

Physics

Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο
Διανύσματα



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

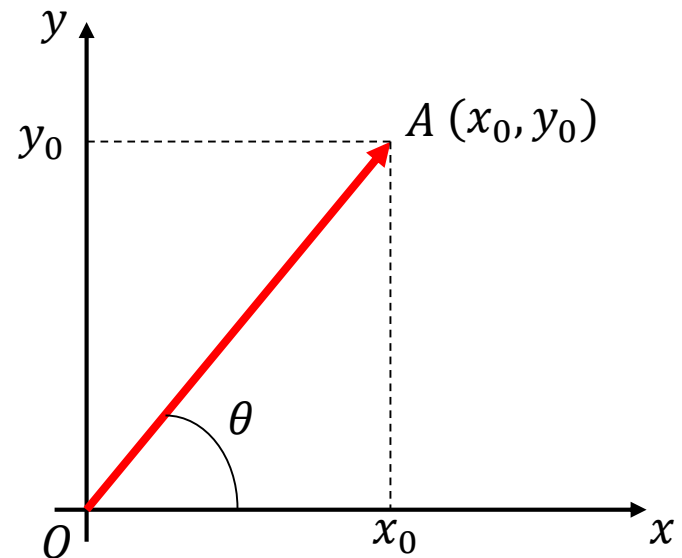
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο
Διανύσματα

Διανύσματα

- Στην μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας του διανύσματος
- Διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$: προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα
 - Μέτρο
 - Διεύθυνση
 - Φορά
- Καρτεσιανές συντεταγμένες
 - x_0 — τετμημένη
 - y_0 — τεταγμένη



Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες

- Στο τρίγωνο OAB:

- $x_0 = \rho \cos(\theta) = \rho \cos(\theta)$

- $y_0 = \rho \sin(\theta) = \rho \sin(\theta)$

όπου

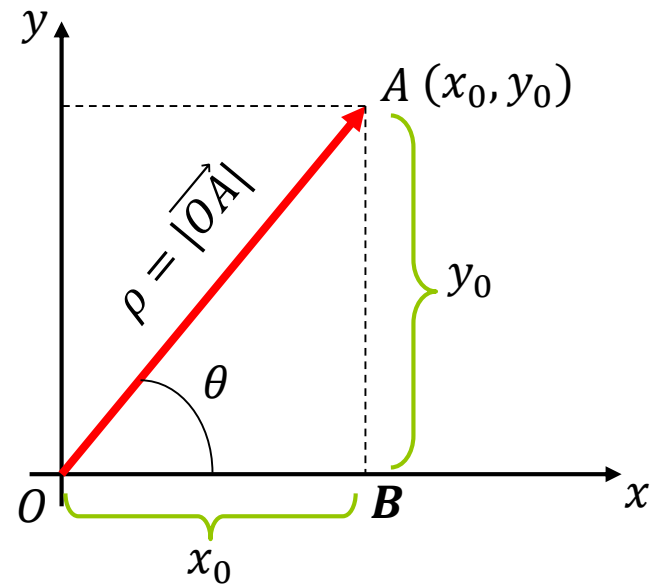
$$\rho = |\vec{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Πώς προκύπτει η γωνία θ ?

- Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

- Γραφή πολικής μορφής: (ρ, θ)



$$\tan^{-1}(\tan(\theta)) = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και ύστερα αυτού με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

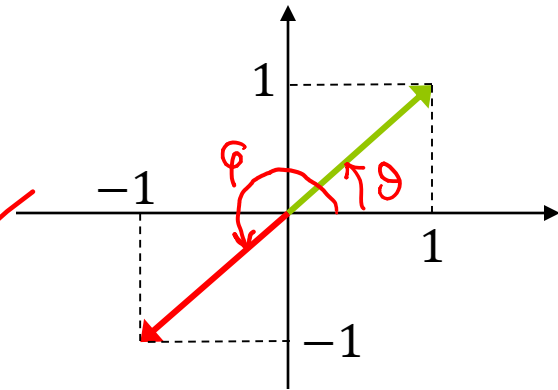
$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0}$$

Είναι :

- $(x_0, y_0) = (1, 1) : \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ ή } 45^\circ$ ✓

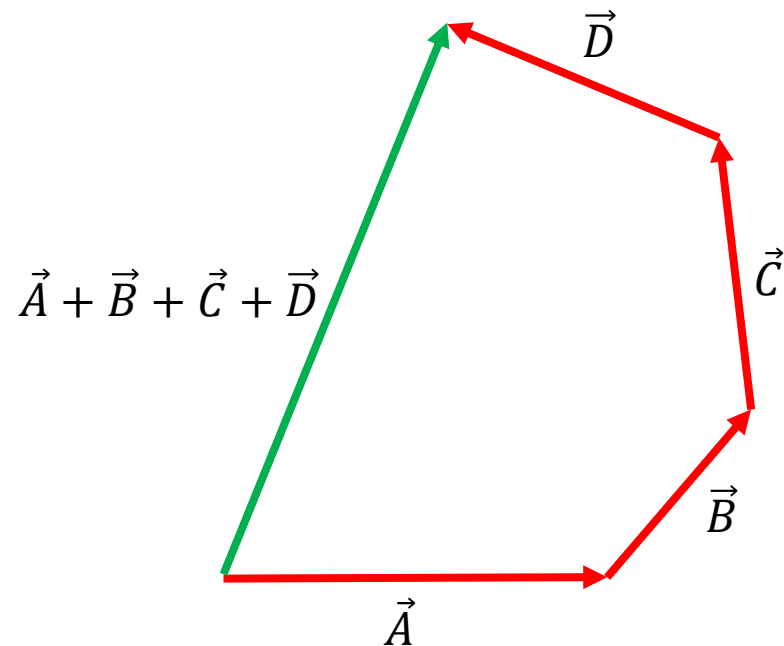
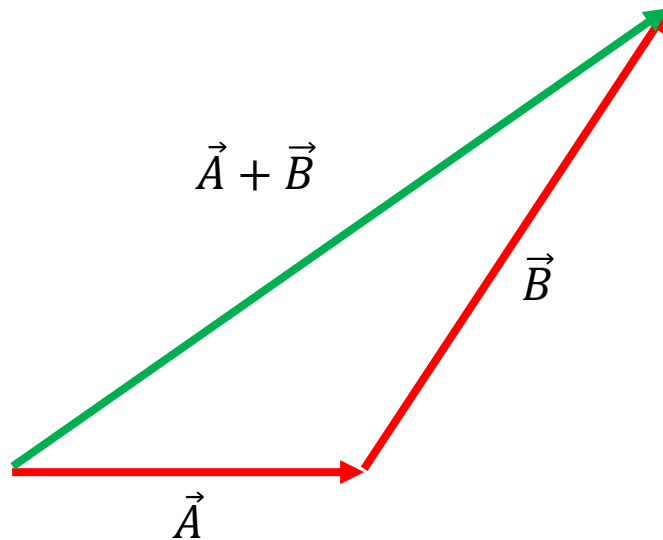
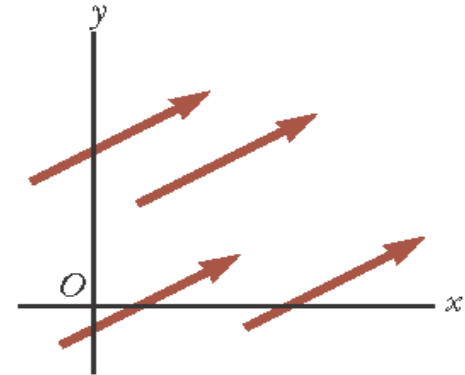
- $(x_0, y_0) = (-1, -1) : \rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad ! \quad \xrightarrow{+\pi} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4} \quad \left(-\frac{3\pi}{4} \right)$$



Διανύσματα

- Ιδιότητες διανυσμάτων
 - **Ισότητα** διανυσμάτων
 - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
 - **Πρόσθεση** διανυσμάτων



Διανύσματα

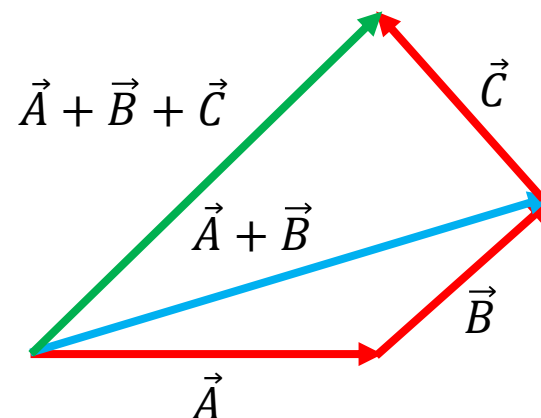
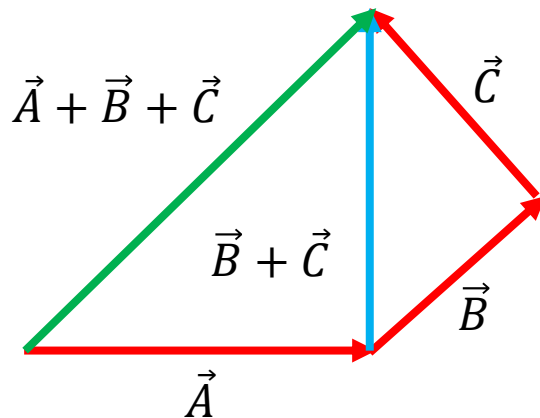
- Ιδιότητες

- Αντιμεταθετικότητα

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

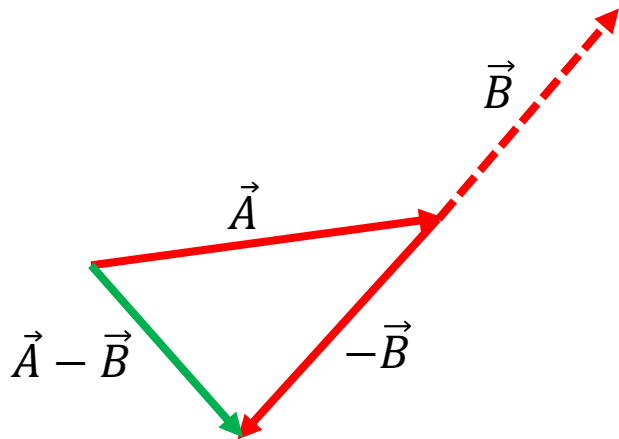
- Προσεταιριστικότητα

- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

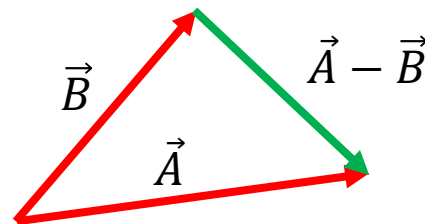


Διανύσματα

- **Αρνητικό διάνυσμα** ενός διανύσματος $\vec{A}$
 - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\vec{A}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$
- Παράδειγμα:
 - Πράξη $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



$$\vec{X} + \vec{B} = \vec{A} \Rightarrow \vec{X} = \vec{A} - \vec{B}$$



Διανύσματα

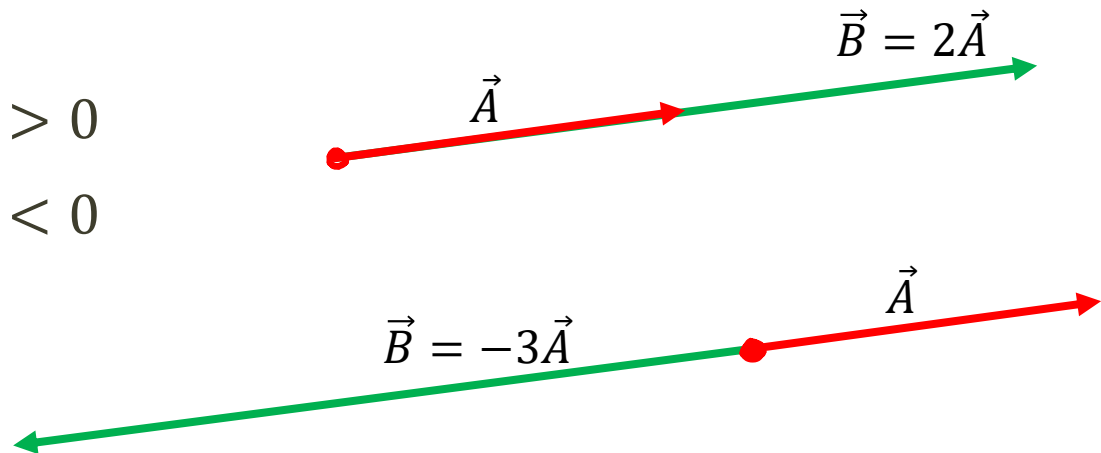
- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

- Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά και το μέτρο του

- $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$

- $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \text{ αν } m > 0$

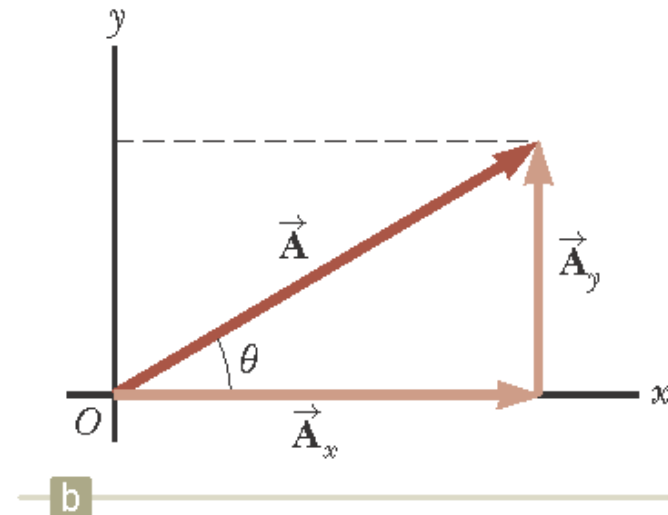
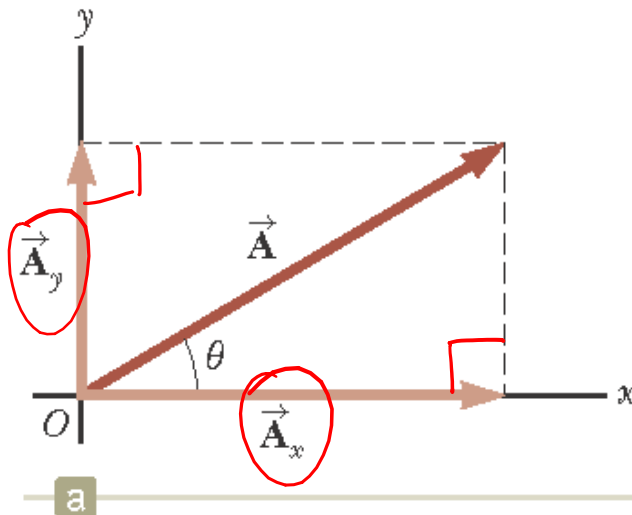
- $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, \text{ αν } m < 0$



Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα ή ως πρώτο βήμα πριν κάποια άλγεβρα
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια και ευχρηστία, προτιμούμε την ανάλυση σε **συνιστώσες** (μια κάθετη και μια παράλληλη στον x-άξονα)

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μοναδιαίων διανυσμάτων**

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

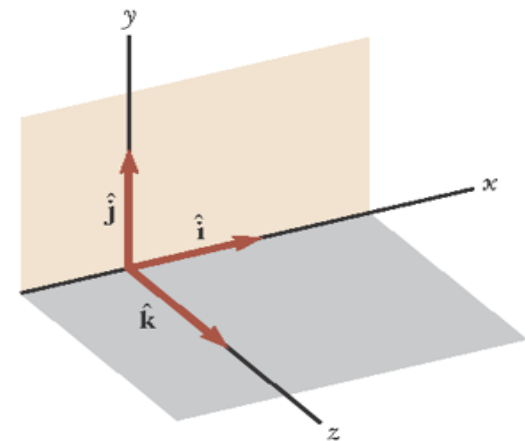
- Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)

- Περιγράφουν έναν άξονα (διεύθυνση)

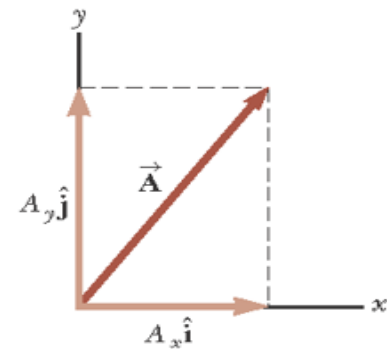
- $\vec{i} \rightarrow x, \vec{j} \rightarrow y, \vec{k} \rightarrow z$

- Κάθετα μεταξύ τους

- $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}$



a



b

Διανύσματα

- Το διάνυσμα $\vec{A}$ σε ένα επίπεδο μπορεί να γραφεί ως

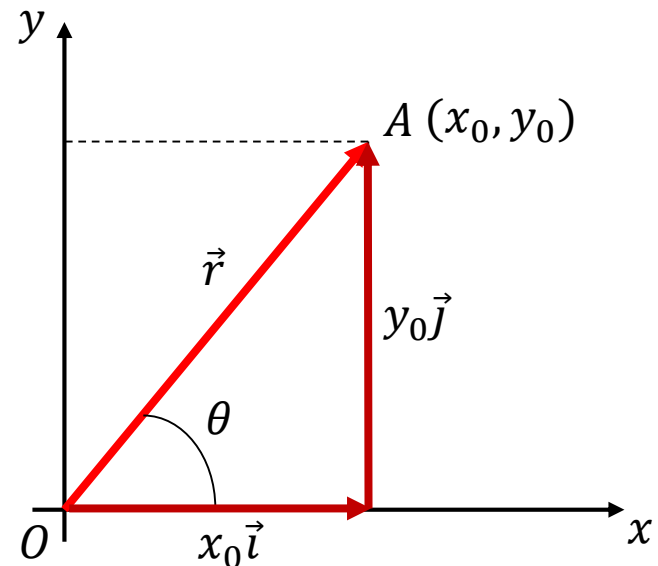
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}, \quad A_x, A_y \in \mathbb{R}$$

με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων

- Διάνυσμα θέσης**

- Σημείο $A(x_0, y_0)$
- $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$
- Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι

$$x_0 \vec{i}, y_0 \vec{j}$$



Διανύσματα

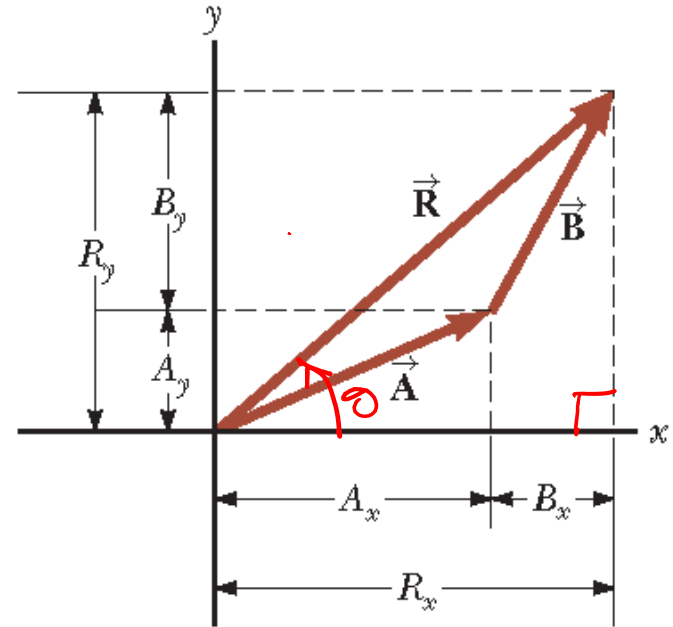
- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})$
- $\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

- Πρόσθεση όλων των x -συνιστωσών και όλων των y -συνιστωσών

- $|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$



Διανύσματα

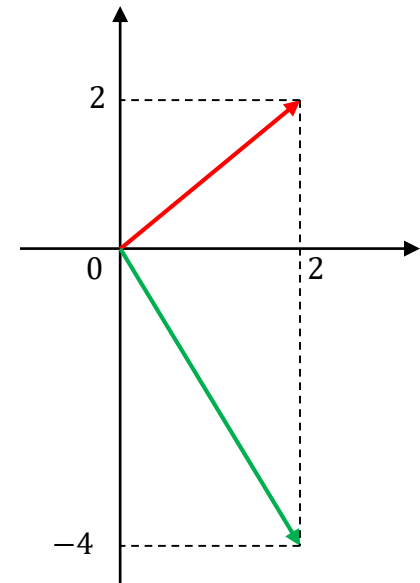
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{B} = (2\vec{i} - 4\vec{j})$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή



$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= (2+2)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j} \sim (4, -2)\end{aligned}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \rho = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

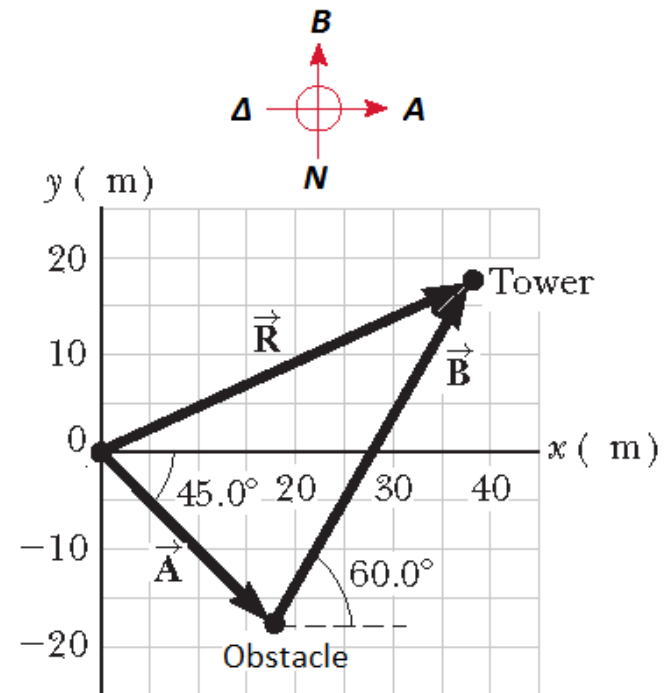
$$\vartheta = \tan^{-1} \frac{-2}{4} = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \cong -26^\circ. \text{ Άρα } (\rho, \vartheta) = (2\sqrt{5}, -26^\circ)$$

Διανύσματα

○ Παράδειγμα:

○ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του (Δείτε το σχήμα).

- A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
- B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
- C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

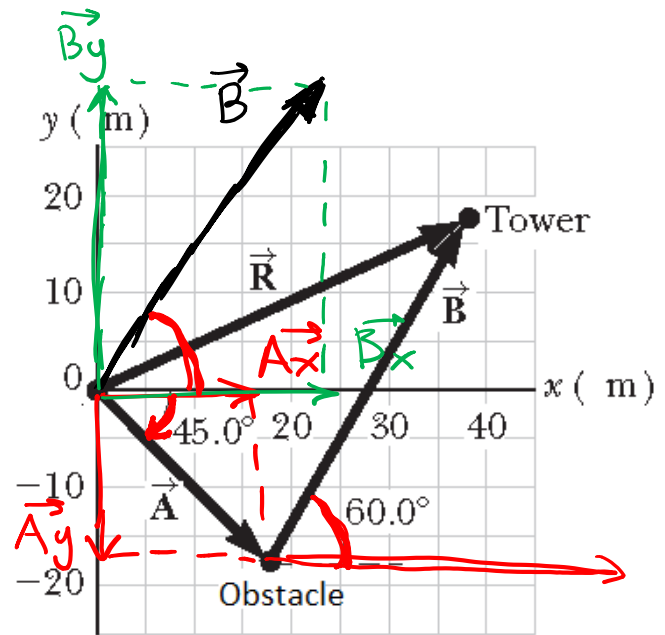


Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Α. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



$$\text{Είναι } \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } A_x &= |\vec{A}| \cos(-45^\circ) = |\vec{A}| \cos(45^\circ) = 25 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 17.7 \text{ m} \\ A_y &= |\vec{A}| \sin(-45^\circ) = |\vec{A}| (-\sin(45^\circ)) = -25 \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -17.7 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Όπως, } \vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

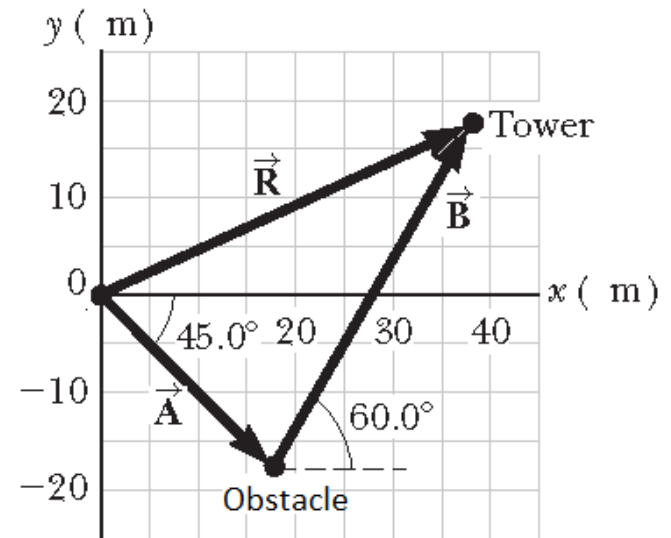
$$\begin{aligned} \text{Άρα } B_x &= |\vec{B}| \cos(60^\circ) = 40 \cdot \cos(60^\circ) = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ m} \\ B_y &= |\vec{B}| \sin(60^\circ) = 40 \sin(60^\circ) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 34.7 \text{ m} \end{aligned}$$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Β. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.

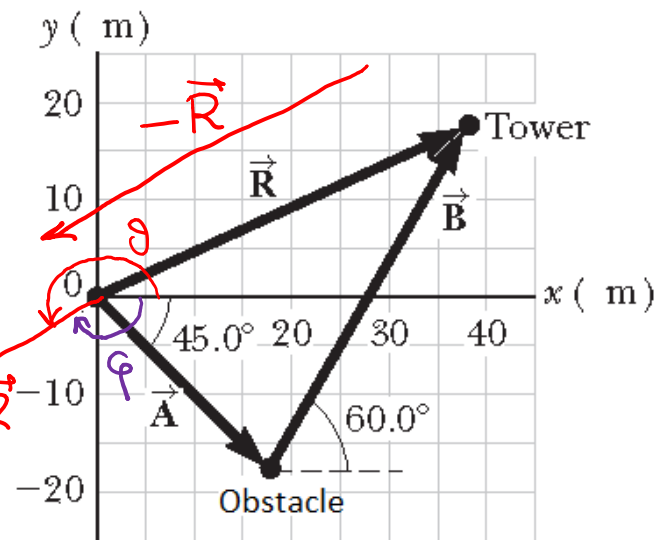


$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} \\ &= 37.7\vec{i} + 17.7\vec{j}\end{aligned}$$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)
- Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

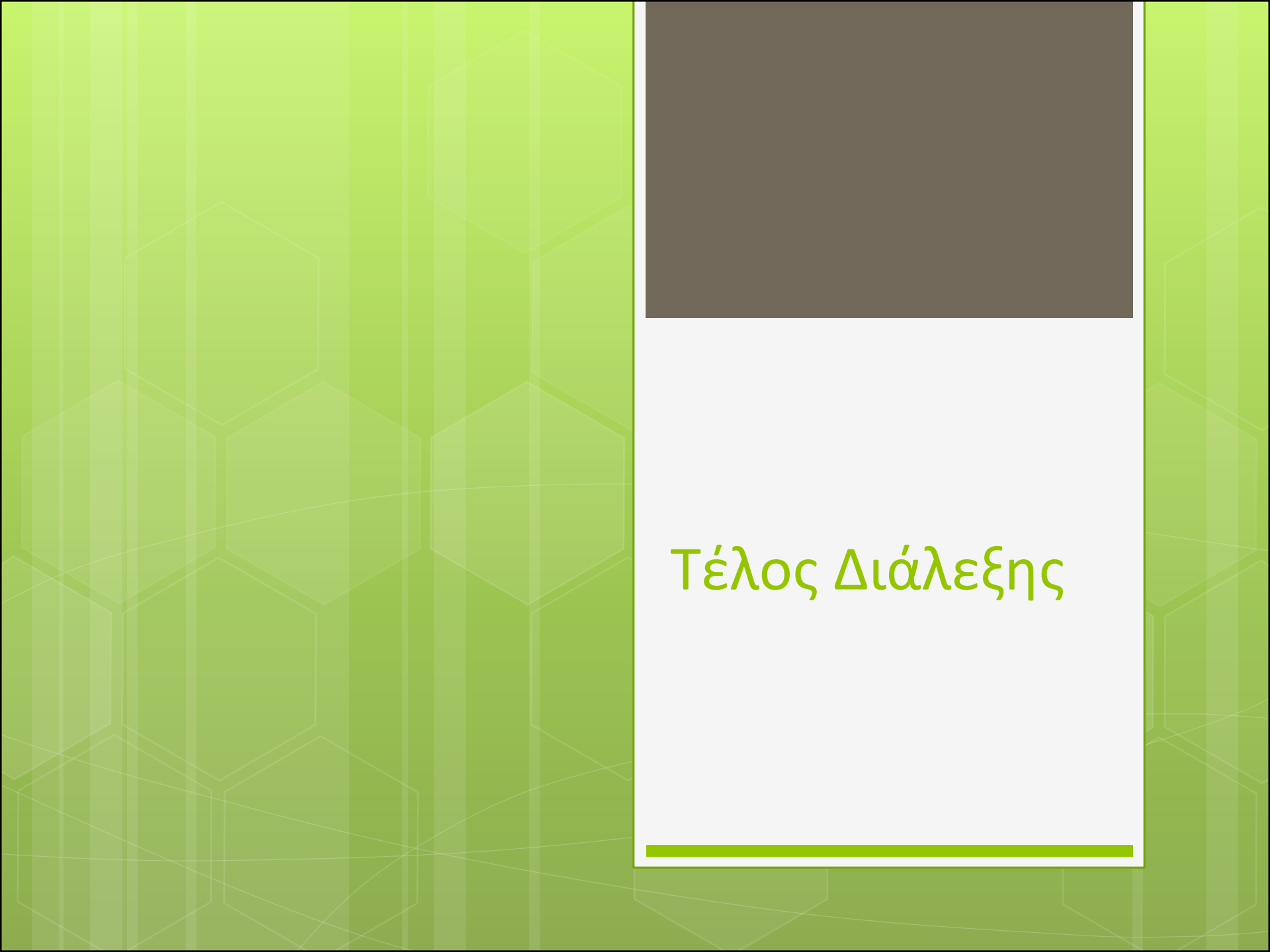


Το διάνυσμα που περιγράφει την κίνηση αυτή είναι $-\vec{R}$.

$$\text{Αν } \vec{R}' = -\vec{R} = -(\vec{R}_x \vec{i} + \vec{R}_y \vec{j}) = -37.7 \vec{i} - 17.7 \vec{j}$$

Η γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-17.7}{-37.7} = \tan^{-1} \frac{17.7}{37.7} \approx 24.2^\circ \xrightarrow[\text{διόρθωση}]{+\pi} 204.2^\circ \text{ ή } -155.7^\circ$$



Τέλος Διάλεξης