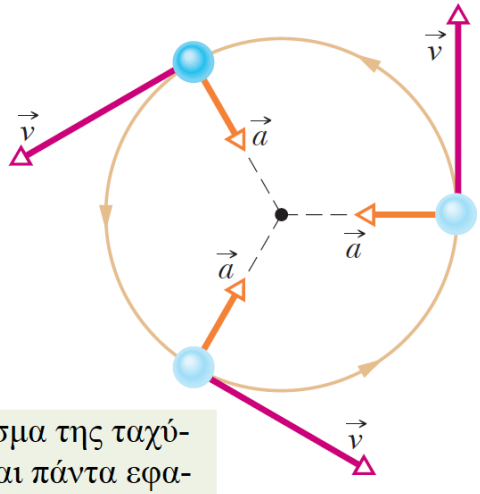
(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $1 = \cancel{u_i} \sin 40^o \cdot \frac{10}{\cancel{u_i} \cos 40^o} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(\frac{10}{u_i \cos 40^o}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 10 \cdot \tan 40^o - 4.9 \cdot \frac{100}{u_i^2 \cos^2 40^o} \Rightarrow \ldots u_i \cong 10.7 \frac{m}{s}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!
  - Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
    - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
      - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

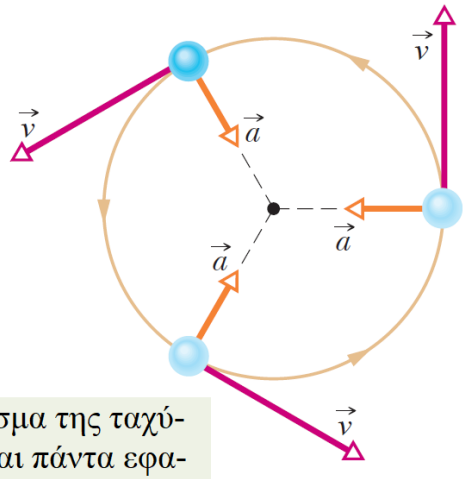
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Ταχύτητα
    - Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
    - Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης
  - Επιτάχυνση
    - Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
    - Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

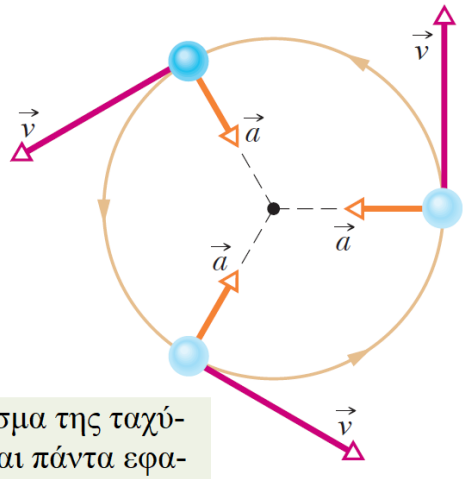
- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

  - Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**
  - Από την ίδια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
  - Ο λόγος

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

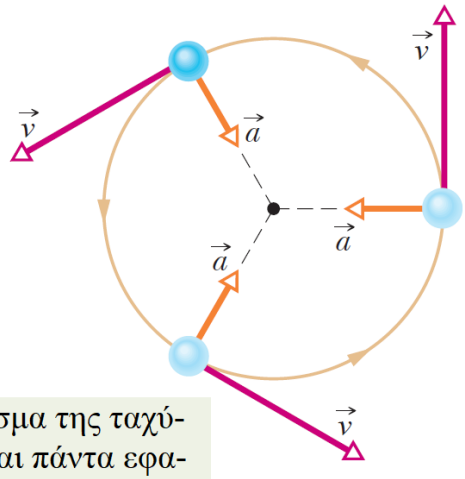
ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

  - Ισούται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση

  - Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \qquad \text{και} \qquad \alpha = r\omega^2$$

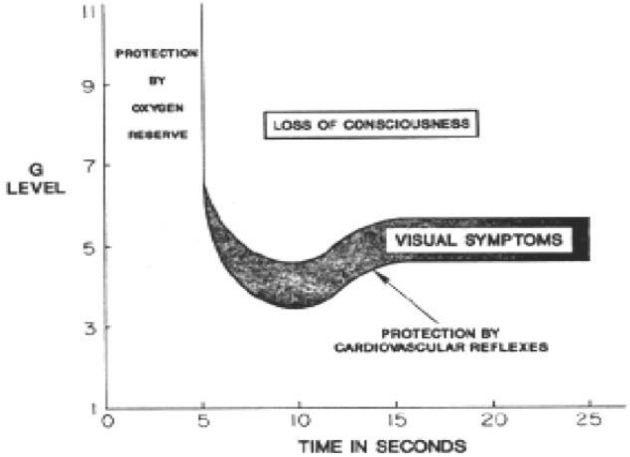
Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.

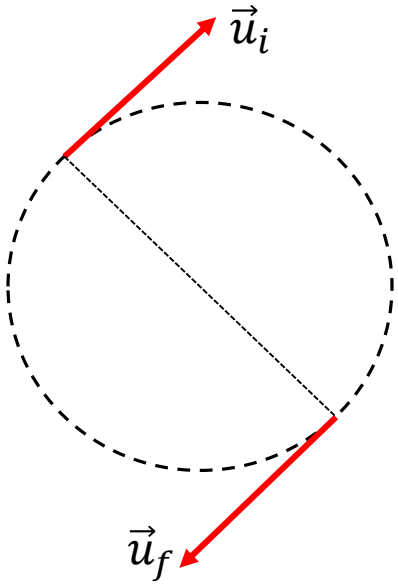


Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

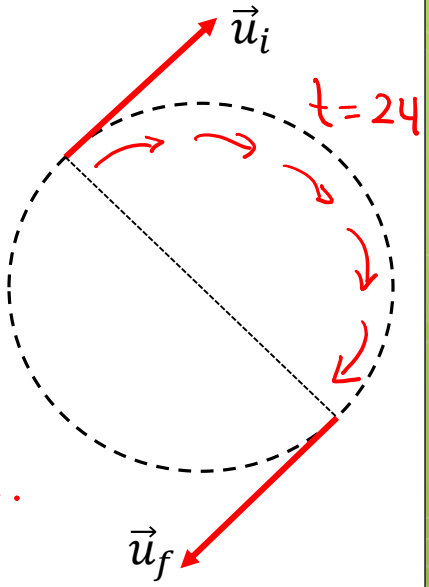
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?





Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?



Ξέραμε ότι $a = \frac{u^2}{r}$ αλλά δε γνωρίζαμε το r.

Όμως $u = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{uT}{2\pi}$ και άρα

$$a = \frac{2\pi u}{T}.$$

Επίσης αναγνωρίζαμε ότι $\frac{T}{2} = 24\text{ s} \Rightarrow T = 48\text{ s}.$

Τέλος, $|\vec{u}| = |\vec{u}_i| = |\vec{u}_f| = \sqrt{400^2 + 500^2} \simeq 640.3\ \frac{m}{s}$

Άρα $a = \frac{2\pi u}{T} \simeq 83.8\ \frac{m}{s^2}$ που ισούται με $\simeq 8.6g$.

https://www.youtube.com/watch?v=XqckN5OchAI

Τέλος Διάλεξης