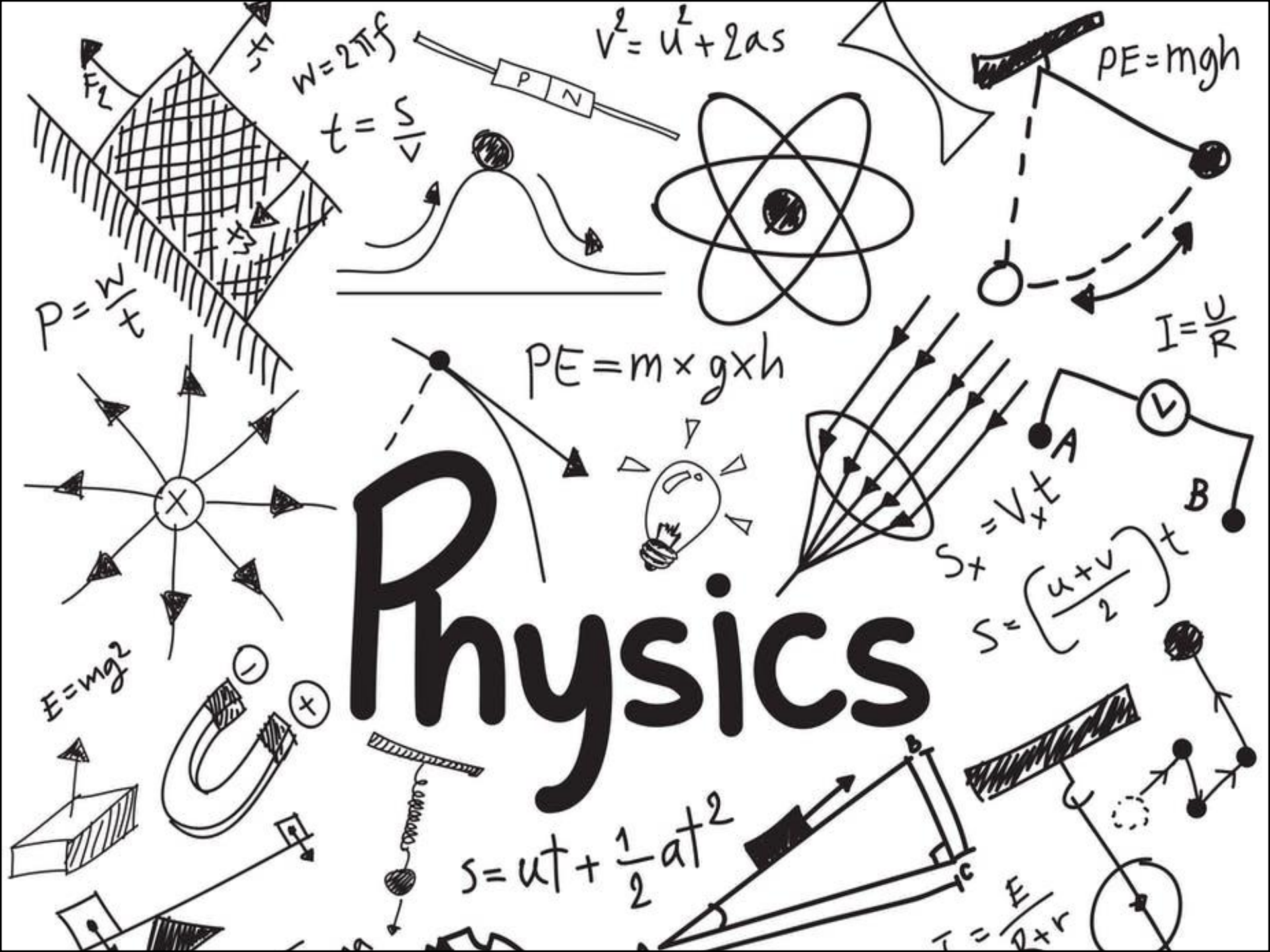

Physics
w=2πf
v² = u² + 2as
PE=mgh
t = s/v
P = W/t
PE = m × g × h
I = U/R
A
B
Sx = Vx t
S = ((u+v)/2) t
E=mg²
s = ut + ½at²
I = E/(R+r)

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **COVID attention**: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Κίνηση σε μια Διάσταση (review…)

- **Μοντέλα Κίνησης σε μια διάσταση**
- **Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα**
  - Περιγράφουμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος με μηδενική επιτάχυνση
- **Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση**
  - Περιγράφουμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος με σταθερή επιτάχυνση
- Κάθε μοντέλο «έρχεται» με τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση

Κίνηση σε μια Διάσταση (review…)

- Ειδική περίπτωση: $\boldsymbol{a_x}$ **μηδενική (δηλ. ταχύτητα σταθερή)**

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Ειδική περίπτωση: $\boldsymbol{a_x}$ **σταθερή,** $\boldsymbol{a_x \neq 0}$

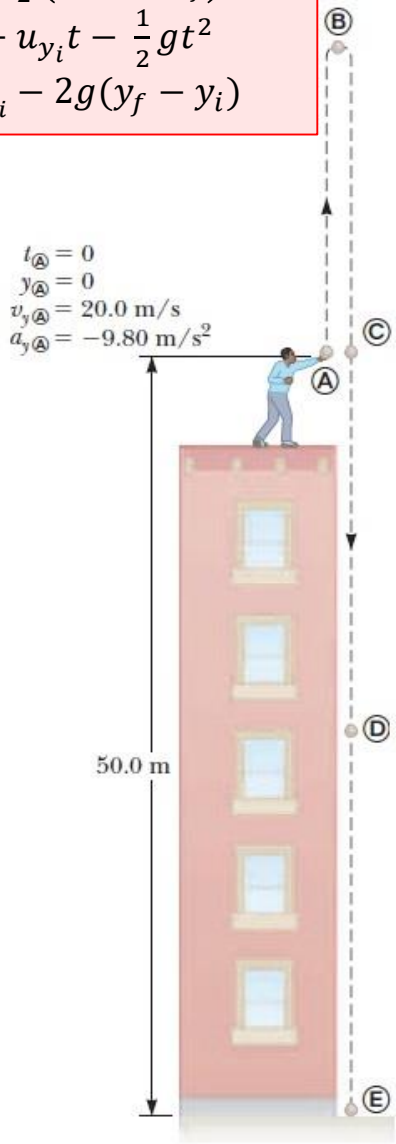
1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg} t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Αν η κίνηση είναι κατακόρυφη:
$x := y$
$a_y := -g$
θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

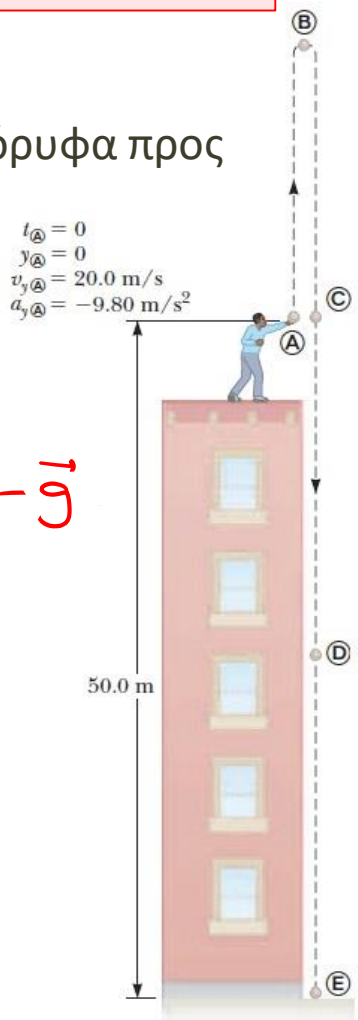
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.



Η κίνηση είναι ευθύγραμμη σε έναν άξονα y'y (κατακόρυφη) με σταθερή επιτάχυνση, $\vec{a}_y = -\vec{g}$

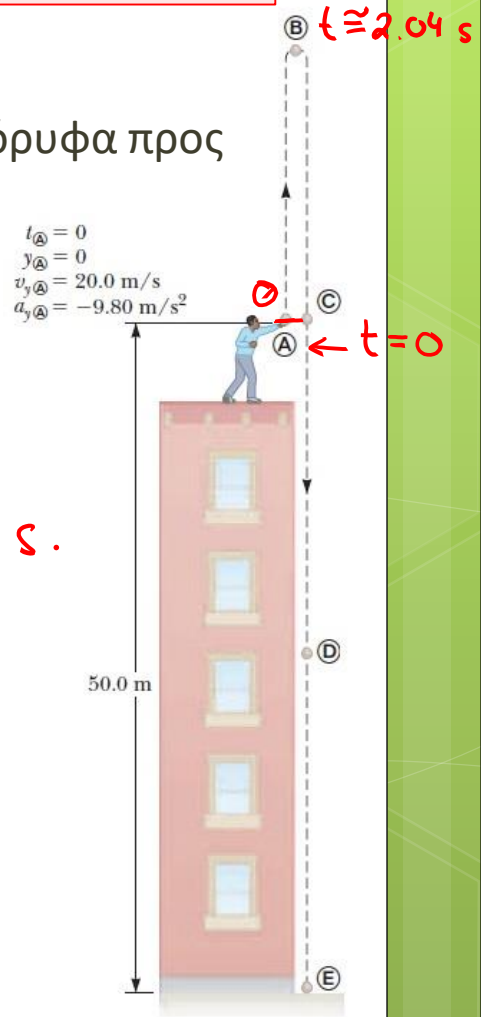
$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$\uparrow +$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.



Διαδρομή μπάλας A → B: Από ε.Τ. 1, έχαμε

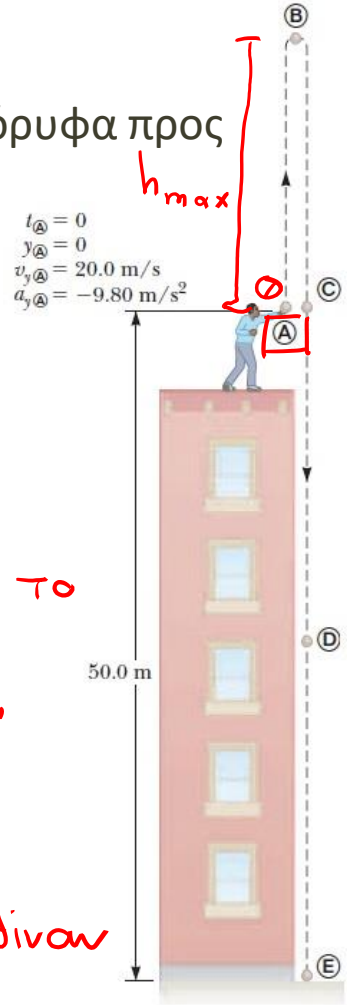
$u_B = u_A - gt \Leftrightarrow 0 = 20 - 9.8t \Leftrightarrow t = \frac{20}{9.8}$ s.

Οπότε $t \simeq 2.04$ s.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.



Διαδρομή Α → Β: Από εξ. 4, έχουμε:

$y_B = y_A + u_A t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow$

$h_{max} = 0 + 20 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 t^2$, το t ισούται με το χρόνο που απαιτείται για την κίνηση Α → Β,

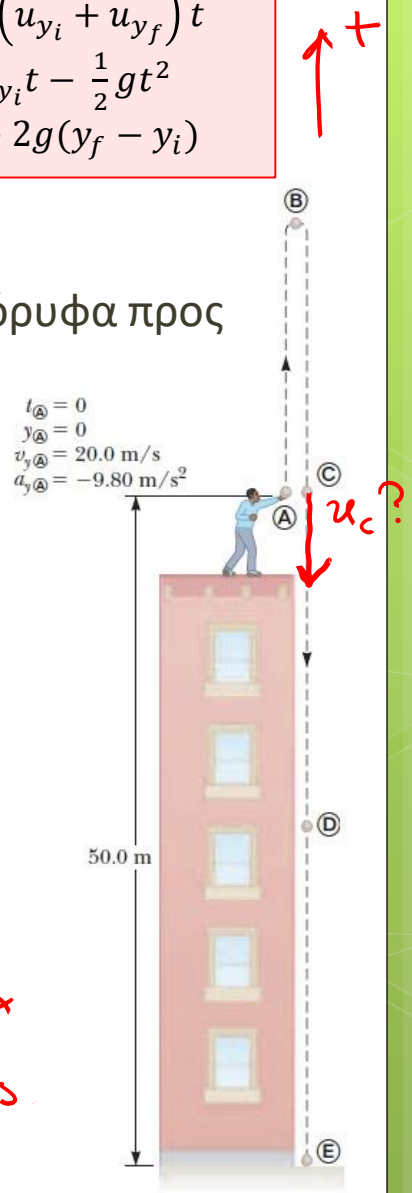
δηλ. $t \cong 2.04$ s $= \frac{20}{9.8}$ s. Αντικαθιστώντας,

$h_{max} = y_B \cong 20.4$ m. Δείξτε ότι οι εξ. 3, 5 δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Διαδρομή A → C : Από την εξ. 5, έχουμε:

$$u_c^2 = u_A^2 - 2g(y_c - y_A) \Leftrightarrow$$

$$u_c^2 = (20)^2 - 2 \cdot 9.8(0 - 0)$$

$$u_c^2 = 400 \Rightarrow u_c = \pm 20 \frac{m}{s}$$

Δεκτή λύση η $u_c = -20 \frac{m}{s}$ γιατί το διάνυσμα $\vec{u}_c$ είναι αντίθετο της θετικής φοράς της κίνησης

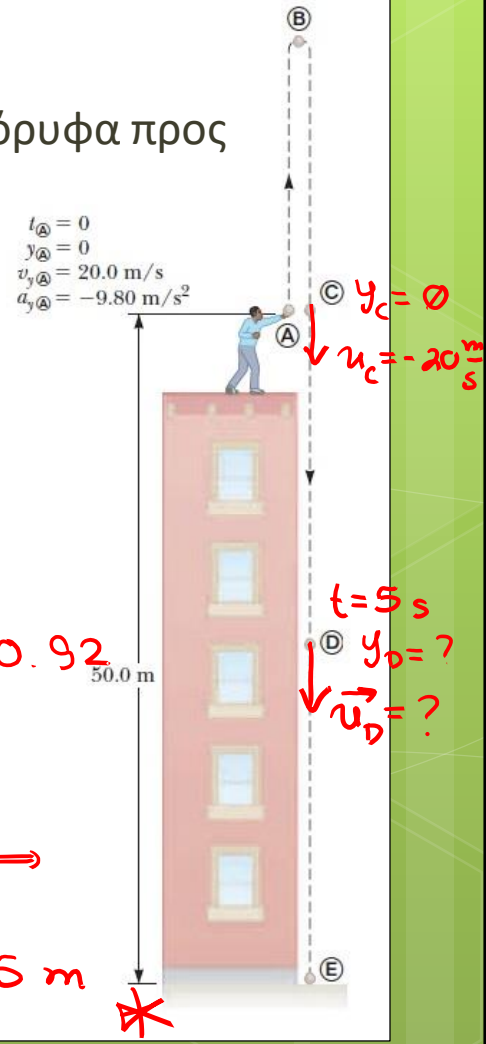
Άρα $\vec{u}_c = -20\vec{j} \frac{m}{s}$

$* \text{ Άρα } \vec{y}_D = -22.5\,\vec{j}\ m$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5\ s$.



Διαδρομή C → D: Από εξ. 1, έχουμε:

$u_D = u_C - gt \Leftrightarrow u_D = -20 - 9.8\,t$

Το t ισούται με το χρόνο C → D, που είναι

$t = 5 - 4.08 = 0.92\ s$. Άρα $u_D = -20 - 9.8 \cdot 0.92$

$\Rightarrow u_D \cong -29\ \frac{m}{s}$, δηλ. $\vec{u}_D = -29\,\vec{j}\ \frac{m}{s}$

Από εξ. 5, έχουμε: $u_D^2 = u_C^2 - 2g(y_D - y_C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-29)^2 = (-20)^2 - 2 \cdot 9.8(y_D - 0) \Rightarrow y_D = -22.5\ m$

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
  - Κίνηση στο επίπεδο
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
  - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
  - Οποιασδήποτε μορφής βολής/βαλλιστική κίνηση
  - Ηλεκτρόνια σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία
  - Κυκλική κίνηση δορυφόρου

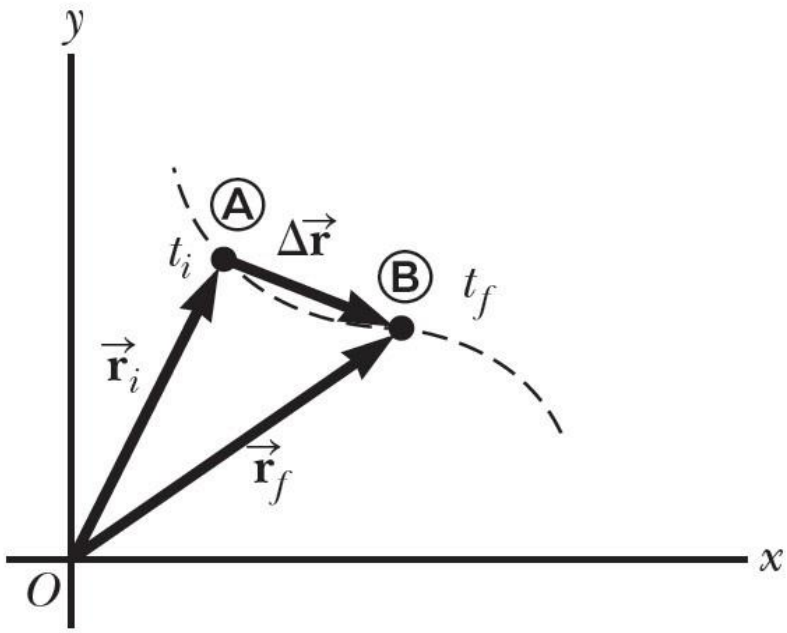
κ.α.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο xy
  - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - …αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
  - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**
- Άρα η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{\mathbf{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}$$

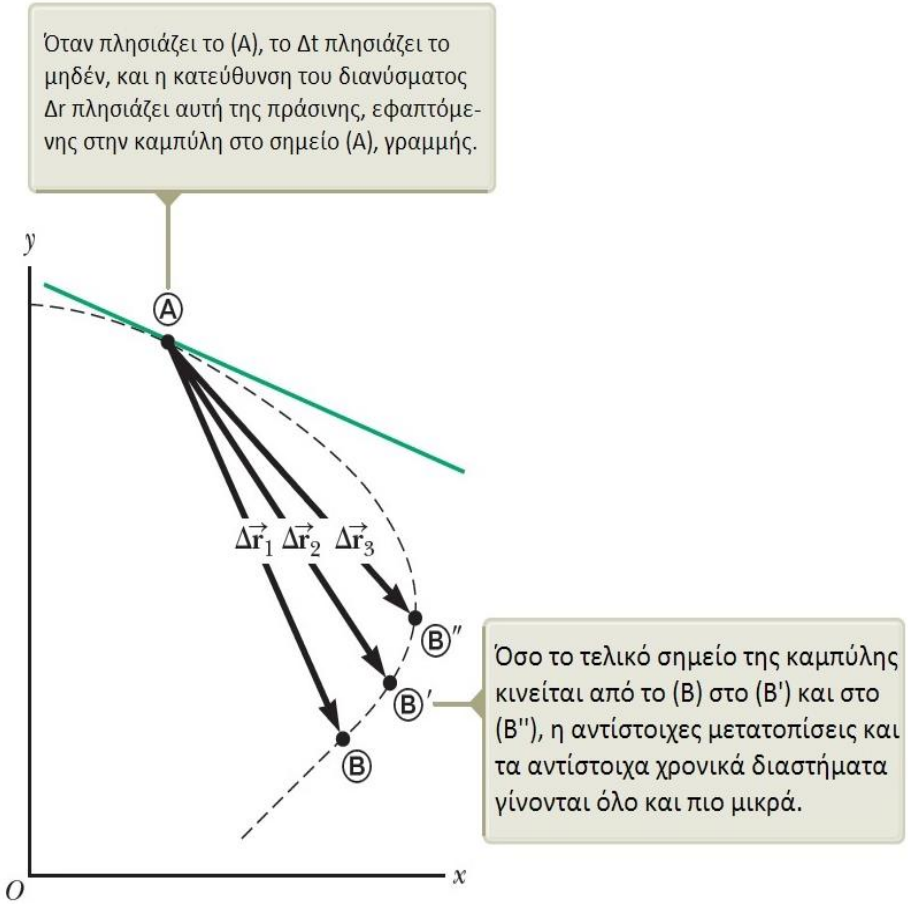
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, Α και Β.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (Β, Β’, Β’’)
- Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α.



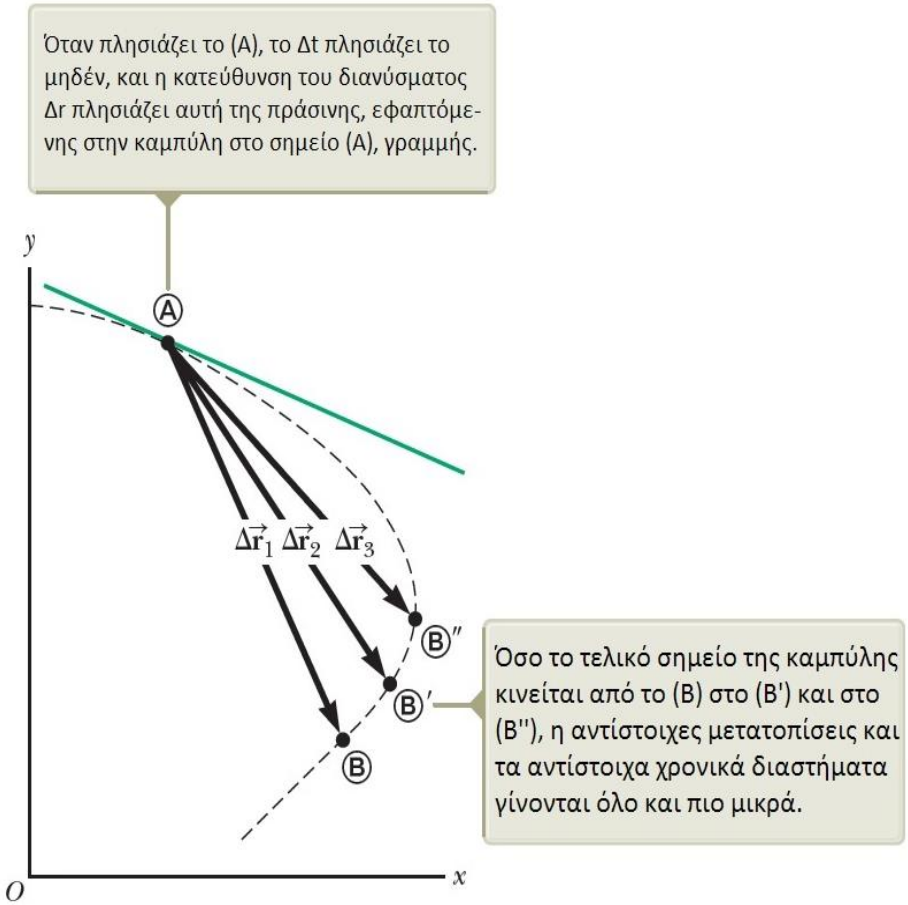
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο
- Μέτρο ταχύτητας $= |\vec{v}|$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

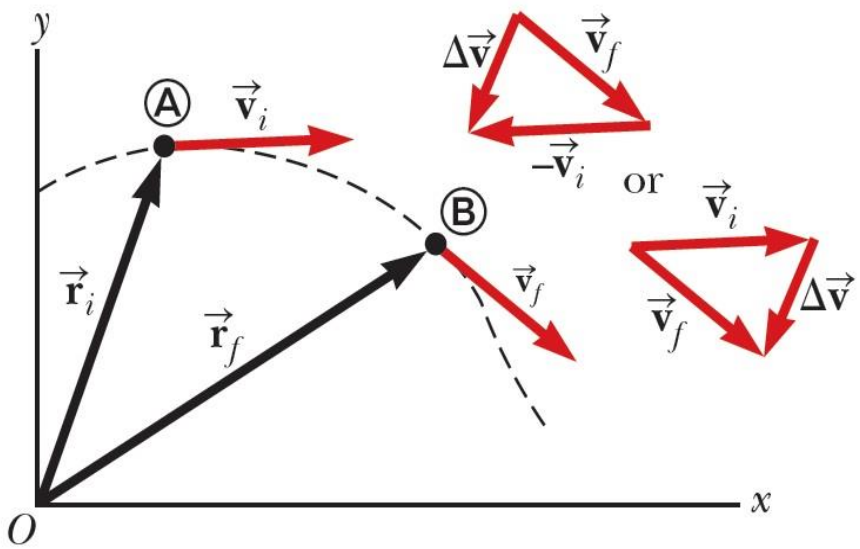
- **Μέση Επιτάχυνση**

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta\vec{v}$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} \equiv \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με **σταθερή** επιτάχυνση
  - …όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση

- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
  - **Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:**
    - **Τον άξονα των x**
    - **Τον άξονα των y**

- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{\boldsymbol{r}}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{v}}$, ως

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \ , \qquad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{u_y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} &= \left(u_{x_i} + a_x t\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(u_{y_i} + a_y t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ &= \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \underbrace{(x_i\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_i\vec{\boldsymbol{\jmath}})}_{\vec{r}_i} + \underbrace{\left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)}_{\vec{u}_i \cdot t}t + \frac{1}{2}\underbrace{\left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)}_{\vec{a}}t^2$$

- Έτσι,

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

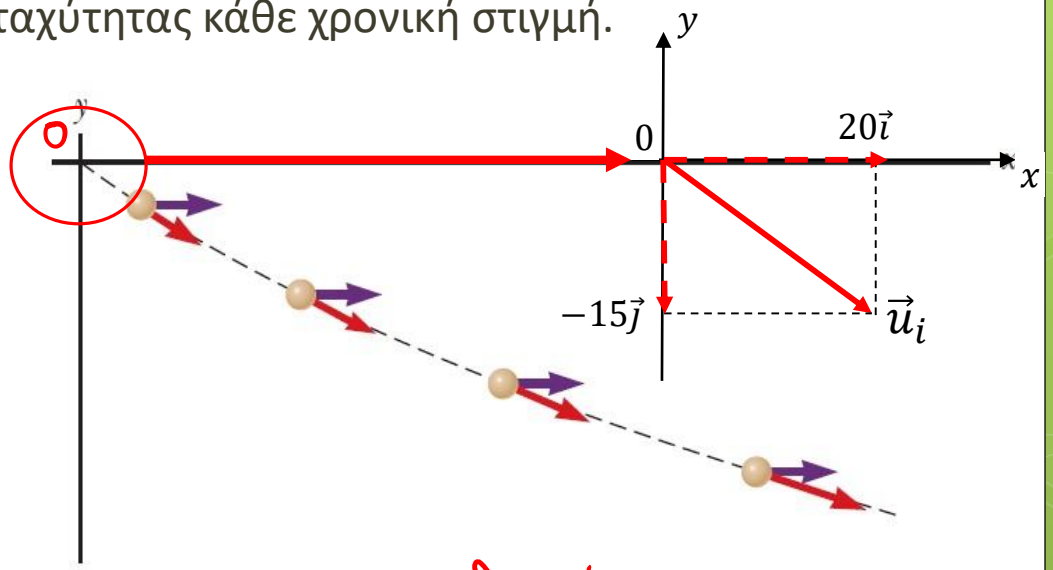
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>
  - $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$
  - $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Αυτές οι εξισώσεις κατασκευάστηκαν από ξεχωριστή μελέτη της κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = 4\vec{\imath}\ \mathrm{m}/s^2$. Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;
  Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.
  Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.
  Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης r.



x-άξονας: ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

y-άξονας: —"— —"— —"— ταχύτητα

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = 4\vec{\imath}\ \mathrm{m}/s^2$.
  Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Γνωρίζαμε ότι: $\vec{u} = u_x\,\vec{i} + u_y\,\vec{j}$

Για τον x-άξονα:

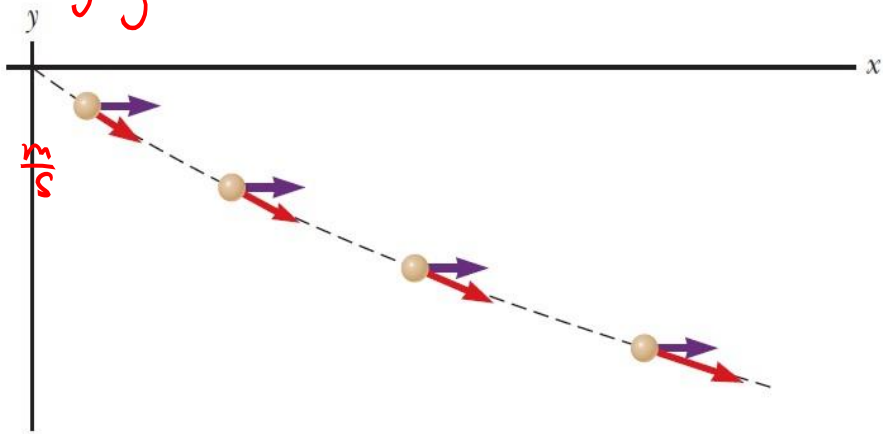
$u_x = u_{x_i} + a_x t \Leftrightarrow u_x = 20 + 4t\ \frac{m}{s}$

Για τον y-άξονα:

$u_y = u_{y_i} = -15\ \frac{m}{s}$

Άρα

$\vec{u} = (20+4t)\vec{i} - 15\vec{j}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

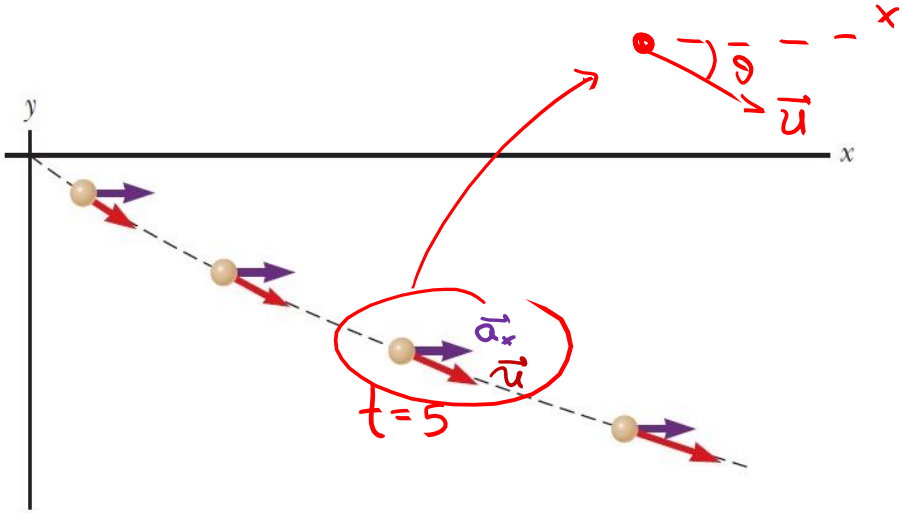
- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = 4\vec{\imath}\ \mathrm{m}/s^2$.
  Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

Για $t=5$ sec, θα έχω

$$\vec{u}(5) = (20+4\cdot 5)\vec{i} - 15\vec{j}$$
$$= 40\vec{i} - 15\vec{j}$$

Μέτρο: $|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2+15^2}$
$\cong 43\ \frac{m}{s}$

Γωνία: $\theta = \tan^{-1}\frac{-15}{40} \simeq -21^\circ$

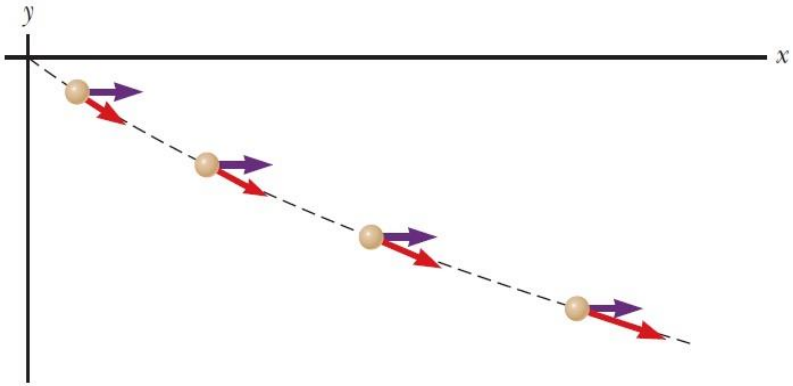


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = 4\vec{\imath}\ \mathrm{m}/s^2$.
  Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης r.

Ξέραμε ότι $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1)

Μελέτη κατά άξονες.



x-άξονας: $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$= 0 + 20t + \frac{1}{2} \cdot 4t^2$

$= 20t + 2t^2$ (2)

y-άξονας: $y_f = y_i + u_{y_i} t = 0 - 15t = -15t$ (3)

Άρα τελικά $\vec{r} \overset{(1)}{\underset{(2)(3)}{=}} (20t + 2t^2)\vec{i} - 15t \cdot \vec{j}$

Τέλος Διάλεξης