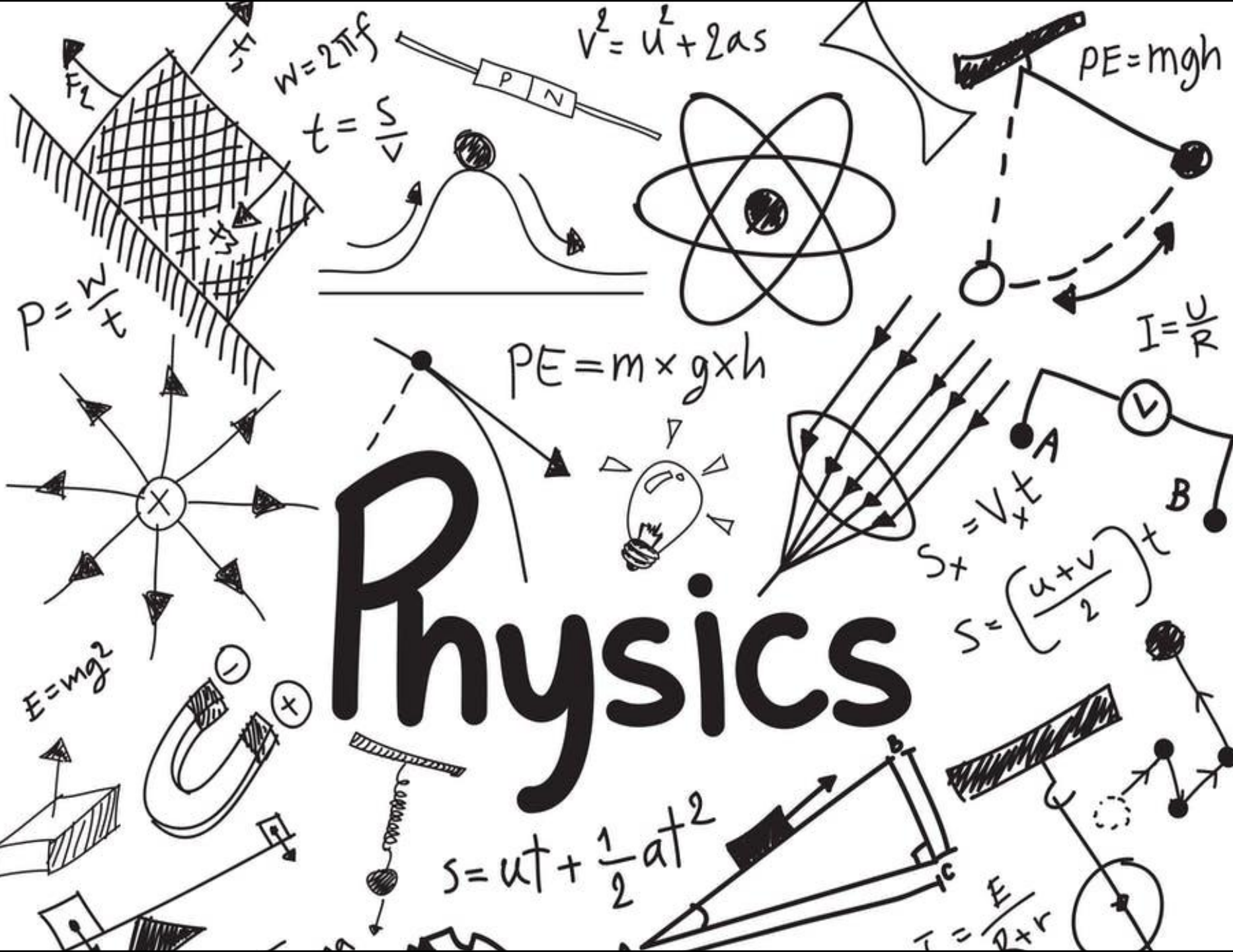


Physics



Reminder...

- Διαλέξεις
 - Προαιρετική παρουσία!
 - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
 - Δεν υπάρχουν απουσίες
- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- COVID attention: προσέρχεστε με τα απαραίτητα δικαιολογητικά
- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρομαγνητισμός

- Μελέτη των φαινομένων που σχετίζονται με τον **ηλεκτρισμό** και το **μαγνητισμό**
- Νόμοι του Ηλεκτρομαγνητισμού
 - Πανταχού παρόντες: smartphones, τηλεοράσεις, ηλεκτροκινητήρες, Η/Υ, επιταχυντές σωματιδίων, κ.α.
- Ηλεκτρικός → ήλεκτρο (αρχ. Ελλ.) = κεχριμπάρι (απολιθωμένη ρητίνη, παράγωγο των κωνοφόρων δένδρων)
- Μαγνητικός → Μαγνησία Μ. Ασίας (σημερινή Μανίσα, κοντά στη Σμύρνη) → περιοχή που βρέθηκε για πρώτη φορά ο μαγνητίτης
- Επιστήμονες: Oersted, Ampere, Weber, Faraday, Henry, **Maxwell**
 - **James Clerk Maxwell : Isaac Newton του ηλεκτρομαγνητισμού**



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

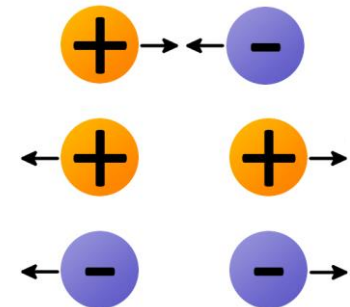
Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία



- Όλοι έχετε “δει” ηλεκτρικά πεδία γύρω σας
 - Τρίψτε ένα μπαλόνι στα μαλλιά σας και θα δείτε ότι έλκει κομματάκια χαρτιού
- Μια τέτοια συμπεριφορά της ύλης αναφέρεται ως **ηλεκτρική φόρτιση**
 - Ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια κινούνται από τα μαλλιά σας στο μπαλόνι
 - Πλησιάζοντας το στα κομμάτια χαρτί, τα φορτισμένα σωματίδια έλκουν κάποια άλλα φορτισμένα σωματίδια στο χαρτί
- Πειράματα έδειξαν ότι υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικού φορτίου
- Ονομάστηκαν **θετικό** και **αρνητικό φορτίο**
 - Τα **ηλεκτρόνια** (ή και άλλα σωματίδια) έχουν **αρνητικό φορτίο**
 - Τα **πρωτόνια** (ή και άλλα σωματίδια) έχουν **θετικό φορτίο**
- Φορτία ίδιου προσήμου απωθούνται
- Φορτία αντίθετου προσήμου έλκονται



Ηλεκτρικά Πεδία

- Διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου
 - ...σε απομονωμένο σύστημα
 - Μεταφορά (όχι δημιουργία!) φορτίου από ένα σώμα σε ένα άλλο
 - Το ένα φορτίζεται **θετικά (πλεόνασμα θετικού φορτίου)**, το άλλο **αρνητικά (πλεόνασμα αρνητικού φορτίου)**
 - Ποιος είναι όμως ο «φορέας» του φορτίου;
 - Ξέρουμε πλέον ότι – στα μέταλλα – τα **ηλεκτρόνια** μεταφέρουν φορτίο, τα οποία μεταφέρονται από ένα μέταλλο σε ένα άλλο, δημιουργώντας θετική ή αρνητική φόρτιση
- Το 1909, ο R. Milikan ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό φορτίο q απαντάται στη φύση σε ακέραια πολλαπλάσια ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου e :
$$q = Ne, \quad N \in \mathbb{Z}$$
 - Λέμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι **κβαντισμένο**
 - **Ηλεκτρόνιο**: φορτίο $-e$
 - **Πρωτόνιο**: φορτίο $+e$

Ηλεκτρικά Πεδία

- Κατηγοριοποίηση υλικών

- **Αγωγοί:** υλικά (χαλκός, αλουμίνιο, άργυρος, κλπ) όπου κάποια ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα και δεν είναι δεσμευμένα σε άτομα, και μπορούν να κινηθούν σχετικά ελεύθερα στο υλικό
 - Όταν φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται άμεσα σε όλη την επιφάνεια του υλικού
- **Μονωτές:** υλικά (γυαλί, ξύλο, κλπ) που όλα τα ηλεκτρόνια τους είναι δεσμευμένα σε άτομα και δεν μπορούν να κινηθούν ελεύθερα
 - Όταν φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή
- **Ημιαγωγοί:** με προσθήκη συγκεκριμένης ποσότητας ατόμων στο υλικό (πυρίτιο, γερμάνιο), εναλλάσσονται από αγωγοί σε μονωτές

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ο νόμος του Coulomb**

- Ο Charles Coulomb ανακάλυψε πειραματικά το μέτρο των ηλεκτρικών δυνάμεων ανάμεσα σε ακίνητα φορτισμένα σωματίδια
- Από τα πειράματά του προέκυψε ότι: η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (μηδενικού μεγέθους - σημειακά) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

όπου k_e ονομάζεται σταθερά του Coulomb

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ο νόμος του Coulomb**

- Πειράματα έδειξαν ότι η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική
- Μονάδα μέτρησης ηλεκτρ. δύναμης στο S.I. : Newton (N)
- Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο που έχει βρεθεί στη φύση είναι $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
 - $\text{C} = \text{Coulomb}$: μονάδα μέτρησης φορτίου
 - Μη θεμελιώδης μονάδα μέτρησης
 - Εξαρτάται από άλλες μονάδες που θα δούμε στη συνέχεια

- **Σταθερά k_e**

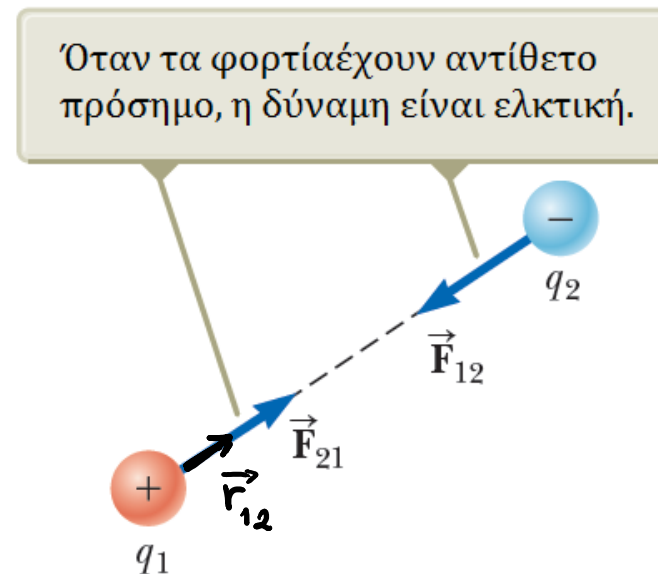
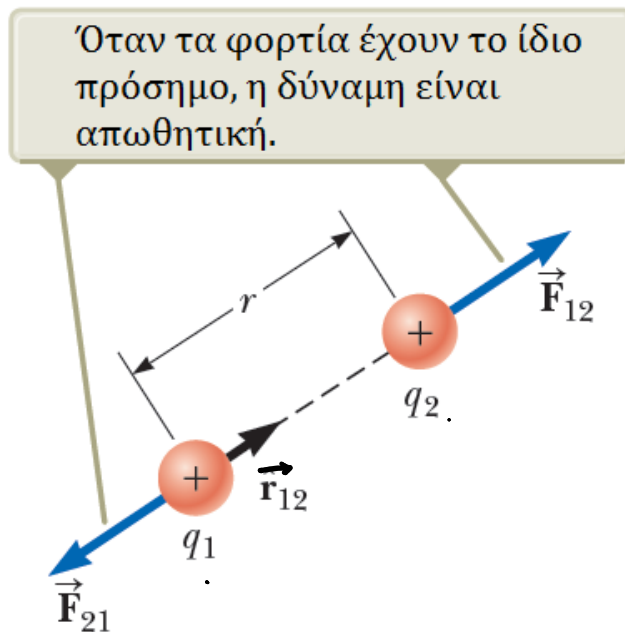
- $k_e = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ (περίπου)
- Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
 - όπου ϵ_0 η **διηλεκτρική σταθερά του κενού**

Ηλεκτρικά Πεδία

Ο νόμος του Coulomb – Διανυσματική μορφή

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_{12}$$

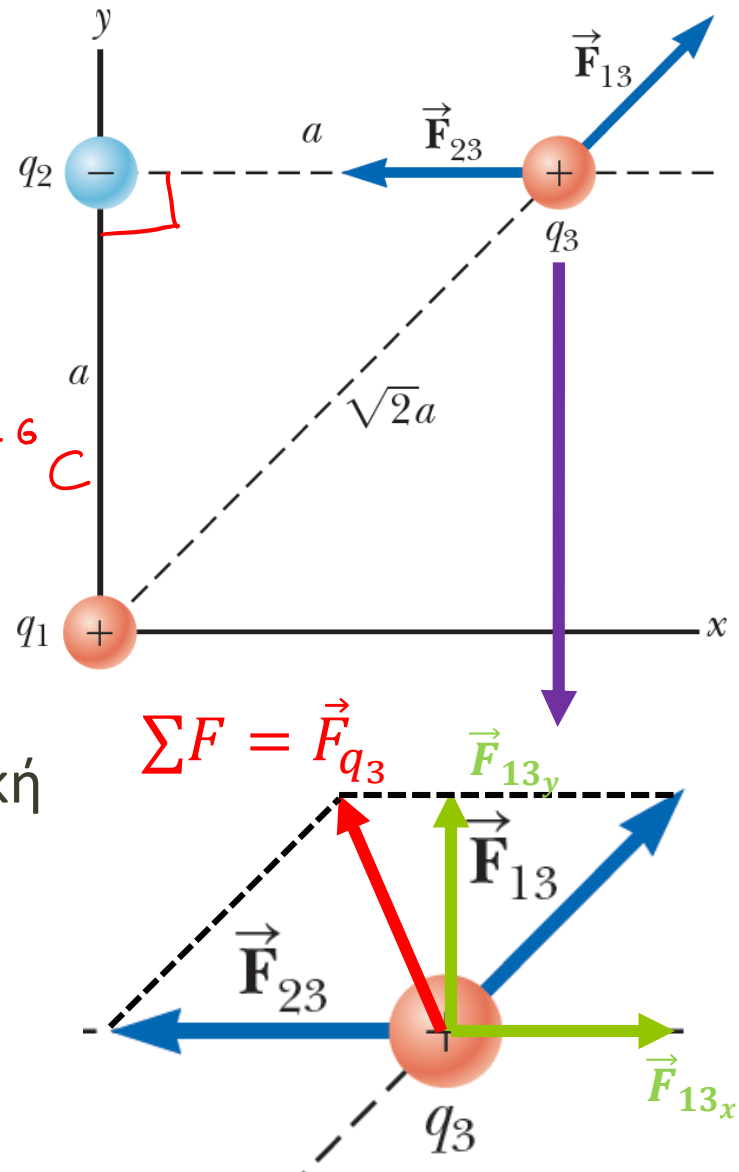
με $\vec{r}_{12}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το φορτίο 1 στο φορτίο 2



Ηλεκτρικά Πεδία

- Παράδειγμα:

- Τρία σημειακά φορτία βρίσκονται στις γωνίες ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου όπως στο σχήμα.
- Δίνεται ότι $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ και $a = 0.1 \text{ m}$.
Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο q_3 .



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Δίδεται ότι $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ και $a = 0.1 \text{ m}$. Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη στο q_3 .

Ξέρουμε ότι $\vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$. Αναλύω

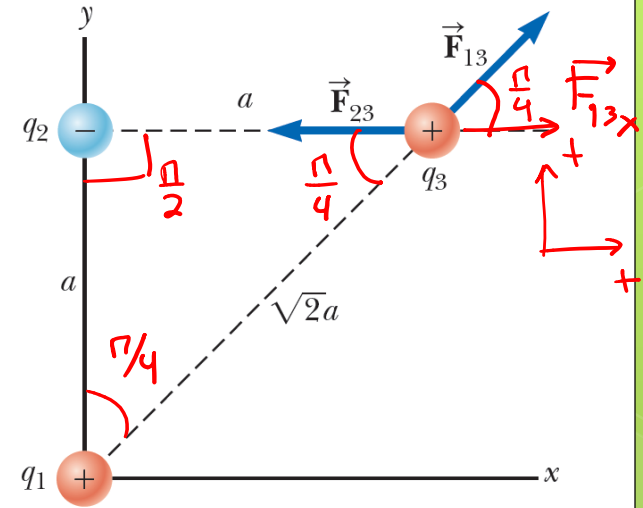
σε συνιστώσες:

$$\begin{aligned} \text{X-άξονας: } \vec{F}_{q_{3x}} &= \vec{F}_{13x} + \vec{F}_{23} \Rightarrow F_{q_{3x}} = F_{13x} - F_{23} \\ \text{y-άξονας: } \vec{F}_{q_{3y}} &= \vec{F}_{13y} \Rightarrow F_{q_{3y}} = F_{13y} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{X-άξονας: } \vec{F}_{q_{3x}} &= \vec{F}_{13x} + \vec{F}_{23} \\ \text{y-άξονας: } \vec{F}_{q_{3y}} &= \vec{F}_{13y} \end{aligned}} \right\} \textcircled{A}$$

$$\text{Η } F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k_e \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{2a^2} = \dots \approx 11.2 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } F_{13x} = F_{13} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 11.2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7.9 \text{ N} \quad \textcircled{1}$$

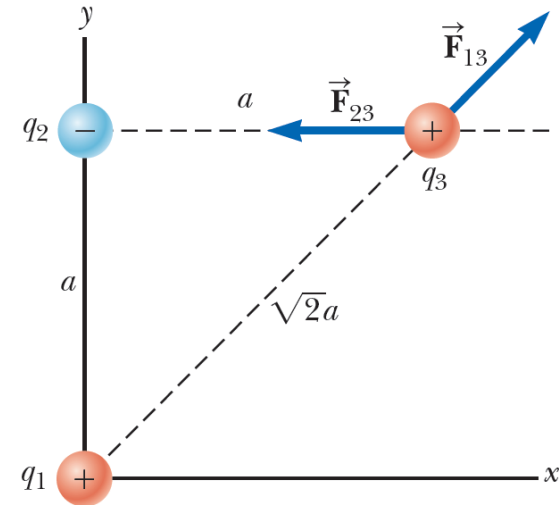
$$F_{13y} = F_{13} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 11.2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7.9 \text{ N} \quad \textcircled{2}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Δίδεται ότι $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ και $a = 0.1 \text{ m}$. Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη στο q_3 .



Επίσης, η $\vec{F}_{23}$ έχει μέτρο

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{r^2} = k_e \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{a^2} = \dots \approx 9.0 \text{ N } (3)$$

Οι (Α) λόγω (1), (2), (3) δίνουν:

$$F_{q_3x} = F_{13x} - F_{23} = 7.9 - 9.0 = -1.1 \text{ N}$$

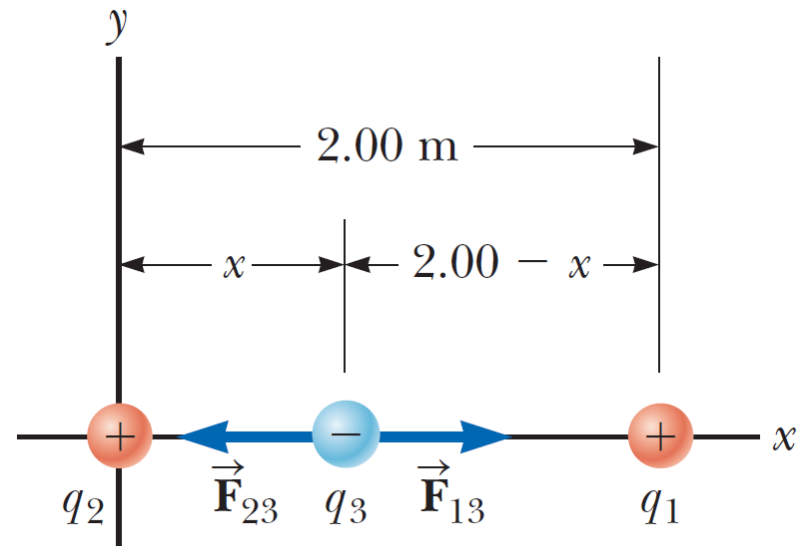
$$F_{q_3y} = F_{13y} = 7.9 \text{ N}$$

$$\text{Άρα } \sum \vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{q_3} = -1.1 \vec{i} + 7.9 \vec{j} \text{ N}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- Παράδειγμα:

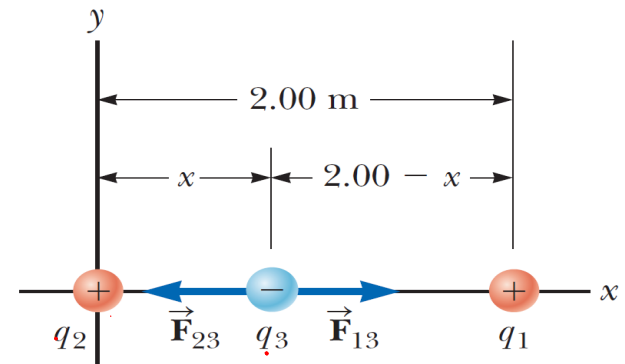
- Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται επάνω στον x -άξονα όπως στο σχήμα. Το $q_1 = 15 \mu C$ βρίσκεται στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το $q_2 = 6 \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του q_3 .



Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Το $q_1 = 15 \mu\text{C}$ στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το $q_2 = 6 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του q_3 .



$$\text{Αφ' όσον το } q_3 \text{ ισορροπεί, τότε } \sum \vec{F}_{q_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F_{23} + F_{13} = 0 \Leftrightarrow F_{13} = F_{23}$$

$$\text{Άρα } F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} \Rightarrow k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|q_1|}{(2-x)^2} = \frac{|q_2|}{x^2} \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x_1 = 0.775 \text{ m}$$

$$x_2 = -3.44 \text{ m}$$

Το q_3 δεν ισορροπεί, αν και $F_{13} = F_{23}$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Ηλεκτρικό πεδίο

- Πώς «γνωρίζει» ένα φορτισμένο σωματίδιο την παρουσία ενός άλλου φορτισμένου σωματιδίου ώστε να αναπτυχθεί δύναμη Coulomb μεταξύ τους;
 - Για να απαντήσουμε σε αυτό χρειαζόμαστε την έννοια του **πεδίου**
- Η έννοια του πεδίου αναπτύχθηκε από τον M. Faraday
- **Ηλεκτρικό πεδίο** υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο...
 - ...που λέγεται **πηγή φορτίου**
- Το αντιλαμβανόμαστε όταν ένα άλλο (αρκετά μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο και μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

- Ορίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα μικρό φορτίο q_0 , δια το φορτίο αυτό

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

- Άρα το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου έχει την **ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη** που θα ασκούνταν σε ένα μικρό **θετικό** φορτίο q_0
- Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό φορτίο q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

Το q_0 αποκαλείται συχνά και «δοκιμαστικό φορτίο»

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

● Ηλεκτρικό πεδίο

- Αν το q_0 είναι θετικό, η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του ηλεκτρ. πεδίου στο σημείο του φορτίου q_0
- Αν το q_0 είναι αρνητικό, το διάνυσμα του ηλεκτρ. πεδίου στο σημείο του φορτίου q_0 και η ηλεκτρική δύναμη έχουν αντίθετες κατευθύνσεις
- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο P λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q σε απόσταση r δίνεται ως

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

- Το **μέτρο** του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P δίνεται ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2}$$

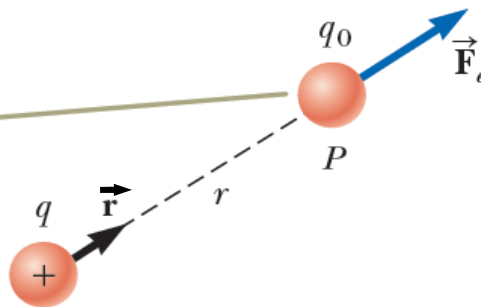
Ηλεκτρικό πεδίο
αποκλειστικά εξαρτώμενο
από την πηγή φορτίου q !

Ηλεκτρικά Πεδία

● Ηλεκτρικό πεδίο

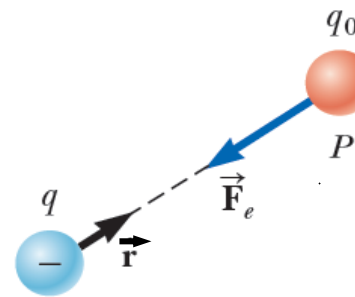
$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

Αν το q είναι θετικό, η δύναμη επάνω στο q_0 έχει κατεύθυνση μακριά από το q .



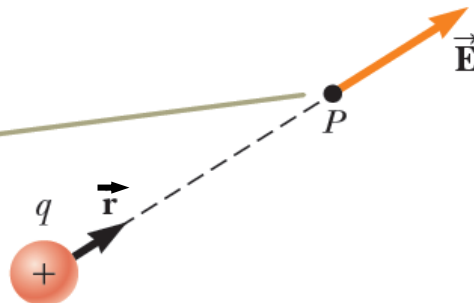
a

Αν το q είναι αρνητικό, το σωματίδιο q_0 κατευθύνεται προς το q .



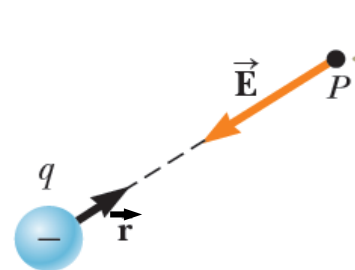
c

Αν το q είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς τα έξω από το q .



b

Αν το q είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς το q .



d

Θετική πηγή φορτίου $\rightarrow$ φορά πεδίου «προς τα έξω»

Αρνητική πηγή φορτίου $\rightarrow$ φορά πεδίου «προς τα μέσα»

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

- Τι συμβαίνει αν έχουμε πολλές πηγές φορτίου q_i ;
- Ηλεκτρικό πεδίο: διανυσματικό μέγεθος

$$\vec{E}_P = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

όπου r_i η απόσταση κάθε πηγής από ένα σημείο P και $\vec{r}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή i στο σημείο P

- Προσθέτουμε διανυσματικά τις επιμέρους συνεισφορές
- Πολλές φορές, η ανάλυση σε συνιστώσες είναι πολύ βολική!

Ηλεκτρικά Πεδία

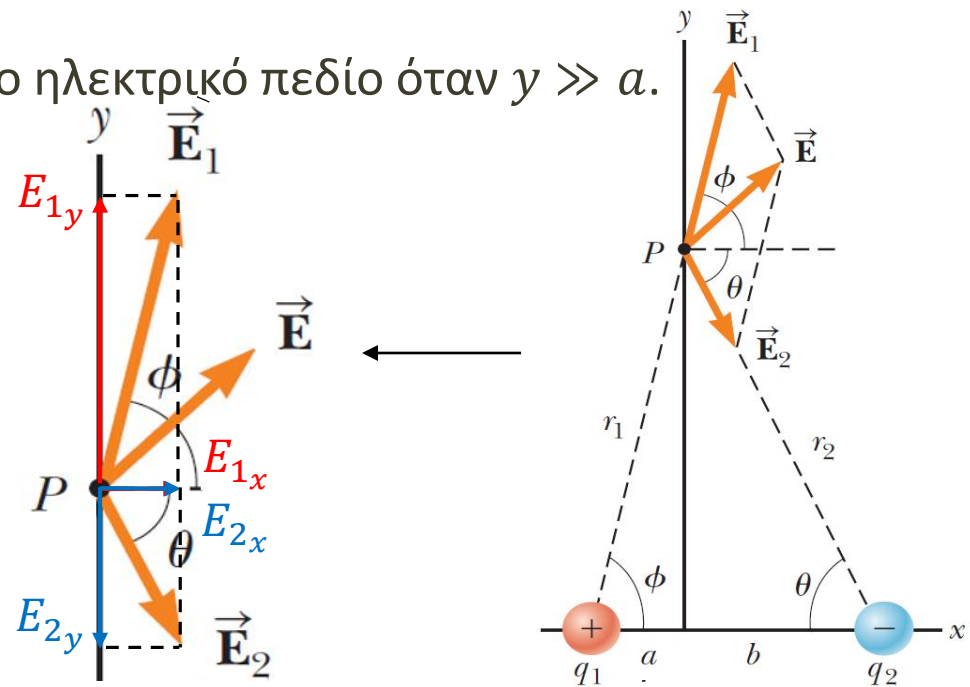
● Παράδειγμα:

- Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b , αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.

A) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P ($0, y$).

B) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.

Γ) Στο B) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P (0, y)$.

Θα δουλέψουμε σε συνιστώσες για να βρούμε
τα $\vec{E}_x, \vec{E}_y$: $\left. \begin{aligned} \vec{E}_x &= \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} \\ \vec{E}_y &= \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$$\rightarrow E_x = E_{1x} + E_{2x}$$

$$E_y = E_{1y} - E_{2y}$$

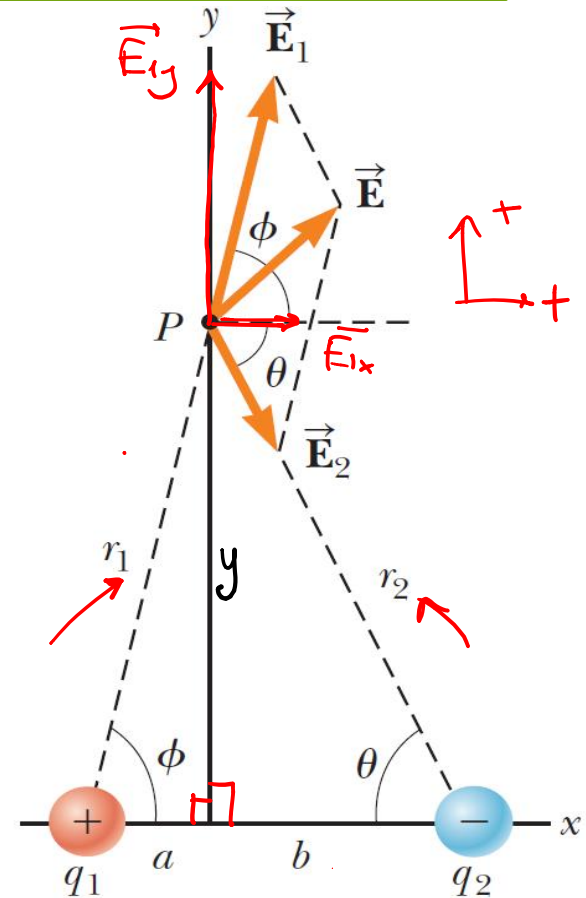
Θα είναι λοιπόν:

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)}$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)}$$

$$\rightarrow E_{1x} = E_1 \cdot \cos \phi = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)} \cos \phi$$

$$\rightarrow E_{1y} = E_1 \cdot \sin \phi = k_e \frac{|q_1|}{(a^2 + y^2)} \sin \phi$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P (0, y)$.

Όφεια για τις συνιστώσες του $\vec{E}_2$, βρούμε

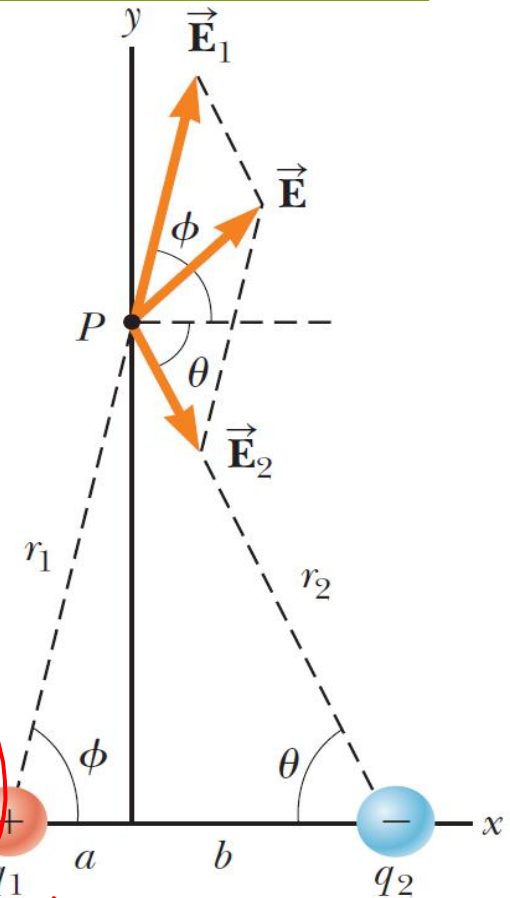
$$E_{2x} = k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)} \cos \theta, \quad E_{2y} = k_e \frac{|q_2|}{(b^2 + y^2)} \sin \theta$$

Άρα τελικά:

$$E_{Px} = E_{1x} + E_{2x} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \phi + \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos \theta \right)$$

$$E_{Py} = E_{2y} - E_{1y} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \phi - \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin \theta \right).$$

$$\text{Άρα } \vec{E}_P = \vec{E}_{Px} + \vec{E}_{Py} = E_{Px} \cdot \vec{i} + E_{Py} \cdot \vec{j}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

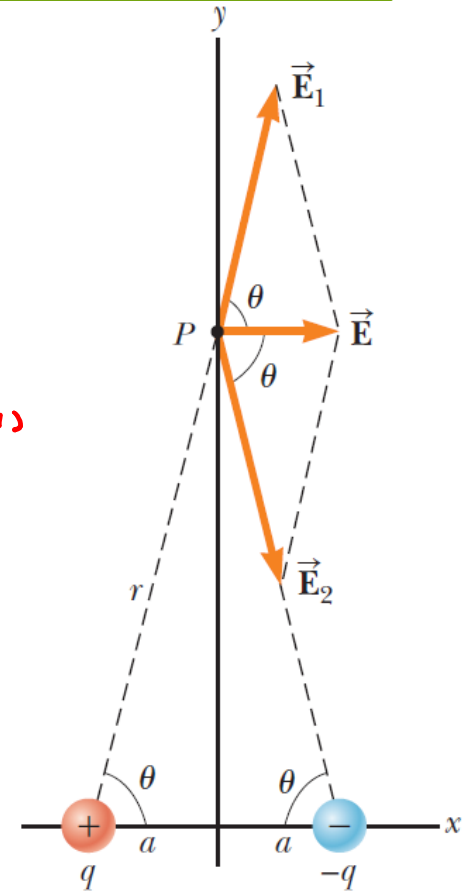
- Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.

Αν $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$, τότε $\vartheta = \phi$. Οι σχέσεις που βρήκαμε γράφονται ως εξής:

$$E_{Px} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \vartheta + \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \vartheta \right) \\ = 2k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos \vartheta.$$

$$E_{Py} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \vartheta - \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin \vartheta \right) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\vec{E}_P = \vec{E}_{Px} \Leftrightarrow \vec{E}_P = E_{Px} \cdot \vec{i}$.



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

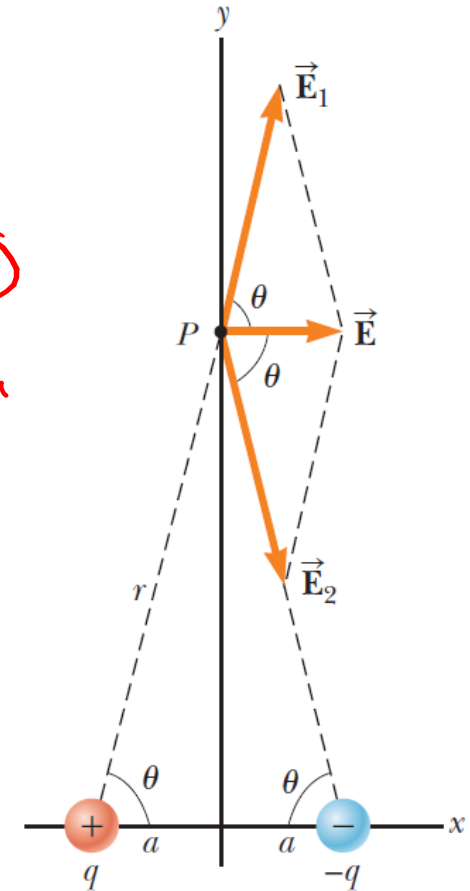
- Γ) Στο Β) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.

Αφού $y \gg a$, το ηλ. πεδίο στο P χράζεται

$$E_P = E_{Px} = 2k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos\theta \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$
$$y \gg a \Rightarrow y^2 + a^2 \approx y^2$$

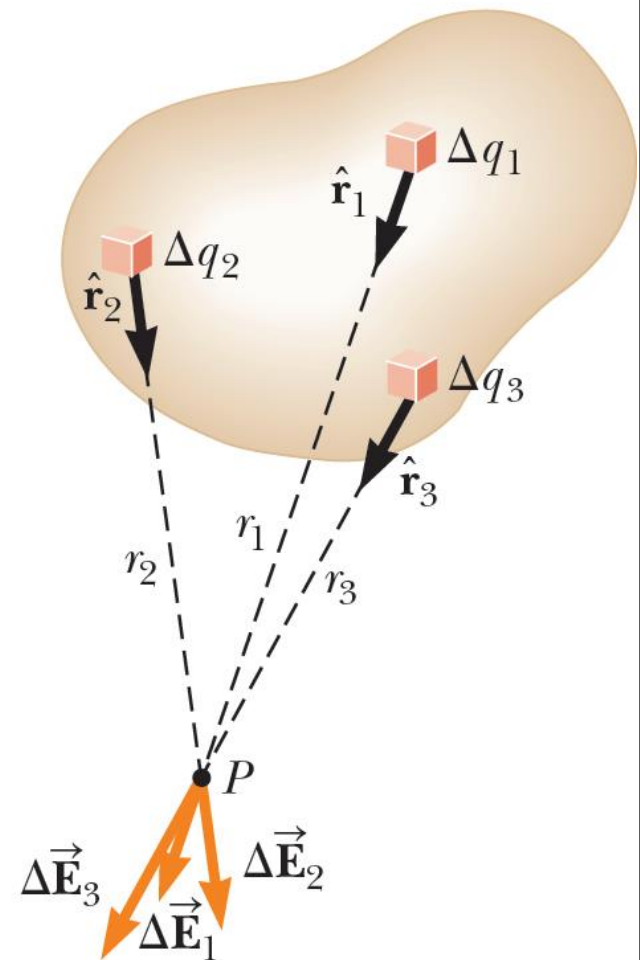
$$\Rightarrow E_P = 2k_e \frac{|q_1|}{y^2} \cos\theta$$

$$\text{Όμως } \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad \left\{ \Rightarrow E_P = 2k_e \frac{|q_1|a}{y^3} \right.$$
$$y \gg a \Rightarrow y^2 + a^2 \approx y^2$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία
- Πολλές φορές έχουμε μια **κατανομή φορτίου** αντί για σημειακά φορτία
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι συνεχώς και ομοιόμορφα κατανεμημένη σε μια ράβδο, επιφάνεια, ή όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

- Προσεγγιστικά

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

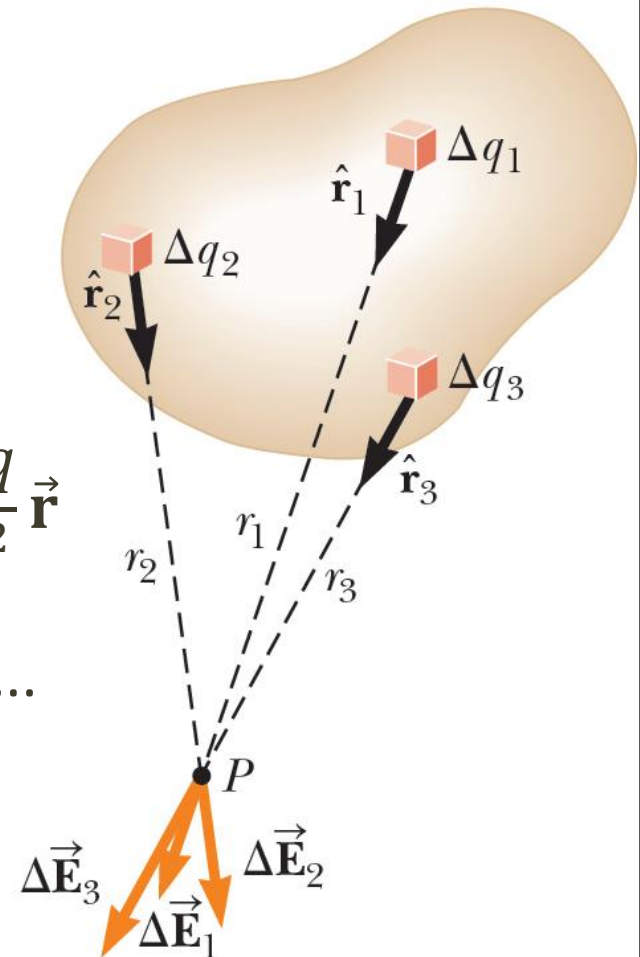
- Μπορούμε όμως να γράψουμε

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

- Το ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό...

- και μπορεί να περιλαμβάνει

- μια γραμμή
- μια επιφάνεια
- ή έναν όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

- Προς βοήθειά μας, θα ορίσουμε
 - Γραμμική πυκνότητα φορτίου

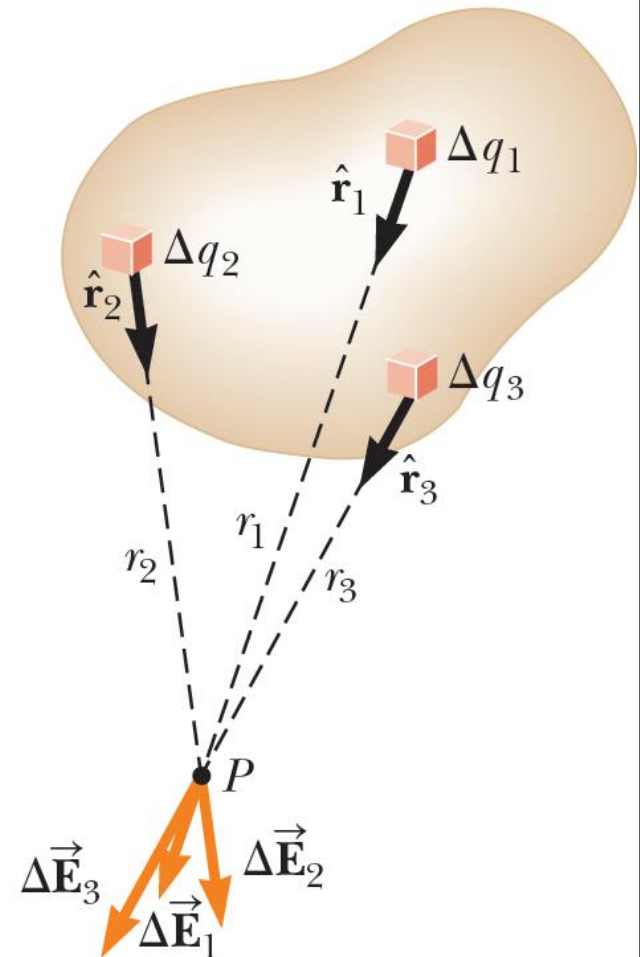
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

- Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

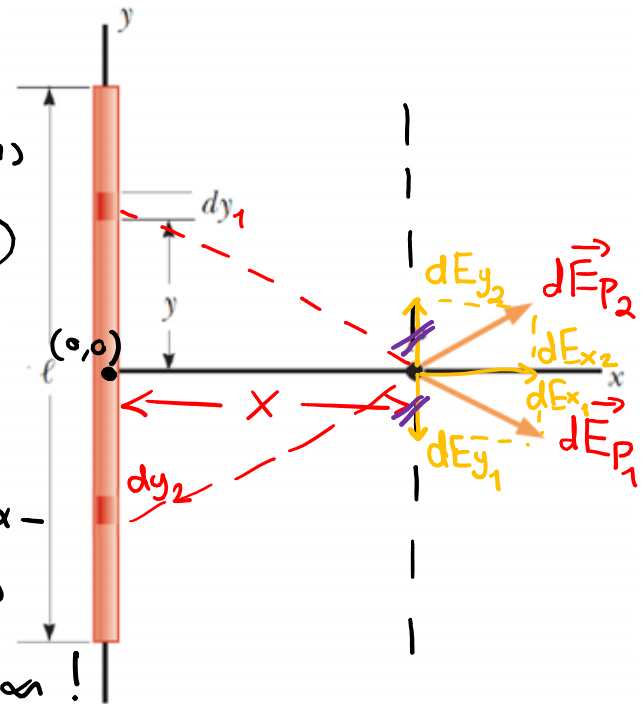


Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 1:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το μέσον της ράβδου, όπως στο σχήμα.

Τμηματοποιάμε τη ράβδο σε φορτία dq μήκους dy . Λέγω της ομοιόμορφης φόρτισης της ράβδου, ισχύει $\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy}$ (1)
Λέγω συμμετρίας και θέσης της ράβδου, παρατηράμε ότι οι y -συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P για οποιαδήποτε δύο σημειακά φορτία dq_1, dq_2 που ικανέχουν από το $(0,0)$ αλληλοακυρώνονται!



$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 1 – Λύση:

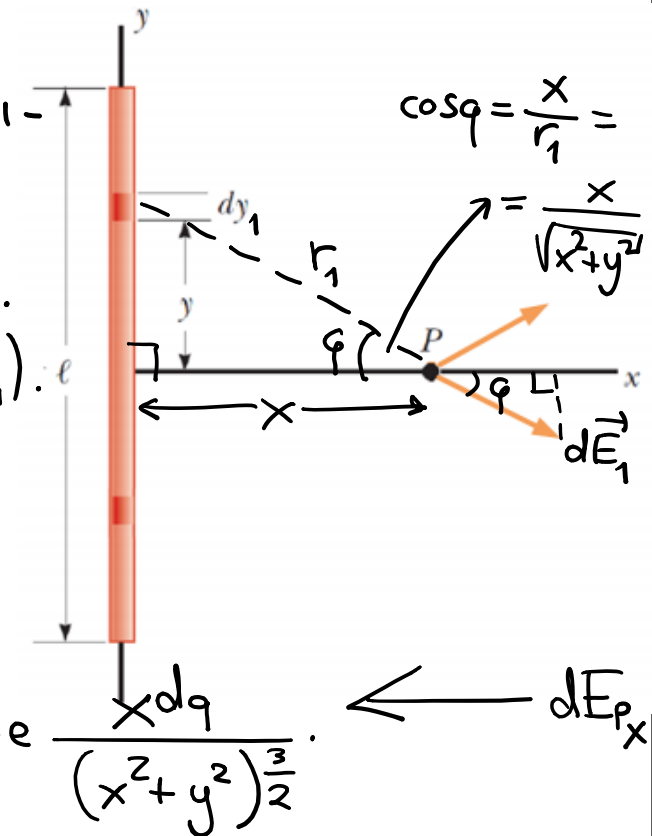
- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Άρα στο σημείο P θα έχουμε μόνο x-συνιστώσα του ηλεκτρ. πεδίου: $\vec{E}_P = \vec{E}_{Px}$.
Υπολογίζω τη συνεισφορά στο ηλεκτρ. πεδίο στο σημείο P λόγω του dy_1 (dq_1):

$$dE_P = k_e \frac{|dq_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|dq_1|}{x^2 + y^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2}$$

Η x-συνιστώσα του $d\vec{E}_P$ θα είναι:

$$dE_{Px} = dE_P \cdot \cos\varphi = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \frac{x dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$



$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

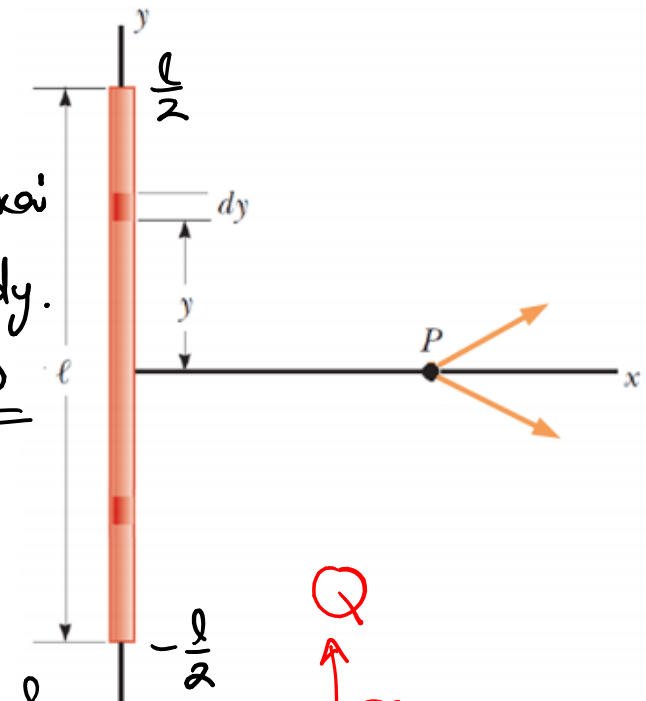
● Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Για να βρω τη x -συνιστώσα για όλη τη ράβδο, "αθροίζω" τις συνεισφορές ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P από κάθε κομμάτι dy .

$$\text{Άρα: } E_{P_x} = \int dE_{P_x} = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad k_e x \int \frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= k_e x \lambda \int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \\ &= k_e x \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \textcircled{2} \quad k_e x \lambda \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = k_e \lambda \frac{l}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}} = \end{aligned}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$= k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}. \text{ Άρα τελικά}$$

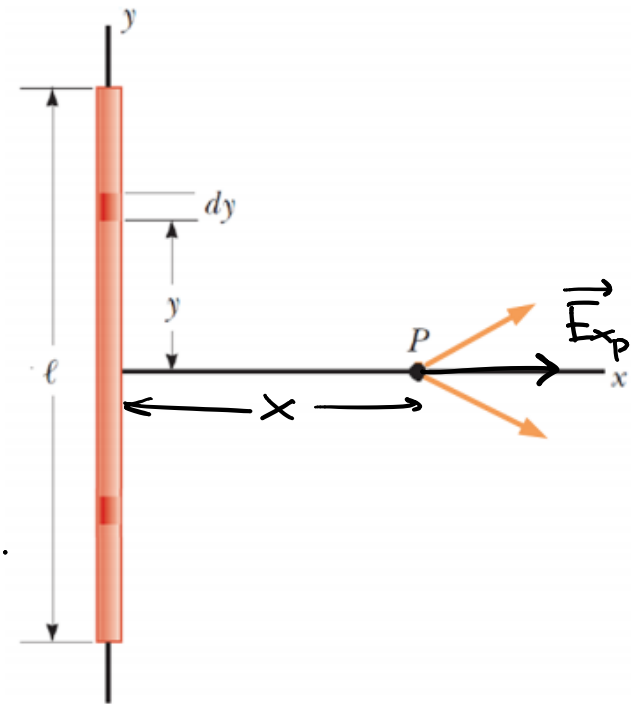
$$\vec{E}_{P_x} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \cdot \vec{i}.$$

- Τι γίνεται αν $x \gg l$? Τότε $x^2 + \frac{l^2}{4} \approx x^2$.

Άρα

$$E_{P_x} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2}} = k_e \frac{Q}{x^2}.$$

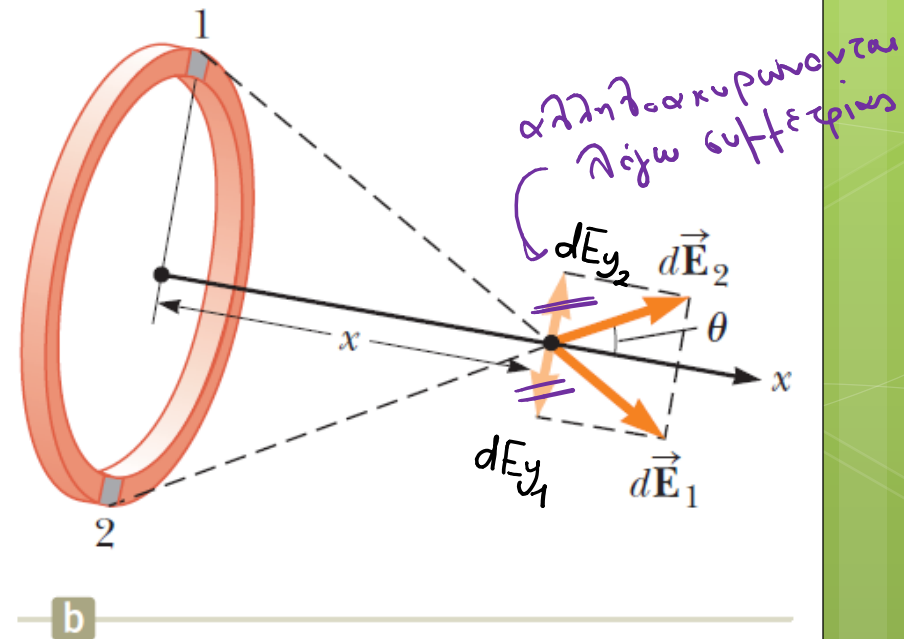
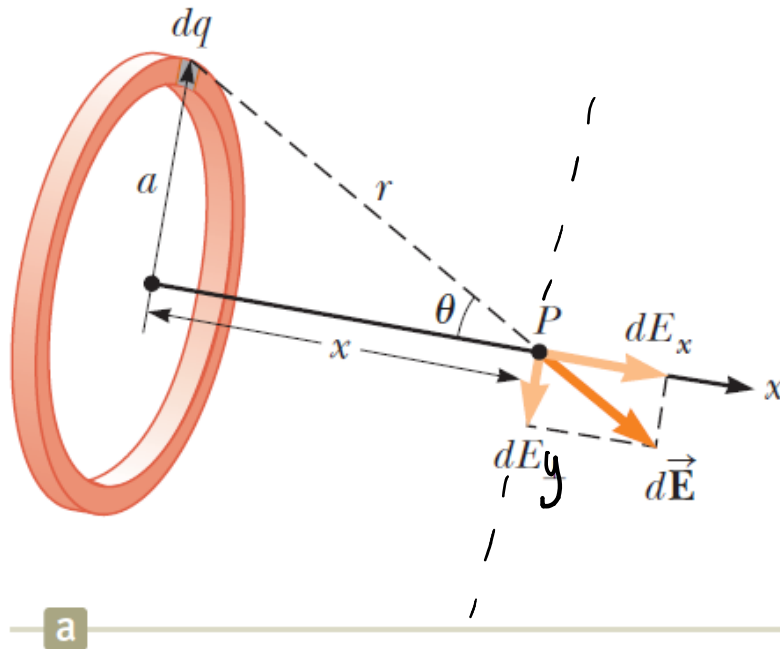
- Λάβετε όα αν $l \rightarrow +\infty$, τότε $E_P = k_e \frac{2\lambda}{x}$.



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 2:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου.

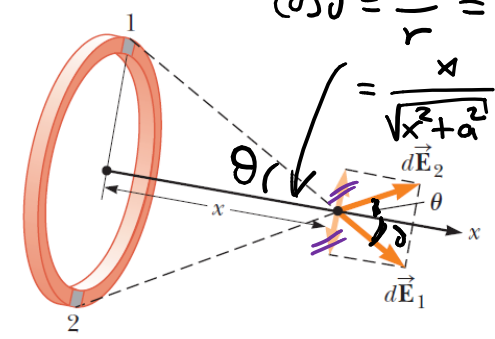
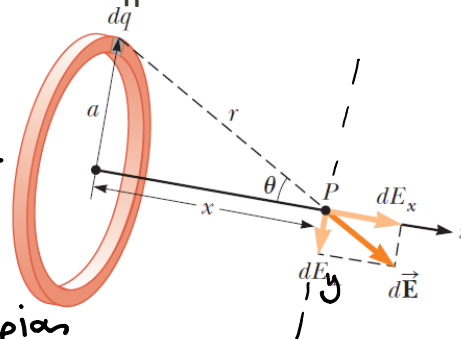


Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 2 – Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

Επιλέγαμε φορτίο dq , όπως στο Σχήμα. Επιλέγαμε το αυθαίρετο, dq_2 . Αναλύοντας σε συνιστώσες και λόγω της συμμετρίας



των σχήματος, οι y -συνιστώσες των ηλεκτρικών πεδίων στο σημείο P αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα το ηλεκτρ. πεδίο στο P θα έχει μόνο x -συνιστώσα: $\vec{E}_P = \vec{E}_{Px}$. Λόγω του φορτίου dq , το ηλ. πεδίο στο P θα είναι:

$$dE_P = k_e \frac{|dq|}{r^2} = k_e \frac{dq}{a^2 + x^2}, \text{ η } x\text{-συνιστώσα θα δίνεται ως}$$

$$dE_{Px} = dE_P \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 2 – Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανομημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$\text{Λέγω το } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

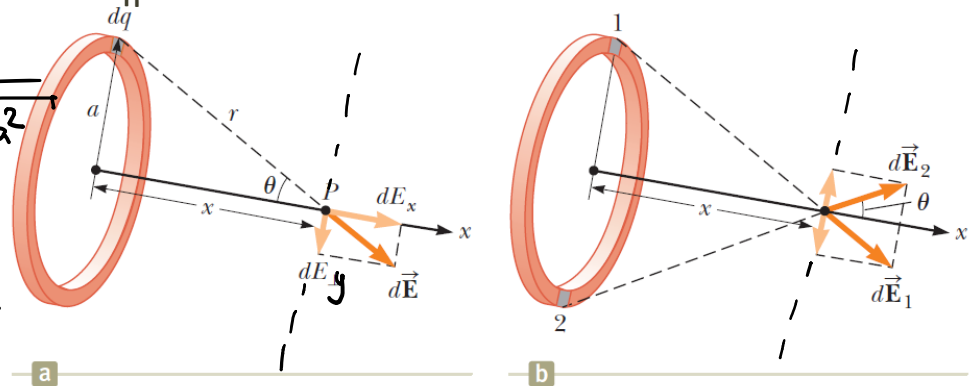
Θα έχω:

$$dE_{P_x} = k_e \frac{dq}{(x^2+a^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= k_e \frac{dq \cdot x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{"Αθροίσω" τις συνιστώσες ηλεκτρ. πεδίου για όλα τα}$$

$$\text{στοιχεία του δακτυλίου: } E_{P_x} = \int dE_{P_x} = k_e x \int \frac{dq}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= k_e x \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int dq}_Q = k_e x \frac{Q}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα 2 – 2^η Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$\textcircled{1} \quad \lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{ds} = \frac{Q}{2\pi a}$$

↑
μήκος κύκλου

Όσοια με πριν, καταλήγαμε στο

$$dE_{Px} = k_e \frac{x dq}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Όπως $dq = \lambda ds$ για κάθε απειρο-
στα μικρό τμήμα δακτυλίου ds .

Άρα

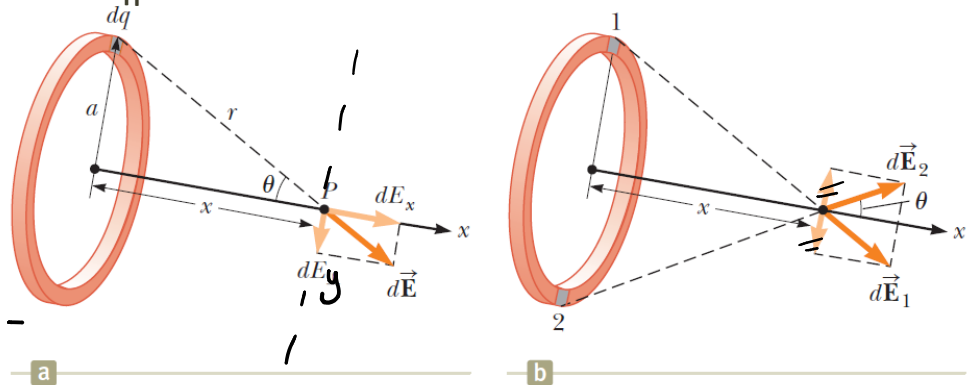
$$dE_{Px} = k_e x \frac{\lambda ds}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Υπολογίζω την "αδρειατική" συνεισφορά κάθε απειροστά μικρού τμήματος ds στο ηλεκτρικό

πεδίο στο σημείο P ως:

$$E_{Px} = \int dE_{Px} = k_e x \lambda \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int ds = k_e x \lambda \frac{2\pi a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = k_e x \frac{Q}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

↑
αδρειατικά είναι των απειροστά μικρών τμημάτων ds

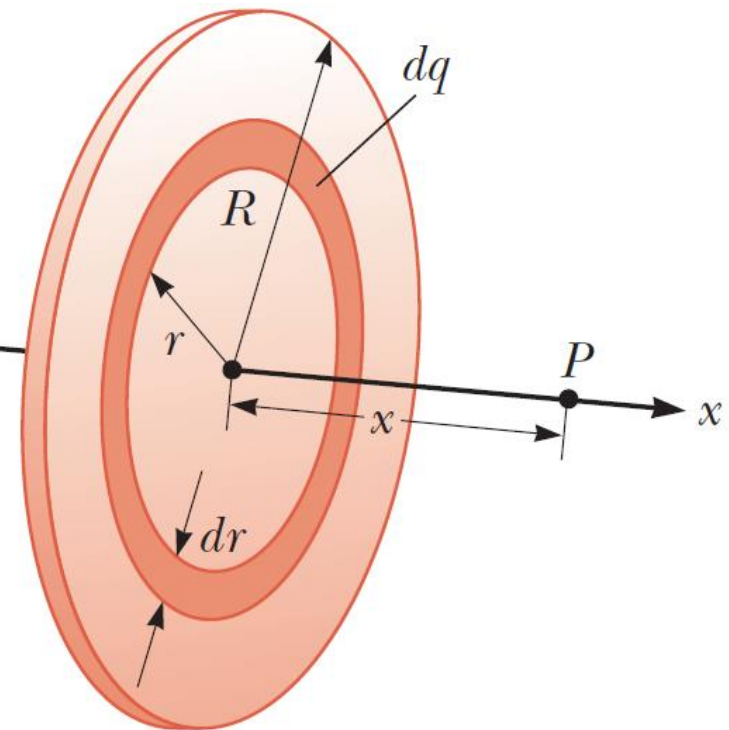


Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 3:

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε απόσταση x , και που βρίσκεται στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από δακτυλίους ακτίνας dr και να υπολογίσουμε τη συνεισφορά καθενός στο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P , και στο τέλος να "αθροίσουμε" αυτές ως συνεισφορές!



Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα 3 – Λύση:

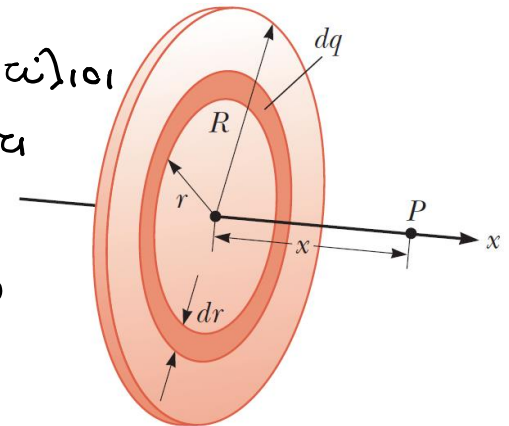
- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

Θεωράμε δακτύλιος ακτίνας $0 < r < R$. Οι δακτύλιοι συνιστούν συνολικά τον δίσκο. Βρήκαμε πριν ότι για ένα δακτύλιο φορτίου Q , ακτίνας a , το ηλεκτρ. πεδίο στο σημείο P του σχήματος είναι:

$$\vec{E}_P = k_e \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i}$$

Έστω τώρα δακτύλιος φορτίου dq , ακτίνας r , και πάχους dr . Ο δακτύλιος συνιστάει ηλ. πεδίο στο σημείο P ως

$$d\vec{E}_P = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} d\vec{E}_P = 2k_e \pi \sigma x \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i}.$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

Για να βρούμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο P πρέπει να "αθροίσουμε" τις συνεισφορές από όλες τις δακτυλίες που συνιστούν το δίσκο:

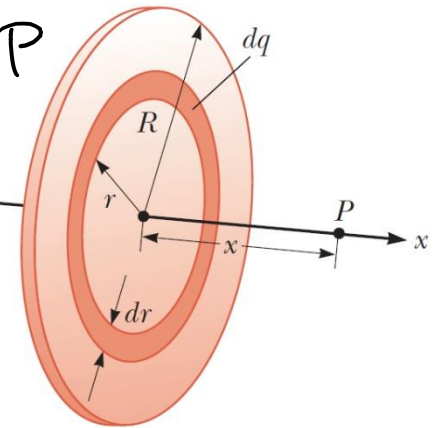
$$E_P = \int dE_P = 2\pi k_e \sigma x \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Θέτουμε } u = r^2 + x^2 \Rightarrow du = 2r dr$$

$$u_1 = 0^2 + x^2 = x^2$$

$$u_2 = R^2 + x^2 = R^2 + x^2$$

$$\Rightarrow E_P = \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2 + x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 3 – Λύση:

- Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P .

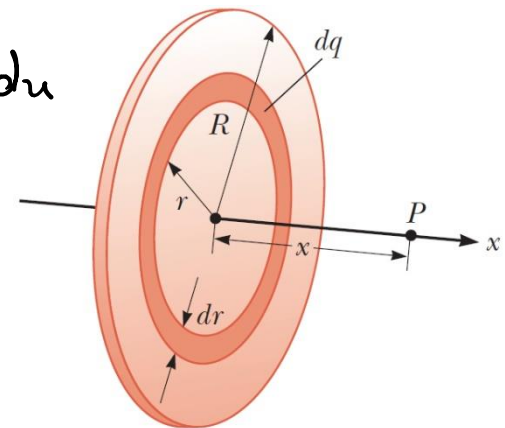
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du = \pi k_e \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-\frac{3}{2}} du$$

$$= \pi k_e \sigma x \left(-2 \cdot \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \right) \bigg|_{u=x^2}^{u=R^2+x^2} =$$

=

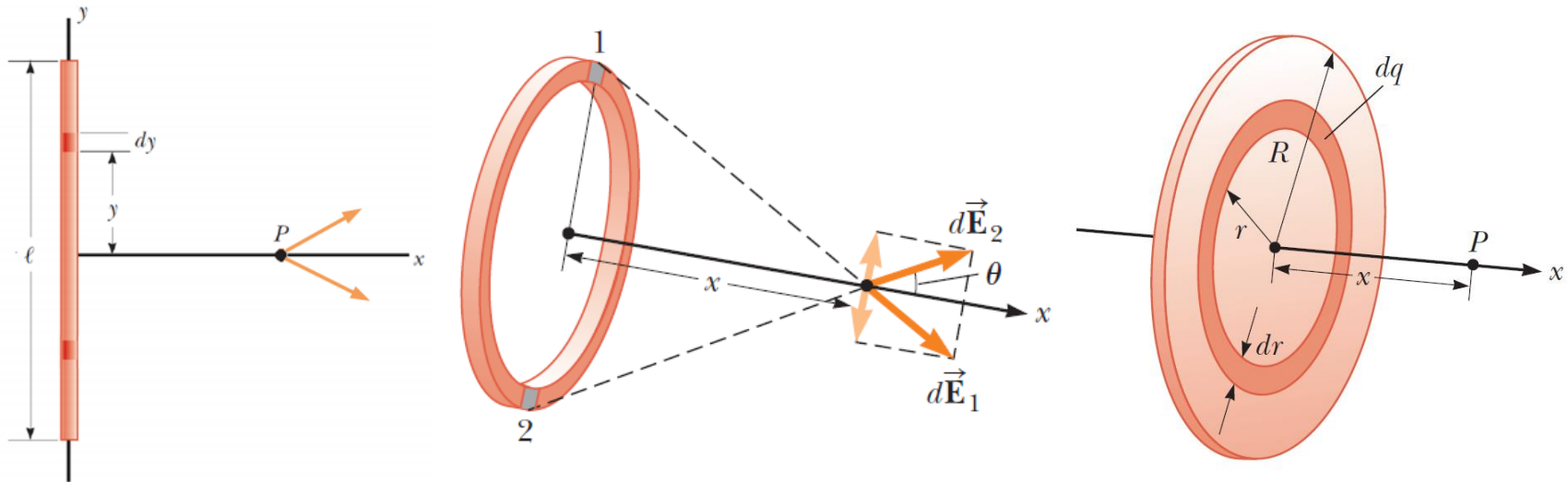
$$= 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right).$$



- Τι συμβαίνει αν $x \gg R$?
- Τι συμβαίνει αν $R \rightarrow \infty$?

Ηλεκτρικά Πεδία

Κατανομές φορτίων



$$\vec{E}_P = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \vec{i}$$

$$\vec{E}_P = k_e \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

$$\vec{E}_P = 2\pi\sigma k_e \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \vec{i}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικά Πεδία**

- Σε όλα τα παραδείγματα είδατε τη φιλοσοφία προσέγγισης
- Από ένα μικρό, «σημειακό» φορτίο (είτε πραγματικό σημειακό φορτίο είτε κατανομή μικρού φορτίου) γενικεύσαμε σε ολόκληρη την κατανομή φορτίου
- Υπολογίσαμε τη συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο λόγω του σημειακού φορτίου
- Αθροίσαμε (ολοκληρώσαμε) όλες τις συνεισφορές που οφείλονται σε όλα τα σημειακά φορτία

Ηλεκτρικά Πεδία

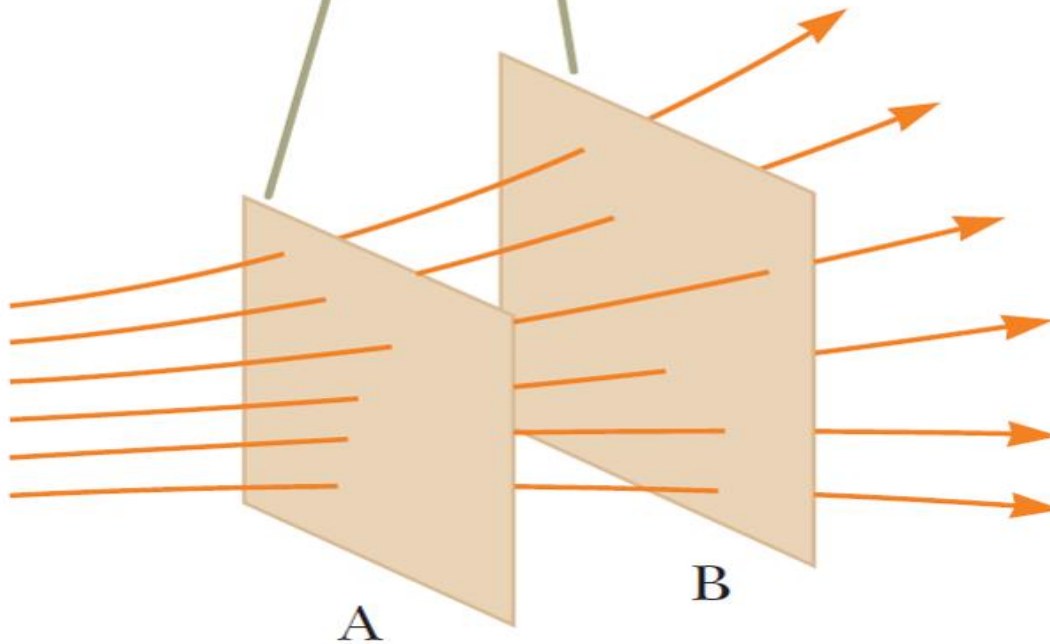
○ Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

- Δεν μπορούμε να δούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο
- Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης είναι οι **δυναμικές γραμμές** ηλεκτρικού πεδίου
 - Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο του χώρου
 - Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με αυτή της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα **θετικά** φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο
 - Ο αριθμός των γραμμών διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου
 - Με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές όπου η «δύναμη» του πεδίου είναι μεγαλύτερη

Ηλεκτρικά Πεδία

- Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στην επιφάνεια A από ότι στην επιφάνεια B.



Ηλεκτρικά Πεδία

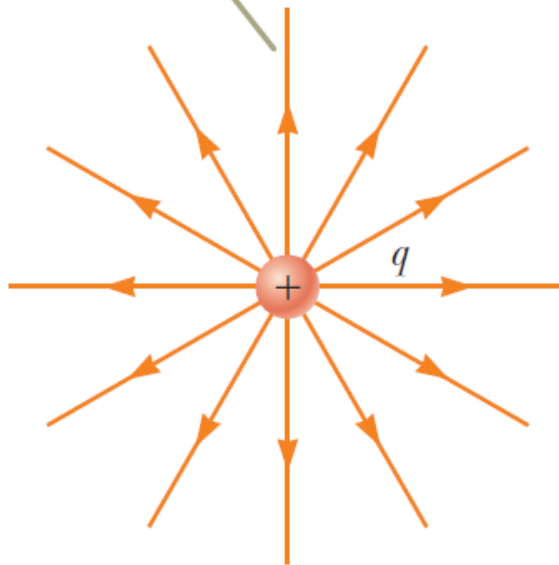
◉ Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

- ◉ Πώς τις σχεδιάζουμε;
- ◉ Για μεμονωμένα σημειακά φορτία, οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα «έξω» (θετικό φορτίο) ή προς τα «μέσα» (αρνητικό φορτίο)
- ◉ Για δύο ανόμοια φορτία, οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε κάποιες δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
- ◉ Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
- ◉ Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Ηλεκτρικά Πεδία

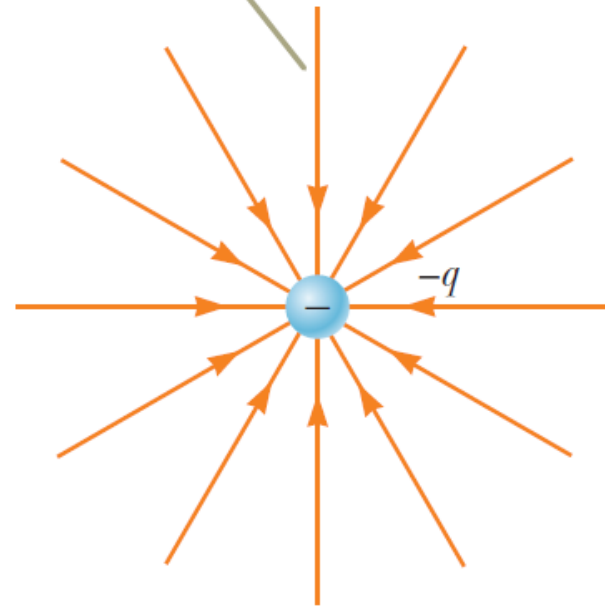
Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Για ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω.



a

Για ένα αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο, οι δυναμικές γραμμές έχουν κατεύθυνση ακτινικά προς τα μέσα.

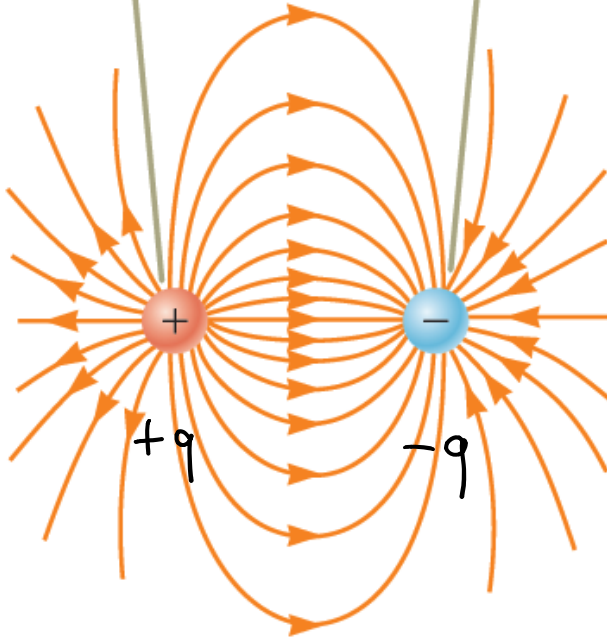


b

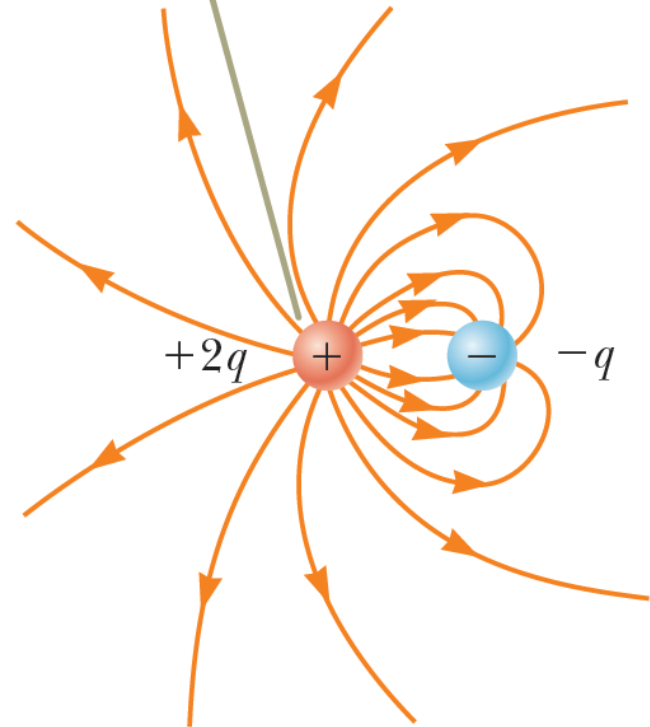
Ηλεκτρικά Πεδία

Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.

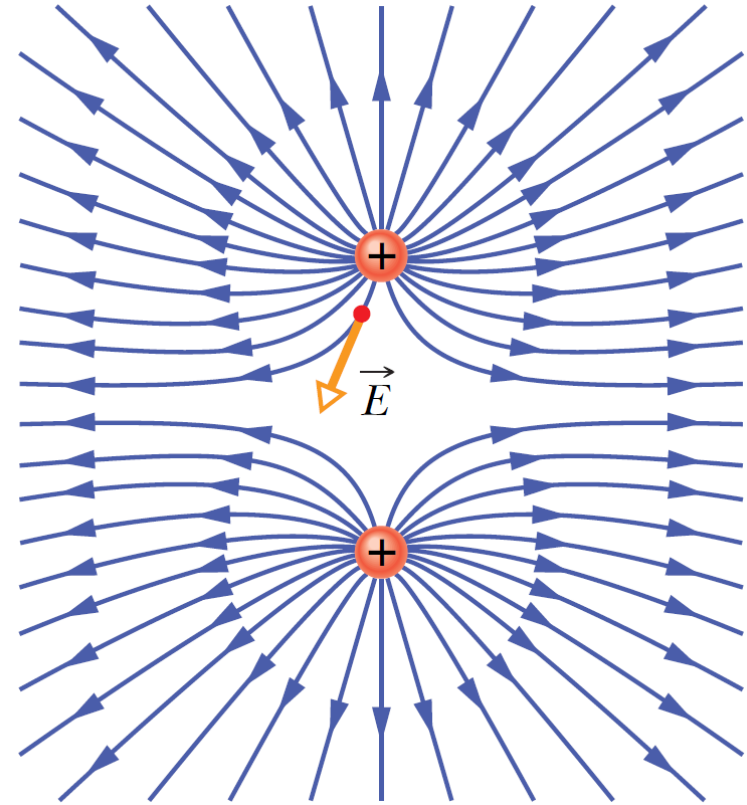
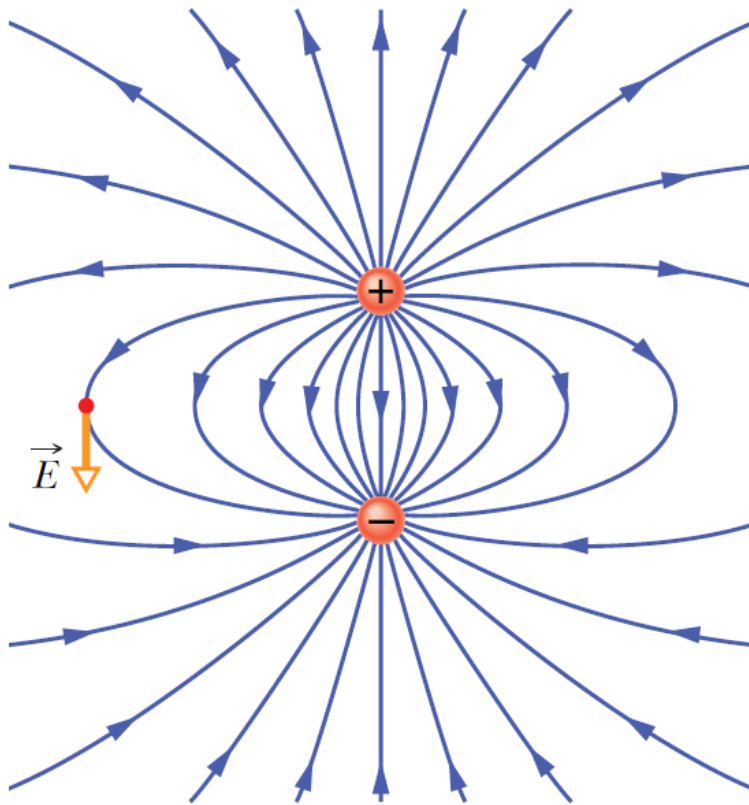


Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το $+2q$ για κάθε μια που τερματίζει στο $-q$.



Ηλεκτρικά Πεδία

Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**

- Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q
- Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
- Ομογενές: **σταθερό** μέτρο, **παράλληλες** δυναμικές γραμμές που ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία
- Επιταχυνόμενη κίνηση λόγω ηλεκτρικής δύναμης

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

- Αν το σωματίδιο έχει **θετικό** φορτίο, η κίνησή του ακολουθεί την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου
- Αλλιώς, η κίνηση είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου

Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα:

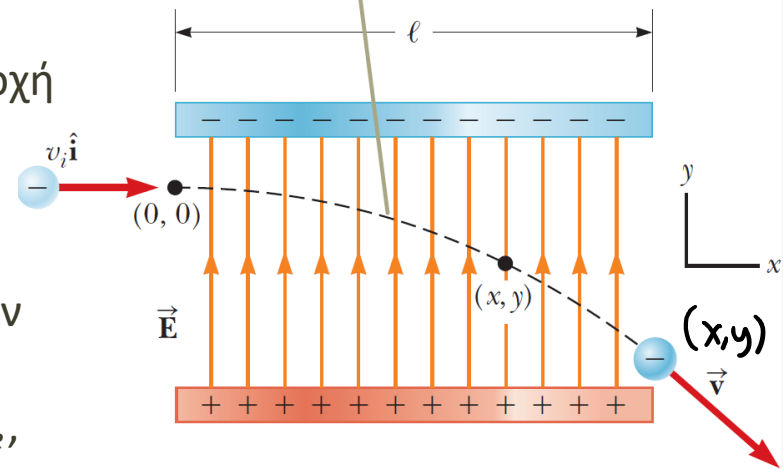
- ◉ Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$. Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e , καθώς και το φορτίο του, e .

A) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

B) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

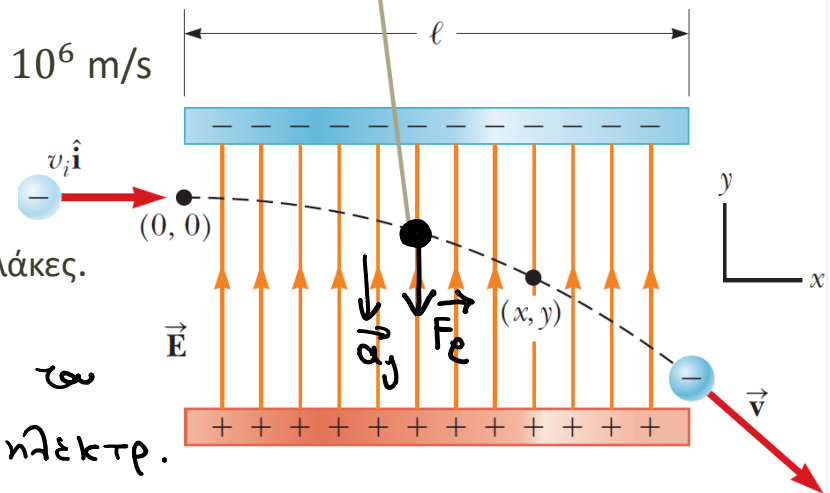


Ηλεκτρικά Πεδία

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$.
Α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται λόγω του ομογενούς ηλεκτρ. πεδίου και της ηλεκτρ.

δύναμης που του ασκείται εξ' αιτίας του πεδίου. Από το 2^ο νόμο του Newton θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_y &= m_e \vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_e = m_e \vec{a}_y \Rightarrow -F_e = m_e a_y \Rightarrow a_y = \frac{-F_e}{m_e} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{a_y &= -\frac{q_e E}{m_e}}. \end{aligned}$$

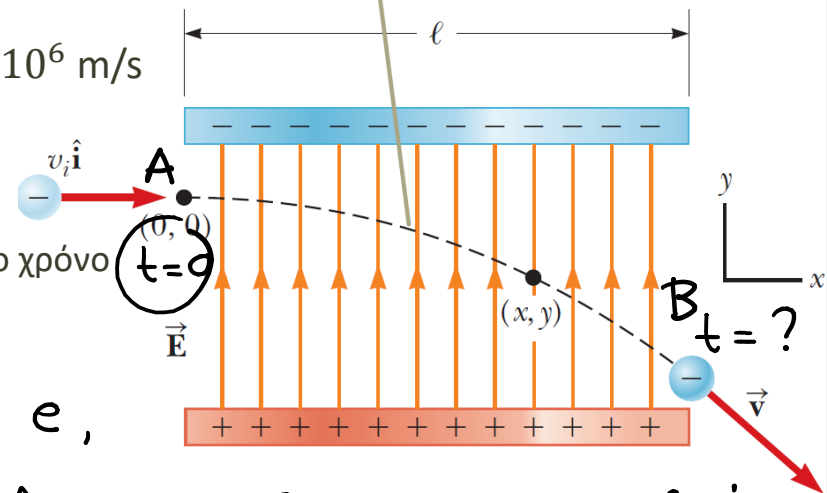
Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Στον x -άξονα της κίνησης του e , δεν ασκείται καμία δύναμη! Άρα το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον άξονα x της κίνησης του. Στην διαδρομή $A \rightarrow B$:

$$x_B = x_A + u_x t \Leftrightarrow \underbrace{x_B - x_A}_l = u_x t \Leftrightarrow l = u_x t \Rightarrow$$

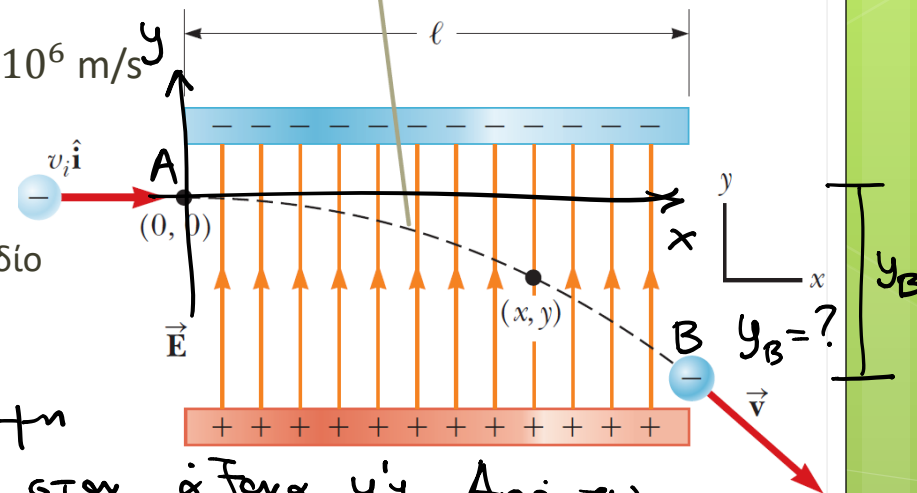
$$\Rightarrow t = \frac{l}{u_x} = \frac{l}{u_i} = \frac{10^{-1}}{3 \cdot 10^6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα – Λύση:

- Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$ και $E = 200 \text{ N/C}$. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1 \text{ m}$.
- Γ) Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Το ηλεκτρόνιο υφίσταται μια επιτάχυνση προς τα κάτω (αντίθετη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, και η κίνησή του είναι παραβολική όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.



Το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα y . Από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, έχουμε:

$$y_B = y_A + u_{iy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_B = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{eE}{m_e} \right) \left(\frac{l}{u_i} \right)^2 =$$

$$= -\frac{eEl^2}{2m_e u_i^2} \simeq -0.0195 \text{ m}.$$

• Ποια άλλη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί;



Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό



Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό Δυναμικό

○ Εισαγωγή

- Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής *δύναμης*
- Τώρα, θα συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της *ενέργειας*
- Θα ορίσουμε την έννοια του **ηλεκτρικού δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας**
 - Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει μεγάλη εφαρμογή στη λειτουργία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συσκευών
- Θα περιγράψουμε φαινόμενα με μεγαλύτερη ευκολία απ' ό,τι με χρήση πεδίων και δυνάμεων
 - Όπως περιγράψαμε πιο εύκολα τα φαινόμενα της Μηχανικής με ενεργειακά θεωρήματα σε σχέση με την περιγραφή μέσω δυνάμεων και εξισώσεων κινηματικής

Ηλεκτρικό Δυναμικό

○ Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Έστω ένα φορτίο q τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
- Έστω το **φορτίο + πεδίο** ως ένα **σύστημα**
- Δύναμη $F_e = qE$ ασκείται στο φορτίο
 - Η δύναμη οφείλεται στο πεδίο
 - Το φορτίο κινείται λόγω της ηλεκτρικής δύναμης
 - Η δύναμη είναι **συντηρητική** και **εσωτερική** δύναμη του συστήματος
 - Άρα το έργο της είναι **εσωτερικό** στο σύστημα
- Άρα το **πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα**
 - Όπως ακριβώς η βαρύτητα (βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα Γης-βιβλίου, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος

Ηλεκτρικό Δυναμικό

○ Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Για μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{s}$ ενός σημειακού φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο...

- Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι

$$dW_{int} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Θυμηθείτε: το έργο μιας εσωτερικής συντηρητικής δύναμης σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της **δυναμικής του ενέργειας: της ηλεκτρικής δυναμικής του ενέργειας!**

$$dW_{int} = -dU_e$$

- Άρα

$$dU_e = -dW_{int} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Για πεπερασμένη μετατόπιση από το σημείο (A) στο (B) είναι

$$\Delta U_e = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Δεν εξαρτάται από το μονοπάτι (η qE είναι συντηρητική δύναμη)!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

- Για μια **συγκεκριμένη θέση** του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια U_e , σε σχέση με μια θέση όπου έχει δυναμική ενέργεια $U_e = 0$ (διάταξη αναφοράς)

- Για παράδειγμα, όταν το φορτίο βρίσκεται στο άπειρο

- Διαιρώντας τη U_e με το φορτίο q :

$$V = \frac{U_e}{q}$$

το οποίο ονομάζεται **ηλεκτρικό δυναμικό** V

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Η **διαφορά δυναμικού** μεταξύ δυο σημείων (A) και (B) ορίζεται ως: η **μεταβολή** στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος «πεδίο-φορτίο» όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (A) και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\begin{aligned}\Delta V_{A \rightarrow B} &= V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} \\ &= -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

- Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρά δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου: $J/C = \text{Volt (V)}$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

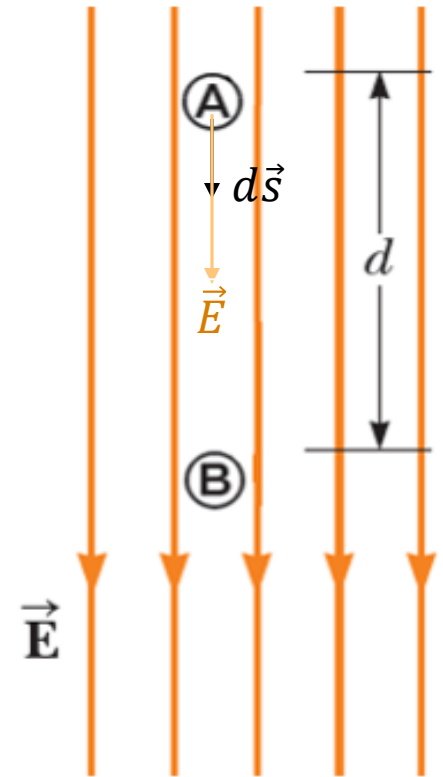
○ Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Δεν εξαρτάται από το φορτίο q , παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο!
- Άρα το δυναμικό αποτελεί ένα **χαρακτηριστικό του πεδίου!**
- Παρατηρήστε ότι $\text{Volt} = \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ m}$
- Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο διαφορές δυναμικού έχουν νόημα
- Πολλές φορές ορίζουμε εμείς ένα σημείο/μια περιοχή/μια διάταξη του συστήματος ως μηδενικού δυναμικού

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Διαφορά Δυναμικού
- Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα ☺
- Έστω ένα **ομογενές** ηλεκτρικό πεδίο
- Ας υπολογίσουμε τη ΔV ανάμεσα στα σημεία (A), (B), απόστασης d
- Η μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές



$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds = -E \int_A^B ds = -Ed$$

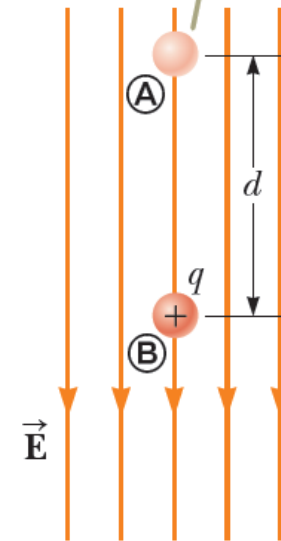
- Άρα

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

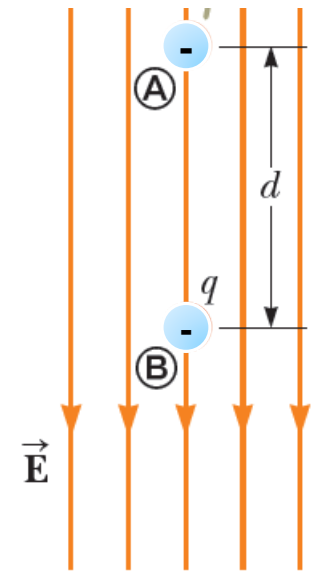
- Διαφορά Δυναμικού
- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φορτίο $+q$ που κινείται από το (A) στο (B)
- Τότε $\Delta U_e = q\Delta V_{A \rightarrow B} = -qEd$
- Βλέπουμε ότι $\Delta U_e < 0$
 - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όταν το θετικό φορτίο κατευθύνεται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
 - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (A) ένα φορτίο $q > 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «κάτω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
 - Άρα επιταχύνεται $\rightarrow$ αποκτά κινητική ενέργεια
 - Όσο προχωρά προς τα κάτω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου με την αύξηση της κιν. ενέργειας!
 - Σας εκπλήσσει αυτό; ☺ Γιατί συμβαίνει;

Όταν ένα θετικό φορτίο μετακινείται από το (A) στο (B), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μικραίνει.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Διαφορά Δυναμικού
- Ας θεωρήσουμε, στην ίδια διάταξη, τώρα ένα φορτίο $-q$ που κινείται από το (B) στο (A) (δε γίνεται να κινηθεί $A \rightarrow B$)
- Τότε $\Delta U_e = -q\Delta V_{B \rightarrow A} = -q(Ed) = -qEd$
 - ...αφού τώρα μετράμε $\Delta V_{B \rightarrow A}$ και όχι $\Delta V_{A \rightarrow B}$
- Βλέπουμε ότι πάλι $\Delta U_e < 0$!
 - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει ξανά όταν το αρνητικό φορτίο κατευθύνεται προς αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
 - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (B) ένα φορτίο $q < 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «πάνω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
 - Άρα επιταχύνεται $\rightarrow$ αποκτά κινητική ενέργεια
 - Όσο προχωρά προς τα πάνω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

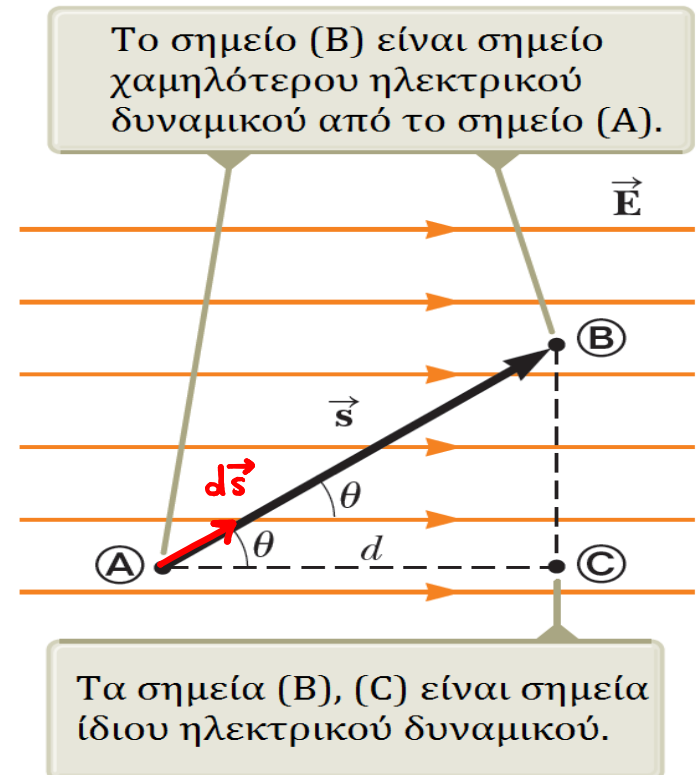
- Διαφορά Δυναμικού
- Ας γενικεύσουμε τώρα για μετατόπιση μη παράλληλη στις δυναμικές γραμμές
- Έστω ότι η μετατόπιση $\vec{s}$ από το (A) στο (B) ΔΕΝ είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές

- Τότε για τη μετατόπιση $\vec{s}$

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds \cos(\theta) = -E \cos(\theta) \int_A^B ds = -E \underbrace{\cos(\theta) \int_A^B ds}_d \\ &= -Ed\end{aligned}$$

Άρα για το σύστημα πεδίο-φορτίο

$$\Delta U_e = q\Delta V = -qEd$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Διαφορά Δυναμικού

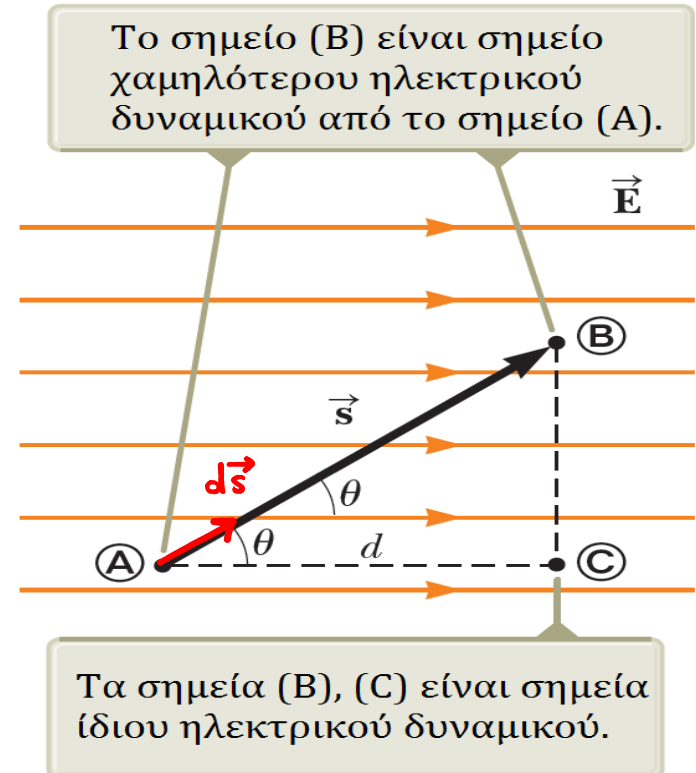
- Άρα για το σύστημα πεδίο-φορτίο

$$\Delta U_e = -q\vec{E} \cdot \vec{s} = -qEd$$

- Όμως είδαμε πριν ότι

$$\Delta V_2 = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^C d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} = -Ed$$

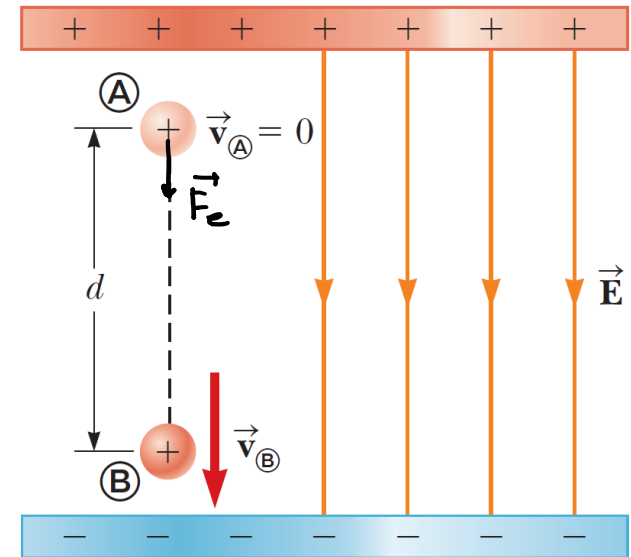
- Συμπέρασμα: όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στο πεδίο έχουν ίδιο δυναμικό (**ισοδυναμική επιφάνεια**)



Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα:

- Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (A) σε ομογενές ηλεκτρ. πεδίο μέτρου $8 \times 10^4 \frac{V}{m}$. Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου $d = 0.5 \text{ m}$ στο σημείο (B) στην κατεύθυνση του $\vec{E}$. Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου στη θέση (B). Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου στη θέση (B). Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ και $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Θεωράμε το σύστημα πεδίο + φορτίο.

Το σύστημα είναι απομονωμένο.

Άσκειται μόνο η $\vec{F}_e$ στο σύστημα, η οποία είναι εξωτερική και συντηρητική.

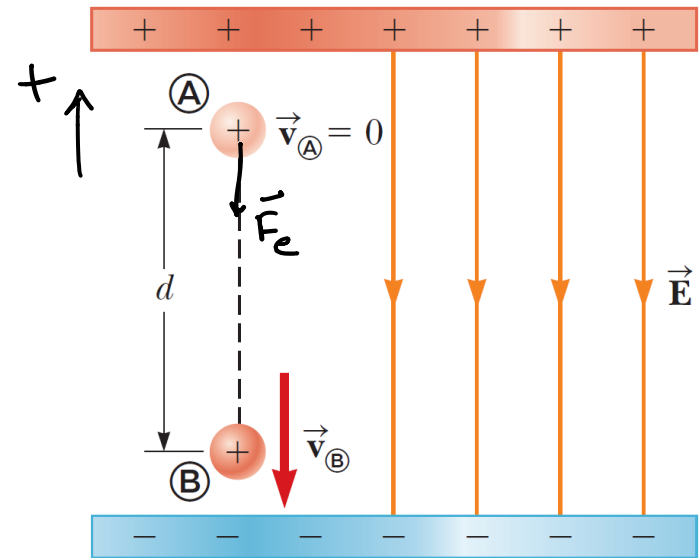
$$\text{Α.Δ.Μ.Ε}_{A \rightarrow B} : K_A + U_{eA} = K_B + U_{eB} \Leftrightarrow$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{eA \rightarrow B} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_p u_B^2 - 0 - q_p E d = 0$$

$$u_B^2 = \frac{2 q_p E d}{m_p} \Rightarrow u_B = \pm \sqrt{\frac{2 q_p E d}{m_p}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= \pm 2.8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Διαφορά Δυναμικού

- Θα μελετήσουμε διαφορές δυναμικού σε δυο περιπτώσεις
- 1. Δυναμικό από σημειακά φορτία
- 2. Δυναμικό από κατανομή φορτίου

Ηλεκτρικό Δυναμικό

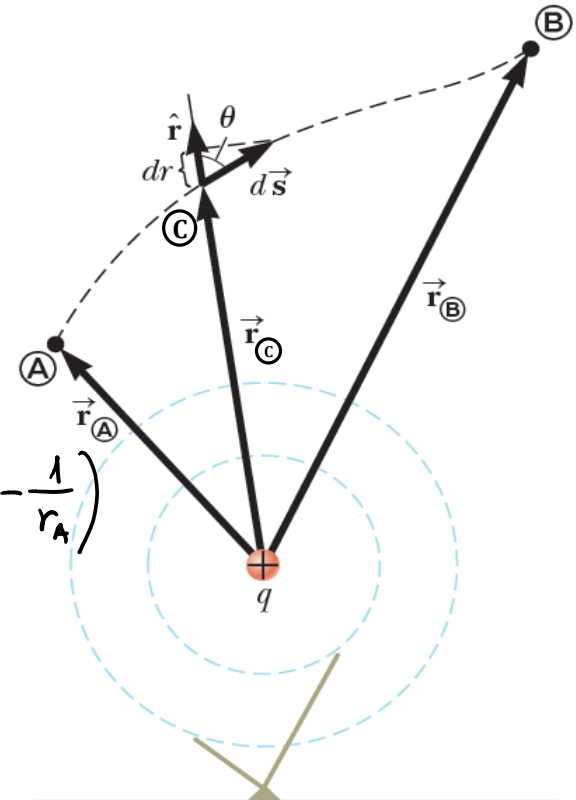
- Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι:

για δυο σημεία (A), (B) εντός ηλεκτρικού πεδίου πηγής φορτίου q που απέχουν απόσταση r_A, r_B από την πηγή φορτίου, η διαφορά δυναμικού $\Delta V_{A \rightarrow B}$ δίνεται από τη σχέση

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = \frac{k_e q}{r_B} - \frac{k_e q}{r_A} = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

- Βλέπετε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής από το (A) στο (B)
 - Το πεδίο είναι **συντηρητικό**
- Επίσης, εξαρτάται μόνο από τα r_i
- Ποια η σχέση για το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο C?



Οι δυο διακεκομμένοι κύκλοι αναπαριστούν τομές σφαιρικών επιφανειών με ίδιο δυναμικό.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία

- Συνήθως θεωρούμε ότι $V = 0$ σε ένα σημείο μακριά από την πηγή φορτίου, με $r_{\text{μακριά}} = \infty$
- Ηλεκτρικό δυναμικό V_C λόγω σημειακού φορτίου σε απόσταση r_C από το φορτίο:

$$V_C - V_{\text{μακριά}} = V_C - 0 = k_e \frac{q}{r_C}$$

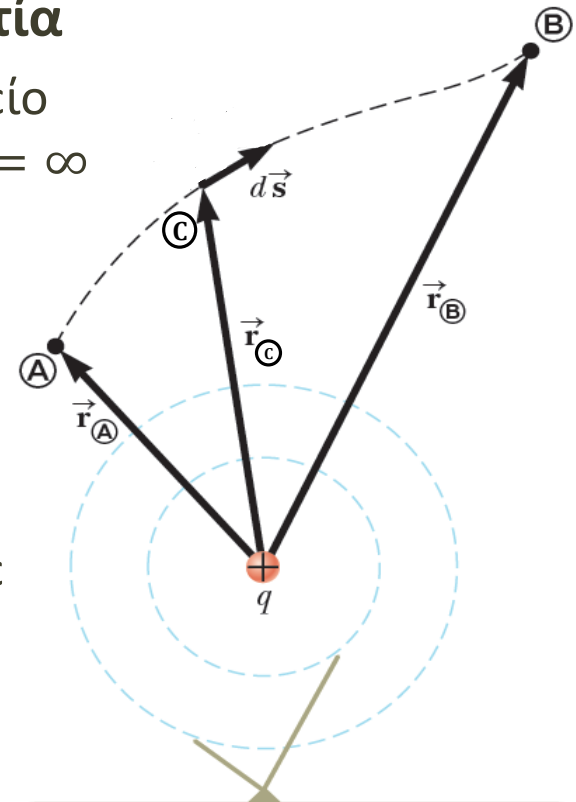
- Άρα τελικά για οποιοδήποτε σημείο C σε απόσταση r_C από την πηγή q θα έχουμε

$$V_C = k_e \frac{q}{r_C}$$

Αριθμός!!

- Για πολλές πηγές φορτίου,

$$V = \sum V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



Οι δυο διακεκομμένοι κύκλοι αναπαριστούν τομές σφαιρικών επιφανειών με ίδιο δυναμικό.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία

- Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου κάποια **εξωτερική** δύναμη μετακινεί ένα φορτίο στο πεδίο
 - Από ένα σημείο (A) σε ένα (B)
 - Χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια (σταθερή ταχύτητα)
 - Αλλάζει όμως η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια!
 - Αλλαγή της διάταξης/σύνθεσης/διαμόρφωσης του συστήματος
- Μη απομονωμένο σύστημα {πεδίο-φορτίο}:
 - Αρχή Διατήρησης Ενέργειας

$$\left. \begin{aligned} W_{ext} &= \Delta K + \Delta U_e = 0 + \Delta U_e \\ \Delta V_{A \rightarrow B} &= \frac{\Delta U_e}{q} \Rightarrow \Delta U_e = q \Delta V_{A \rightarrow B} \end{aligned} \right\} W_{ext} = q \Delta V_{A \rightarrow B}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

○ Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία

- Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο πηγής q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω **εξωτερικής** δύναμης έργου W_{ext}
- Το φορτίο q_2 έρχεται από πολύ «μακριά»: $V_{μακριά} = 0$
 - Επίσης, όταν το q_2 βρίσκεται «μακριά», η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων θεωρείται μηδενική
 - Το έργο W_{ext} μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια U_e του συστήματος των φορτίων
 - Δηλ. $W = \Delta U_e$, άρα η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους φορτίων είναι

$$\Delta U_e = W = q_2 \Delta V = q_2 (V - V_{μακριά})$$

$$U_e - 0 = q_2 \left(k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0 \right)$$

$$U_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**

- Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο φορτίου q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω εξωτερικής δύναμης

$$U_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

- Αν $U > 0$, το έργο της εξωτ. δύναμης είναι θετικό
 - Τα φορτία απωθούνται, άρα πρέπει να παραχθεί έργο από την εξωτερική δύναμη για να τα φέρει σε απόσταση r_{12}
- Αν $U < 0$, το έργο της εξωτ. δύναμης είναι αρνητικό
 - Τα φορτία έλκονται, άρα πρέπει να παραχθεί αρνητικό έργο (χρειάζεται δύναμη αντίθετη στην μετατόπιση (έλξη) των φορτίων) για να τα κρατήσουμε σε απόσταση r_{12}

- Για πολλά φορτία,

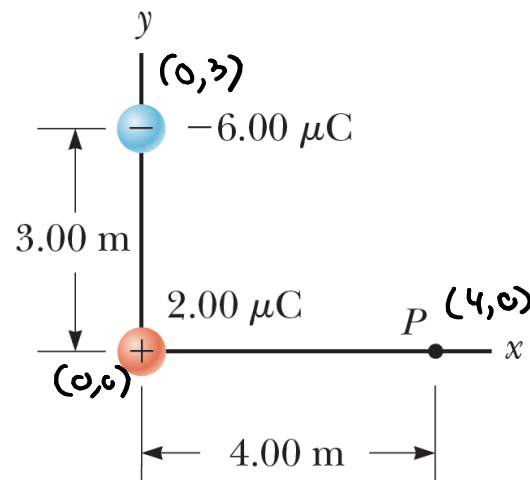
$$U_e = k_e \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, i < j$$

- Αθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων

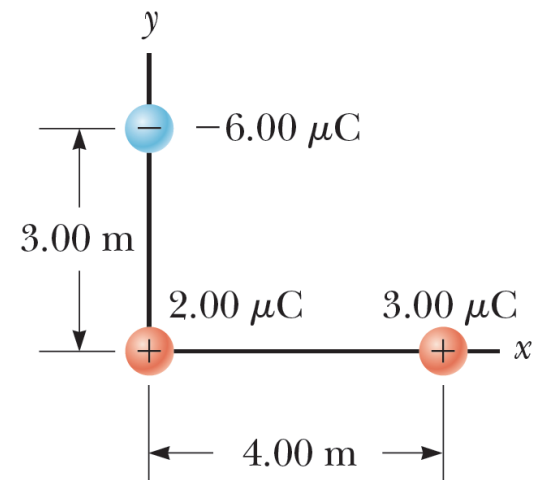
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.
Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0) \text{ m}$.
Β) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3 \mu\text{C}$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



a



b

Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.

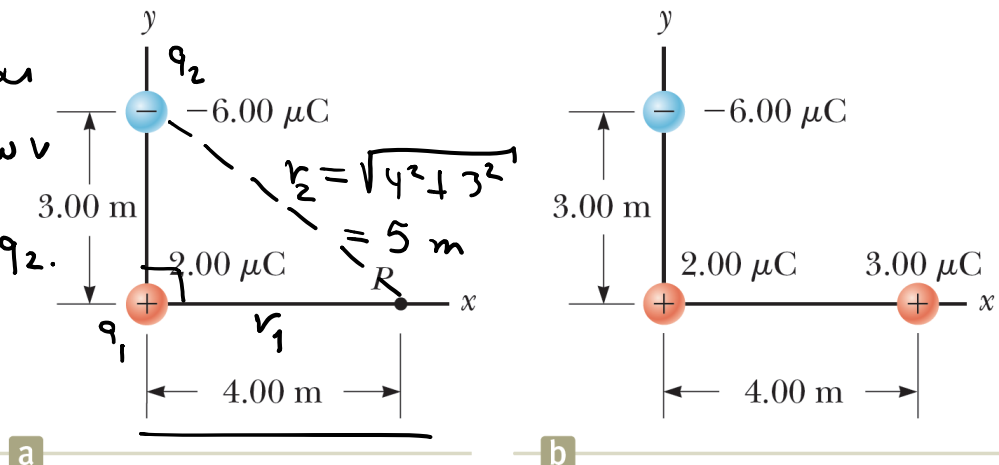
Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0) \text{ m}$.

Το δυναμικό στο P θα είναι
το άθροισμα των δυναμικών
εξ' αιτίας των q_1 και των q_2 .

$$\text{Άρα: } V_P = V_{q_1}^P + V_{q_2}^P$$

$$= k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2} = k_e \frac{q_1}{4} + k_e \frac{q_2}{5} =$$

$$= k_e \left(\frac{q_1}{4} + \frac{q_2}{5} \right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} + \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{5} \right) \approx -6.3 \cdot 10^3 \text{ V}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση $(0, 3) \text{ m}$.

Β) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3 \mu\text{C}$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.

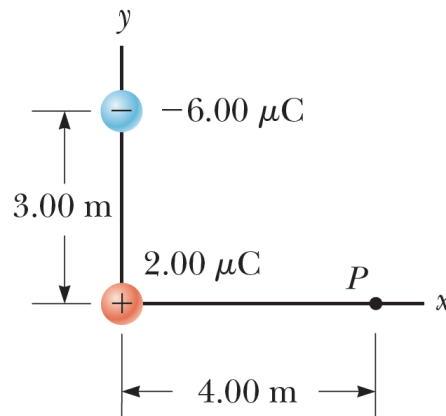
Θεωρούμε ότι η U_e του συστήματος είναι 0 όταν το q_3 είναι στο "άπειρο".

Άρα:

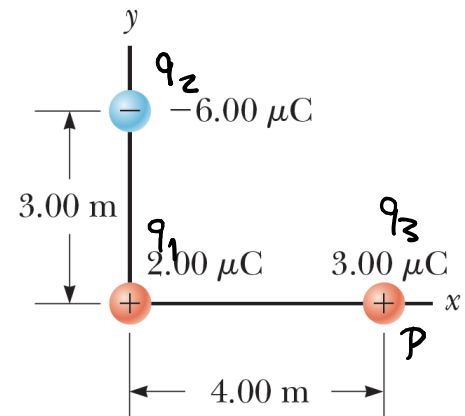
$$\Delta U_e = U_e - U_{e, \text{άπειρο}} \quad \text{↗}$$

$$= k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}}, \text{ ενώ ηλεκτικώς:}$$

$$\Delta U_e = q_3 \cdot V_P = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-6.3 \cdot 10^3) = -1.9 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$



a



b

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**

- Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ από το δυναμικό V ;
- Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού dV μεταξύ δυο σημείων απειροστά μικρής απόστασης $d\vec{s}$, τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Αν το ηλεκτρ. πεδίο έχει μόνο μια συνιστώσα (έστω x , αλλά ισχύει και για τις υπόλοιπες συνιστώσες), τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_x dx$$

και άρα

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Τι σας θυμίζει??

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Συνεχής κατανομή φορτίου**

- Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
- Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:
 - **1. Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή: θεωρούμε το δυναμικό dV σε σημείο P απόστασης r λόγω σημειακού φορτίου dq , το οποίο είναι**

$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

και ολοκληρώνουμε, παίρνοντας

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Σημείο μηδενικού δυναμικού θεωρείται ένα σημείο απείρως μακριά από το φορτίο.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- Συνεχής κατανομή φορτίου

- Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
- Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:
 - 2. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό από κάποια άλλη μέθοδο: εκτιμούμε το $\vec{E}$, και αντικαθιστούμε στην

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού ΔV . Τέλος, επιλέγουμε βολικό σημείο μηδενικού δυναμικού.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

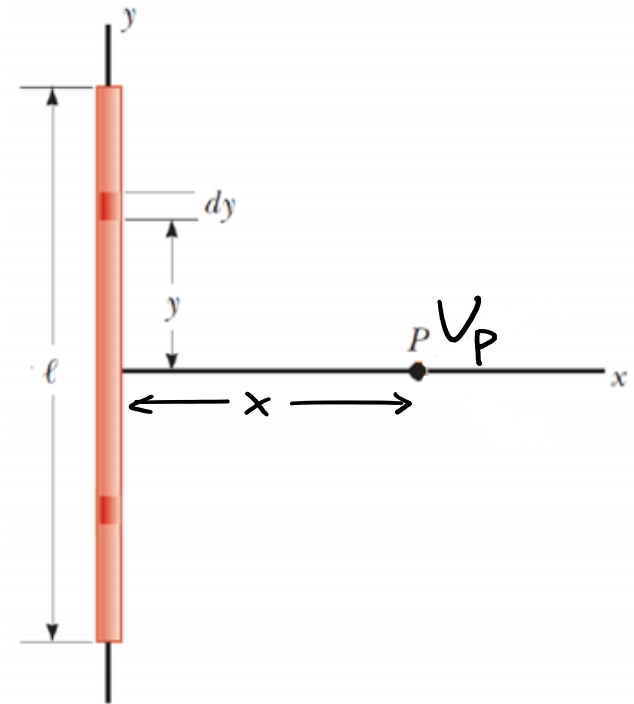
Παράδειγμα 1:

- Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για μια ράβδο μήκους l με ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.

Hint: από ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_P = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \vec{i}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για μια ράβδο μήκους l με ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$.

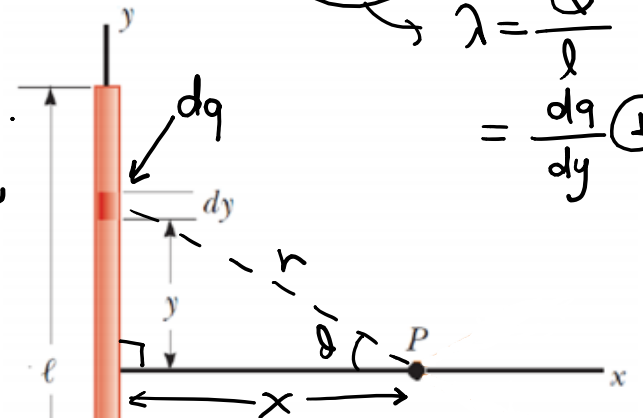
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

Θεωρώ αμεροστά μικρό φορτίο dq , μήκους dy .
Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P λόγω του φορτίου dq είναι:

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{①}{=} k_e \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

"Αθροίζω" όλες τις συνεπόμενες ηλεκτρ. δυναμικότητες και το φορτίο dq της ράβδου.

$$V_P = \int dV_P = k_e \lambda \int \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \longrightarrow$$



$$\lambda = \frac{Q}{l} \\ = \frac{dq}{dy} \text{ ①}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Παράδειγμα 1 – Λύση:

Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο.

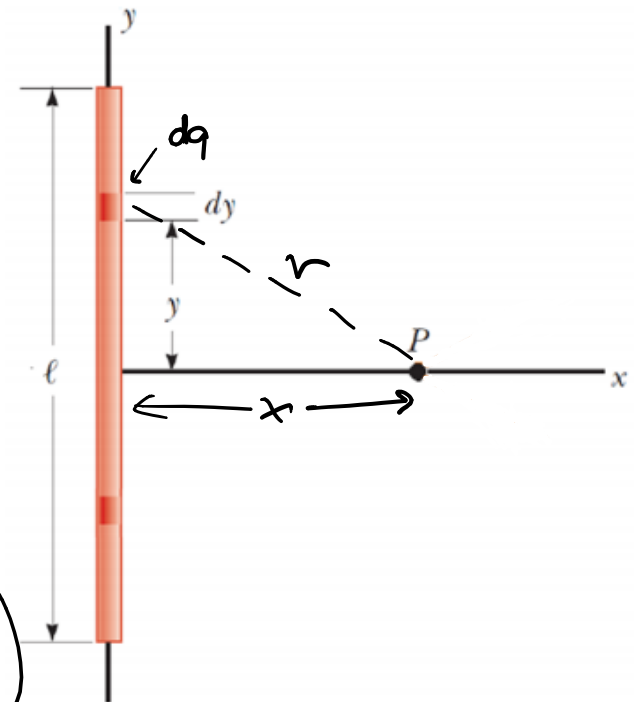
$$= k_e \lambda \left(\ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \Big|_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}}$$

$$= k_e \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2} - \frac{l}{2}} \right).$$

Το ηλεκτρ. πεδίο στο σημείο P έχει μόνο x-συνιστώσα, όπως έχουμε ήδη πει. Άρα

$$E_x^P = -\frac{dV^P}{dx} = -k_e \lambda \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2} - \frac{l}{2}} \right)$$

$$= \dots = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}}.$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

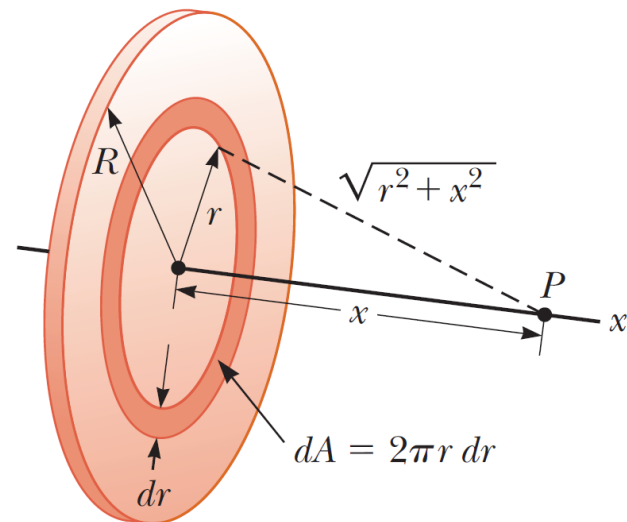
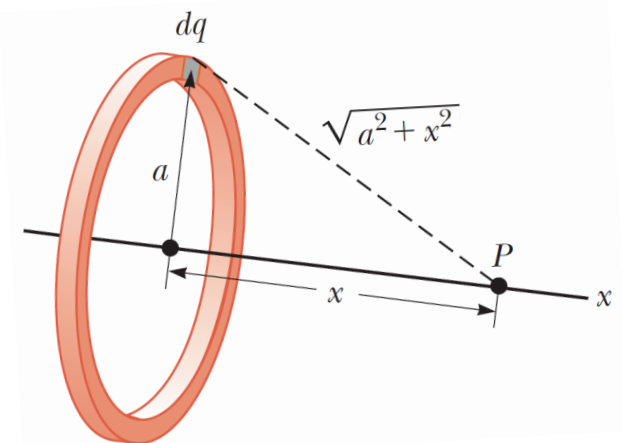
● Παράδειγμα 2 – Εξάσκηση ☺ :

- Δείξτε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P για τις παρακάτω κατανομές φορτίου δίνεται από τις σχέσεις

$$V_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V_P = 2\pi\sigma k_e \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right)$$

και βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο – που ήδη γνωρίζετε από προηγούμενες διαλέξεις – μέσω αυτών.



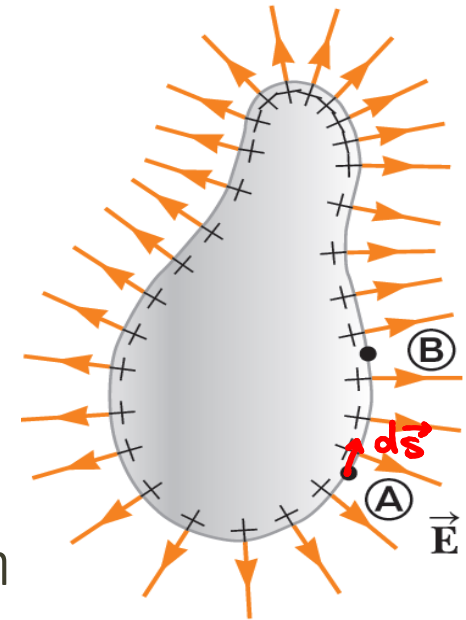
Ηλεκτρικό Δυναμικό

● Αγωγοί – Δυναμικό

- Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία οι οποίες είναι σχετιζόμενες με το δυναμικό
- Έστω δυο σημεία A και B της επιφάνειας
 - Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνειά του από το A στο B, το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη μετατόπιση $d\vec{s}$
 - Άρα

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

- **Συμπέρασμα**: η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια





Εικόνα: Όλες οι παραπάνω συσκευές είναι πυκνωτές, οι οποίοι αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο και ενέργεια. Ο πυκνωτής είναι ένα είδος κυκλώματος που μπορούμε να συνδυάσουμε με άλλα για να φτιάξουμε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Φυσική για Μηχανικούς

Χωρητικότητα



Εικόνα: Όλες οι παραπάνω συσκευές είναι πυκνωτές, οι οποίοι αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο και ενέργεια. Ο πυκνωτής είναι ένα είδος κυκλώματος που μπορούμε να συνδυάσουμε με άλλα για να φτιάξουμε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Φυσική για Μηχανικούς

Χωρητικότητα

Χωρητικότητα



- **Εισαγωγή**

- Σε αυτή τη διάλεξη θα μιλήσουμε για το πρώτο από τα τρία βασικά συστατικά των ηλεκτρικών κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος
- Τον **πυκνωτή!**
- Οι πυκνωτές είναι **διατάξεις που αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια**
- Πυκνωτές χρησιμοποιούνται
 - για την επιλογή συχνότητας στο ραδιόφωνό σας
 - ως φίλτρα σε παροχές ρεύματος
 - για αποθήκευση ενέργειας όταν θέλετε να βγάλετε φωτογραφία με φλας 😊
 - κ.α.

Χωρητικότητα



- Χωρητικότητα

- Έστω δυο αγωγοί όπως στο σχήμα

- Αυτή η διάταξη ονομάζεται **πυκνωτής**

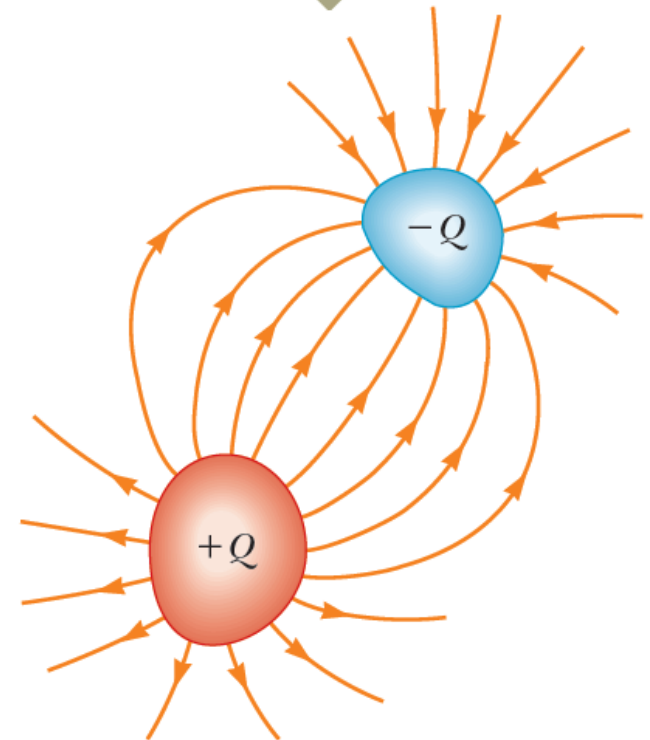
- Οι αγωγοί λέγονται *αγώγιμες πλάκες* (ή *οπλισμοί*)

- Αν οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου $|Q|$ και αντίθετου προσήμου, τότε αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους

- Το συνολικό φορτίο είναι βέβαια μηδέν

- Τι καθορίζει πόσο φορτίο μπορούν να φέρουν;

Όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου και αντίθετου προσήμου.





Χωρητικότητα

○ Χωρητικότητα

- Πειραματικά, έχει δειχθεί ότι η ποσότητα φορτίου Q σε έναν πυκνωτή είναι γραμμικά ανάλογη με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους αγωγούς
- Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από το σχήμα και την απόσταση των αγωγών
- Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως $Q = C\Delta V$, αν ορίσουμε τη χωρητικότητα ως:
- Η **χωρητικότητα** C ενός πυκνωτή ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου του φορτίου σε οποιονδήποτε αγωγό προς το μέτρο της διαφοράς δυναμικού ανάμεσά τους:

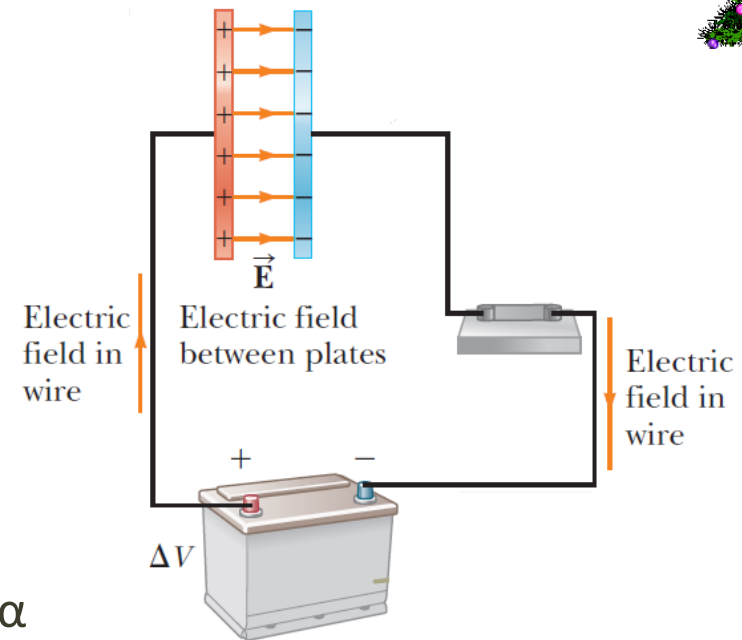
$$C \equiv \frac{|Q|}{|\Delta V|}$$

Μονάδα μέτρησης: $1 \text{ C/V} = 1 \text{ Farad (F)}$

Χωρητικότητα

● Χωρητικότητα

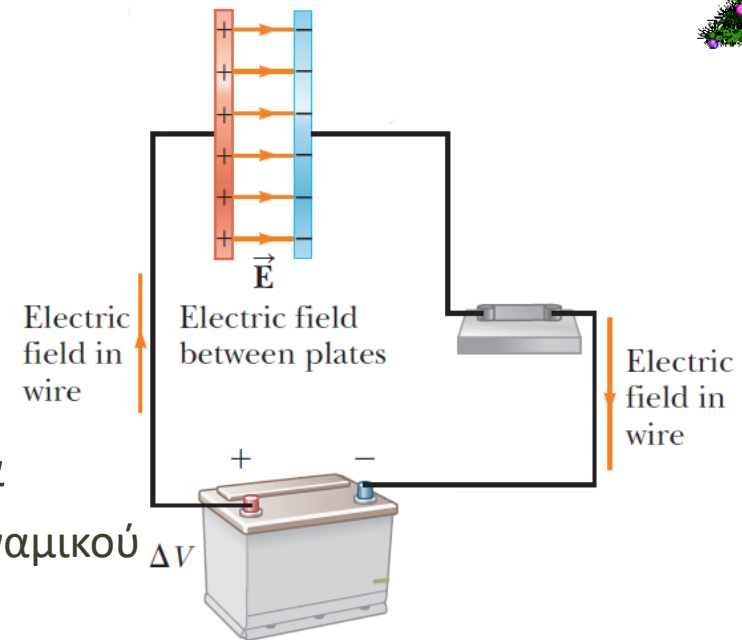
- Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες
- Ένας τρόπος να τον φορτίσουμε είναι να τον συνδέσουμε σε ένα κύκλωμα με μπαταρία
- Ηλεκτρικό κύκλωμα ονομάζεται ένα μονοπάτι στο οποίο μπορούν να ρέουν φορτία
- Μπαταρία ονομάζεται μια συσκευή που μπορεί να διατηρεί μια διαφορά δυναμικού ΔV ανάμεσα στους δυο πόλους της
 - Πόλοι είναι περιοχές της μπαταρίας που φορτία μπορούν να βγαίνουν (από τον έναν) και να μπαίνουν (από τον άλλο)
- Το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος αποτελείται από καλώδια, έναν πυκνωτή και μια μπαταρία...
 - ...και έναν διακόπτη που ανοιγοκλείνει



Χωρητικότητα

● Χωρητικότητα

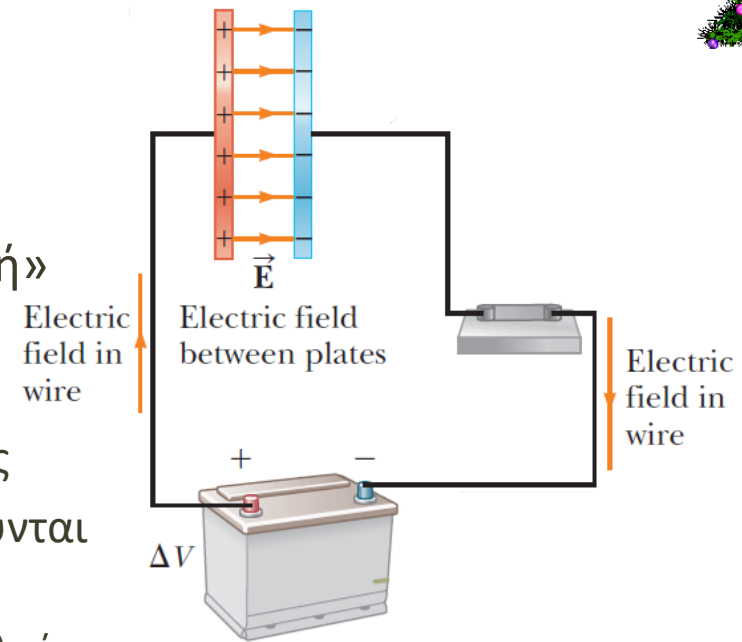
- Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφορτιστος, η μπαταρία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στα καλώδια
- Ας δούμε την «δεξιά» (μπλέ) πλάκα
 - Η μπαταρία εγκαθιστά διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ πόλου και πλάκας
 - Εγείρεται ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο $\rightarrow$ ηλεκτρ. δύναμη στα ηλεκτρόνια του $\rightarrow$ κινούνται προς την πλάκα
 - Θυμηθείτε ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται πάντα προς περιοχές υψηλού δυναμικού (αντίθετα της φοράς του ηλεκτρικού πεδίου)!
 - Η κίνηση συνεχίζεται ως ότου η πλάκα, το καλώδιο, και ο αρνητικός πόλος της μπαταρίας έχουν όλα το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό
 - Όταν αυτό γίνει, η διαφορά δυναμικού παύει να υπάρχει $\rightarrow$ δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται
 - Η (μπλέ) πλάκα φέρει πλέον αρνητικό φορτίο $-Q$



Χωρητικότητα

● Χωρητικότητα

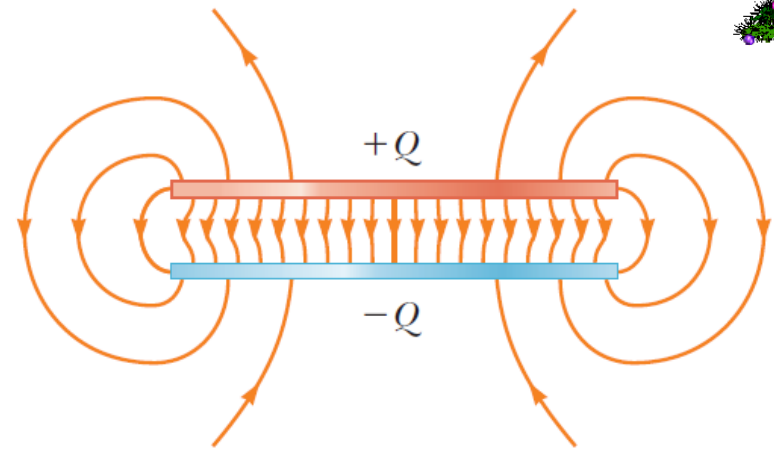
- Όμοια ισχύουν και για τη «αριστερή» (κόκκινη) πλάκα
 - Εγκαθίσταται διαφορά δυναμικού μεταξύ πλάκας και πόλου μπαταρίας
 - ...μόνο που εκεί τα ηλεκτρόνια κινούνται από την πλάκα στο καλώδιο
 - ... αφού κινούνται προς περιοχές υψηλού δυναμικού, αντίθετα δηλ. της φοράς του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου
 - ...αφήνοντάς τη φορτισμένη θετικά
- Στο τέλος, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων της μπαταρίας είναι ίδια με αυτήν ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή.
- Τότε η αριστερή πλάκα έχει το ίδιο δυναμικό με το θετικό πόλο, όπως και η δεξιά πλάκα με τον αρνητικό πόλο
- Έτσι, δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού πλέον, και ο πυκνωτής θεωρείται φορτισμένος!



Χωρητικότητα

- Χωρητικότητα

- Στην πραγματικότητα, το ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή είναι όπως στο σχήμα δεξιά



- Είναι όμως βολικό να θεωρούμε ότι αν οι πλάκες βρίσκονται σε απόσταση d πολύ μικρή
 - ...δηλ. οι πλάκες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους...
- ...τότε το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσά τους είναι σχεδόν ομογενές
- Αγνοούμε τα (ενδιαφέροντα) φαινόμενα που συμβαίνουν στα άκρα των πλακών



Χωρητικότητα

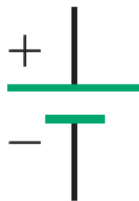
• Συνδυασμοί Πυκνωτών

• Συμβολισμοί

Σύμβολο
πυκνωτή



Σύμβολο
μπαταρίας



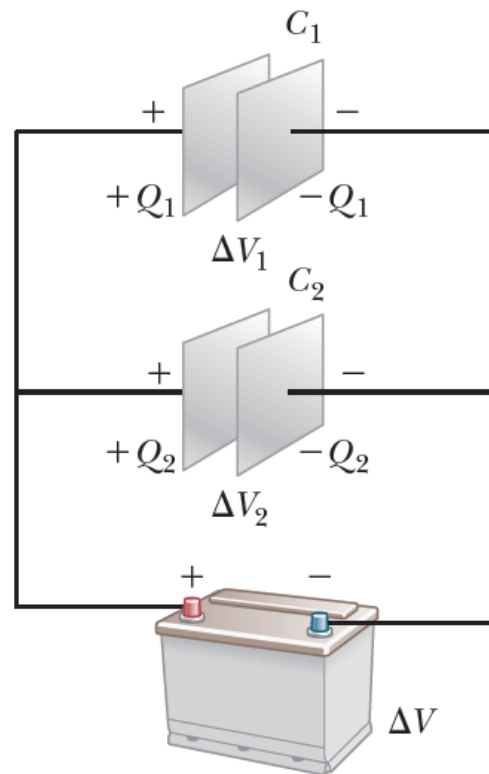
Σύμβολο
διακόπτη



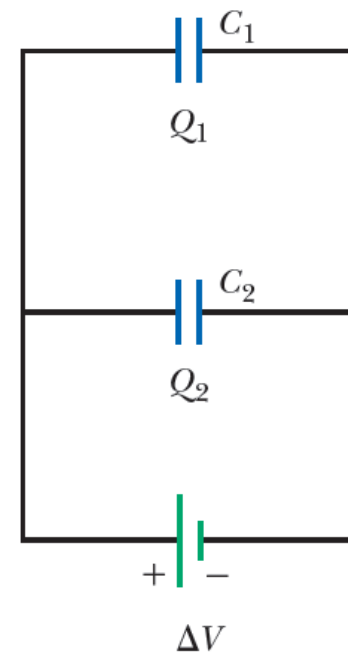
Ανοιχτό



Κλειστό



a

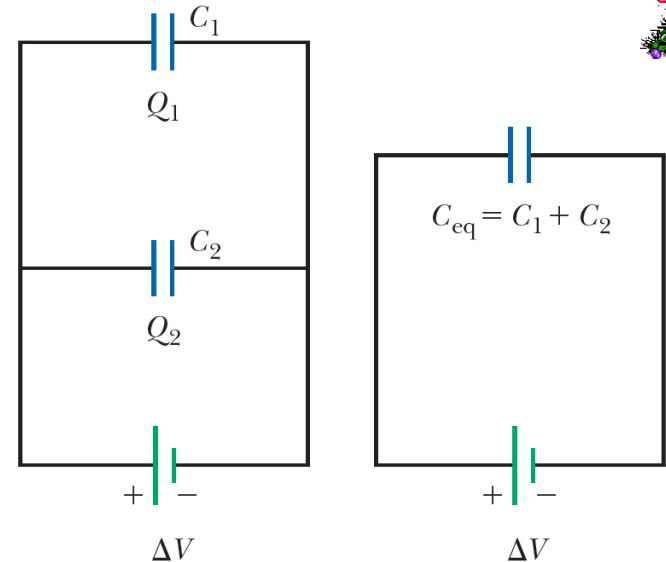


b



Χωρητικότητα

- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
- Στο σχήμα βλέπετε τη λεγόμενη **παράλληλη σύνδεση** δυο πυκνωτών με την μπαταρία
- Η λέξη «παράλληλα» δεν έχει να κάνει με τη σχεδίαση
- Έχει να κάνει με το ότι οι πυκνωτές είναι απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον ένα τους οπλισμό και απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον άλλο
- Η ίδια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα των δυο ομάδων των συνδεδεμένων οπλισμών
- Άρα όλοι οι πυκνωτές έχουν την **ίδια διαφορά δυναμικού** στα άκρα τους!



Χωρητικότητα



- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**

- Η διαφορά δυναμικού μεταξύ πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα είναι η ίδια και ίση με ΔV

- Οι πυκνωτές αποκτούν φορτίο

$$Q_1 = C_1 \Delta V, \quad Q_2 = C_2 \Delta V$$

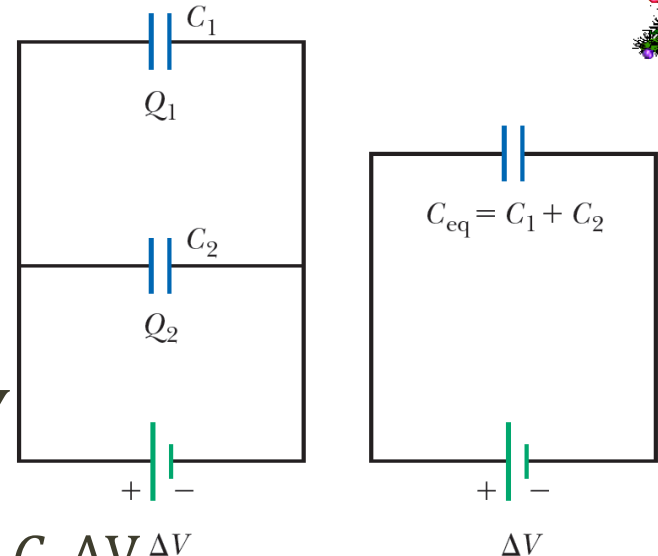
- Το συνολικό φορτίο είναι

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V$$

- Άρα οι δυο πυκνωτές μπορούν να αντικατασταθούν από έναν, με χωρητικότητα $C_{eq} = C_1 + C_2$

- Γενικότερα: **παράλληλη σύνδεση πυκνωτών**

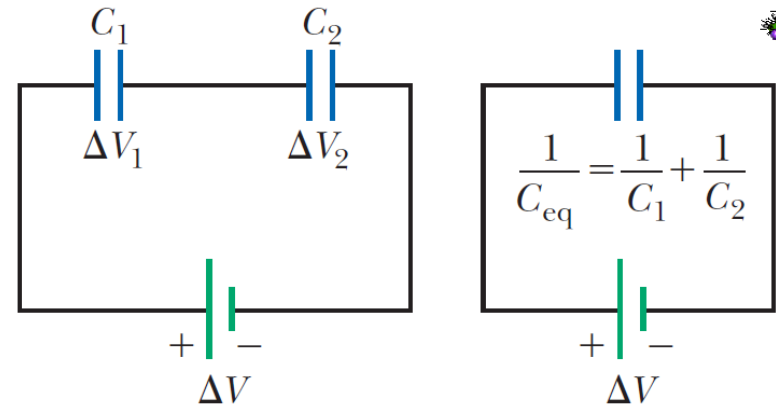
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$



Χωρητικότητα



- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
- Η διαφοράς δυναμικού μεταξύ πυκνωτών συνδεδεμένων **σε σειρά** είναι διαφορετικές
- Ξανά, το «σε σειρά» δε σημαίνει κάτι όσον αφορά τη σχεδίαση
- Σημαίνει ότι οι πυκνωτές συνδέονται σειριακά, ο ένας μετά τον άλλο, και όποια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται, αυτή εφαρμόζεται στα άκρα της όλης συνδεσμολογίας
- Συγκεκριμένα:
 - Η αριστερή πλάκα του C_1 και η δεξιά πλάκα του C_2 είναι συνδεδεμένες με την πηγή
 - Οι άλλες δυο πλάκες είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους μόνο
 - Το συνολικό τους φορτίο είναι μηδέν, και πρέπει να παραμείνει τόσο, εφόσον αποτελούν ηλεκτρικά απομονωμένο σύστημα!

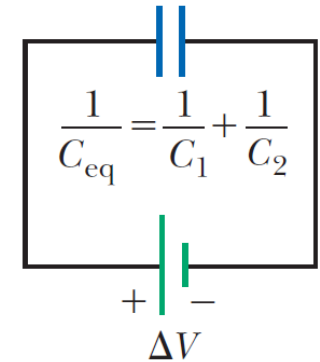
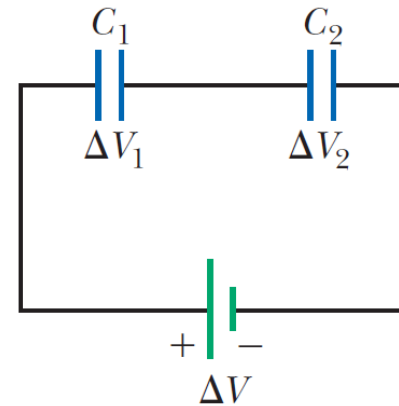


Χωρητικότητα



● Συνδυασμοί Πυκνωτών

- Ας θεωρήσουμε αρχικά αφόρτιστους πυκνωτές
- Όταν συνδέσουμε την μπαταρία, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από την αριστερή πλάκα του C_1 στη δεξιά πλάκα του C_2
- Ένα ισόποσο αρνητικό φορτίο εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2 , και άρα αυτή έχει πλεόνασμα φορτίου (θετικού)
- Το αρνητικό φορτίο που εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2 προκαλεί συσσώρευση αρνητικού φορτίου στην δεξιά πλάκα του C_1
- Έτσι, και οι δυο πυκνωτές έχουν δεξιές πλάκες με φορτίο $-Q$ και αριστερές πλάκες με φορτίο $+Q$



Χωρητικότητα



- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**

- Το φορτίο των δυο πυκνωτών σε σειρά είναι ίδιο, $Q_1 = Q_2 = Q$

- Προφανώς ισχύει $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

- Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή που έχει την ίδια επίδραση στο κύκλωμα με τους δυο πυκνωτές

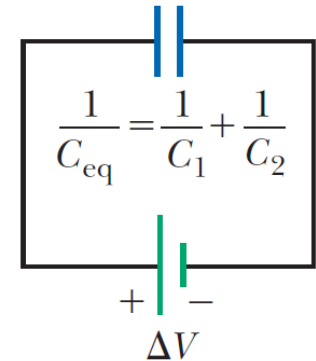
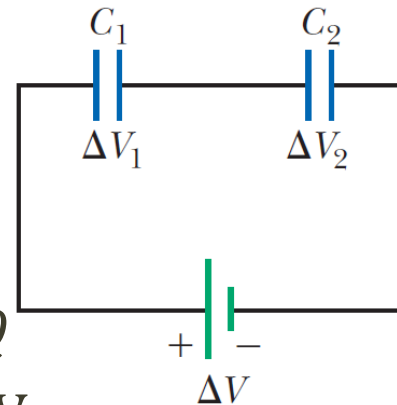
$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \Leftrightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$$

- Άρα γενικά: **σειριακή σύνδεση πυκνωτών**

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$



$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}}$$





Χωρητικότητα

- Συνοψίζοντας:

- Παράλληλη σύνδεση:

- Ισοδύναμος πυκνωτής με **φορτίο το άθροισμα των επιμέρους φορτίων** και **ίδια διαφορά δυναμικού με τους επιμέρους πυκνωτές**

- Χωρητικότητα ίση με το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

- Σειριακή σύνδεση:

- Ισοδύναμος πυκνωτής με **φορτίο ίδιο με τους επιμέρους πυκνωτές** και **διαφορά δυναμικού ίση με το άθροισμα των επιμέρους διαφορών δυναμικού**

- Χωρητικότητα ίση με το αντίστροφο άθροισμα των αντίστροφων επιμέρους χωρητικοτήτων

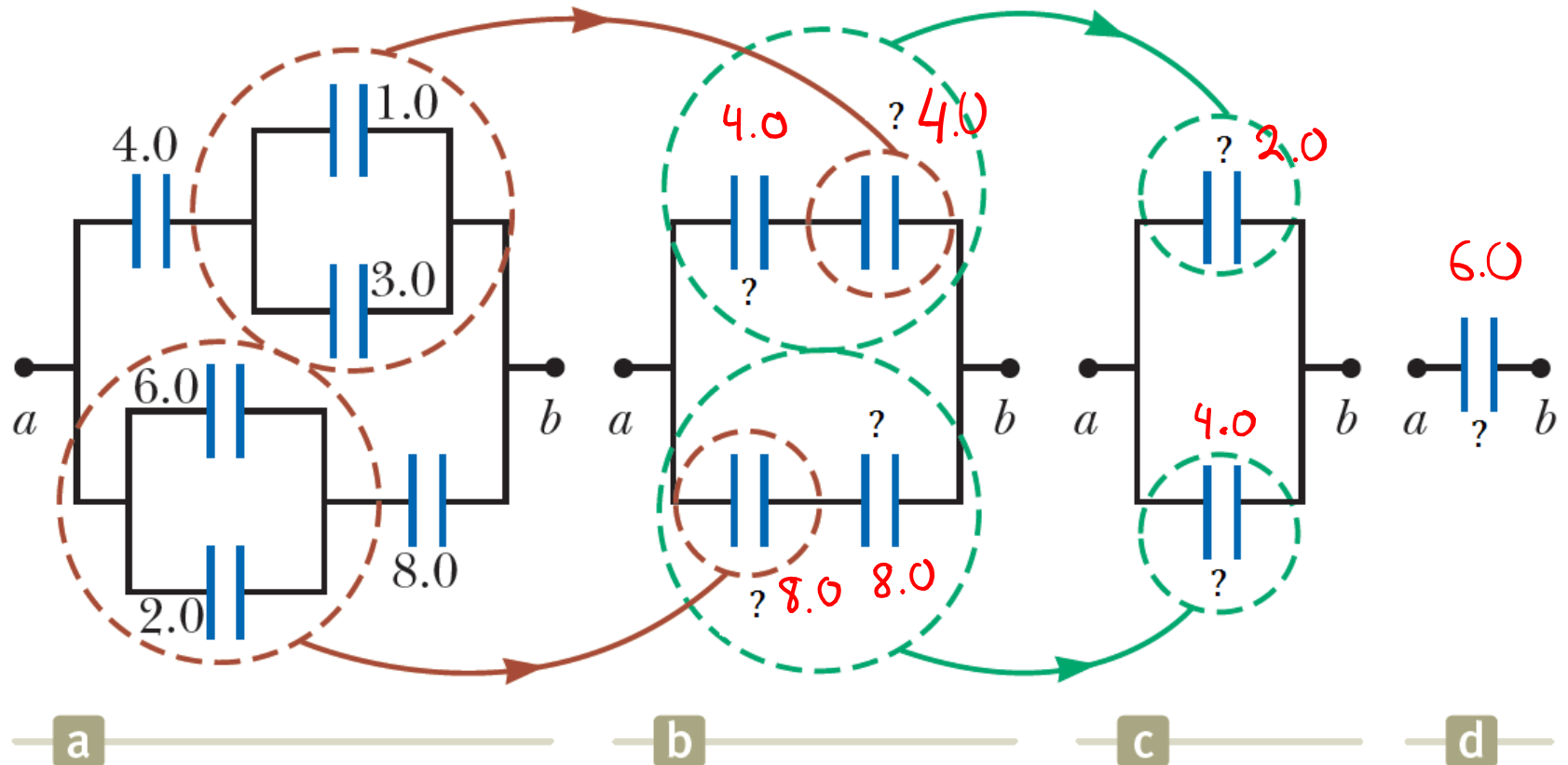
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Χωρητικότητα

- **Παράδειγμα:** Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα για τη διάταξη του σχήματος (a)

Σειριακά: ● $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$

Παράλληλα: ● $C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$



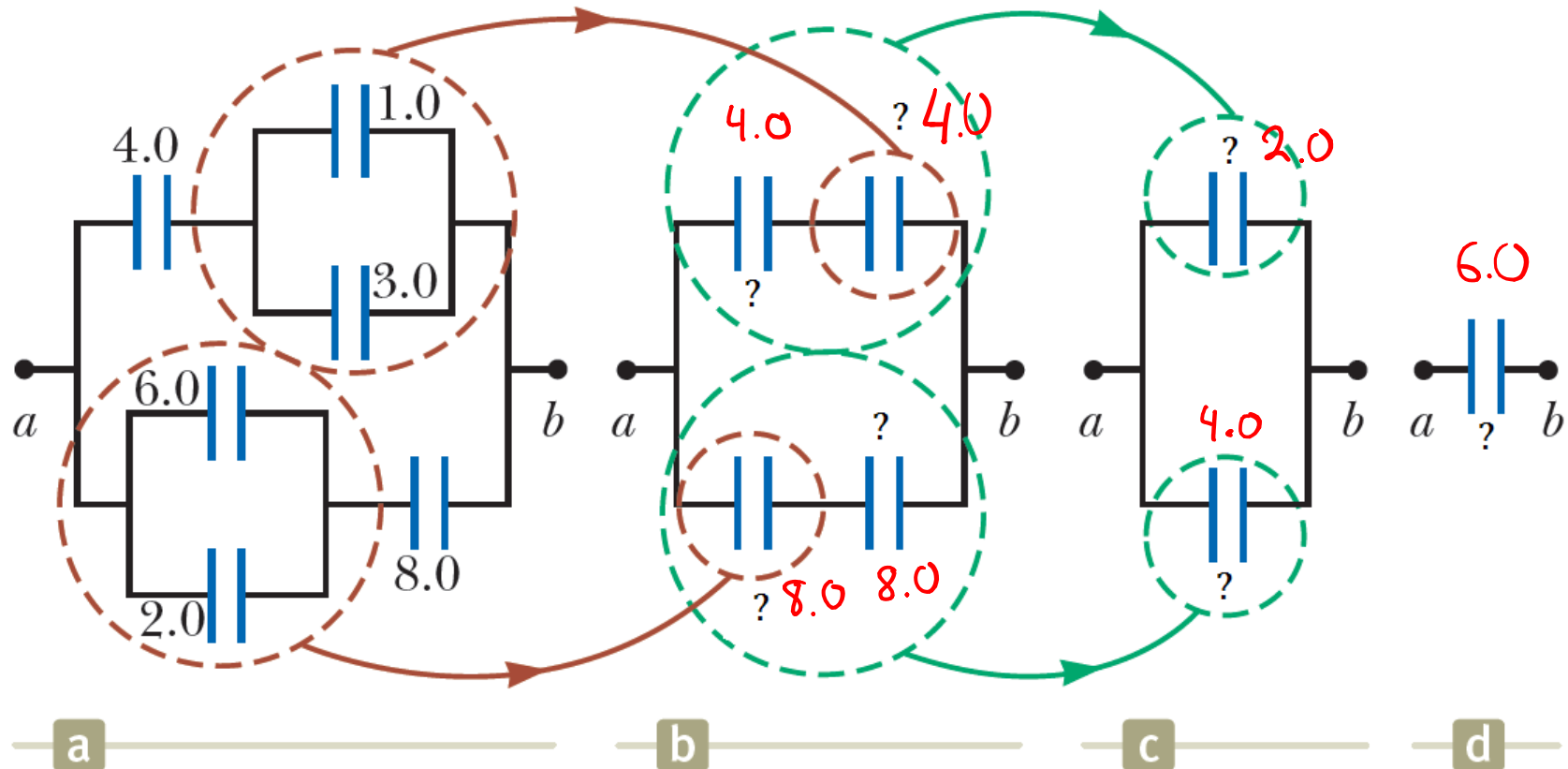
Χωρητικότητα



- **Παράδειγμα:** Αν $\Delta V_{ab} = 12\text{ V}$,
βρείτε το φορτίο του πυκνωτή
χωρητικότητας $C = 3\text{ }\mu\text{F}$

Σειριακά: $\Delta V_{eq} = \sum \Delta V_i$

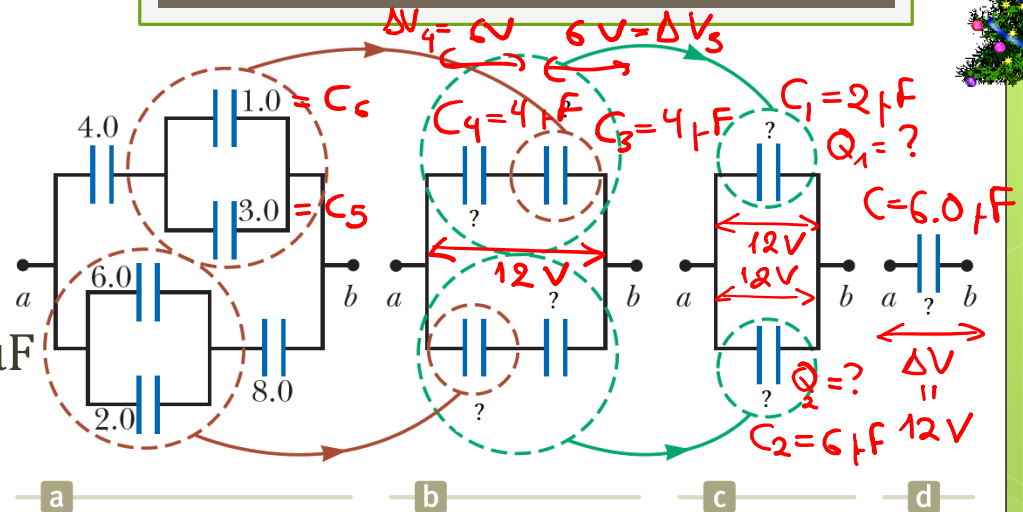
Παράλληλα: $\Delta V_{eq} = \Delta V_i$



Χωρητικότητα

Παράδειγμα:

Αν $\Delta V_{ab} = 12 \text{ V}$, βρείτε το Q του πυκνωτή $C = 3 \mu\text{F}$



Από το σχήμα (d) μπορώ να βρω

$$Q = C \Delta V = 6 \cdot 12 = 72 \mu\text{C} \leadsto \text{Αυτό το φορτίο πρέπει να είναι σταθερό σε όλο το κύκλωμα!}$$

Από το σχήμα (c), έχω δύο παράλληλες πυκνωτές, άρα θα έχουν ο καθένας $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = 12 \text{ V}$. Ο πυκνωτής C_1 θα έχει φορτίο

$$Q_1 = C_1 \Delta V = 2 \cdot 12 = 24 \mu\text{C} \quad (\text{και } Q_2 = C_2 \Delta V = 48 \mu\text{C}).$$

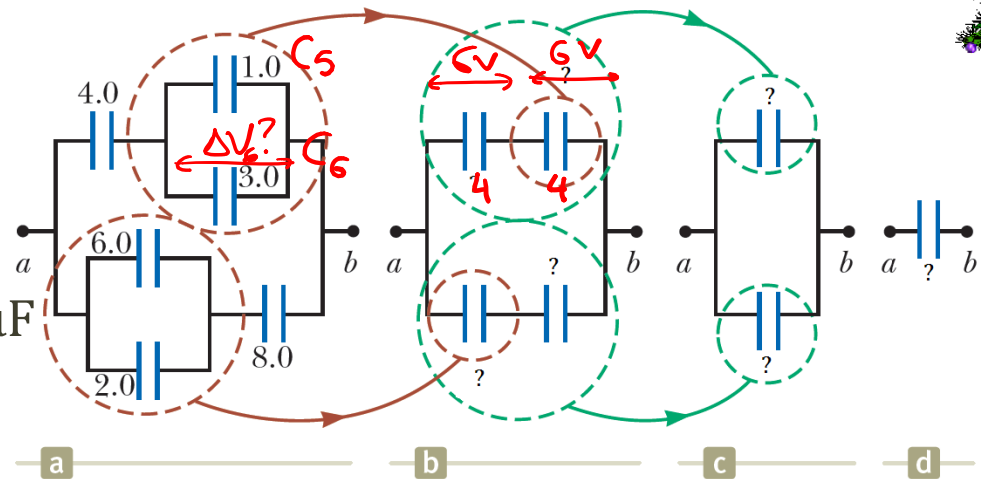
Το φορτίο αυτό υπάρχει και στον καθένα από τις δύο σειριακές πυκνωτές C_3, C_4 . Η διαφορά δυναμικότητας $\Delta V = 12 \text{ V}$ εφαρμόζεται στα άκρα της σειριακής συνδεσμολογίας:

$$\Delta V = \Delta V_3 + \Delta V_4 = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q}{C_3} + \frac{Q}{C_4} = \frac{Q}{4} + \frac{Q}{4} = 2 \Delta V_3 \Rightarrow \Delta V_3 = 6 \text{ V} \Rightarrow \Delta V_4 = 6 \text{ V}.$$


Χωρητικότητα

Παράδειγμα:

Αν $\Delta V_{ab} = 12 \text{ V}$, βρείτε
το Q του πυκνωτή $C = 3 \mu\text{F}$



Στο σχήμα (α):

Οι πυκνωτές, C_5, C_6 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι, άρα έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού ΔV με τον ισοδύναμό τους στο σχήμα (b), που είναι 6 V .

Άρα $\Delta V_6 = 6 \text{ V}$. στον πυκνωτή χωρητικότητας $3 \mu\text{F}$.

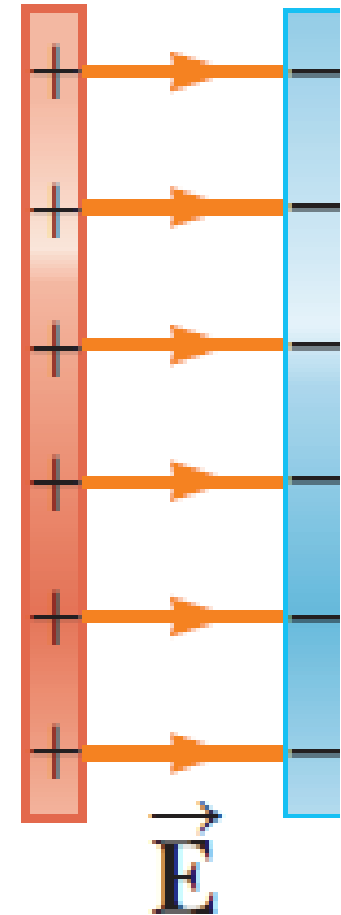
Άσκηση: Δοκιμάστε να βρείτε ΟΛΕΣ τις διαφορές δυναμικού της συνδεσμολογίας (α).



Χωρητικότητα



- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
- Ας θεωρήσουμε μια απλουστευμένη, «μηχανική» διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή
 - Ένα μικρό ποσό φορτίου μεταφέρεται από τη μια πλάκα μέσω ηλ. δύναμης προς την άλλη πλάκα
 - Παράγεται έργο στο φορτίο
 - Δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού (μικρή) ανάμεσα στις πλάκες
 - Όσο μεταφέρουμε φορτίο από τη μια πλάκα στην άλλη, τόσο μεγαλώνει η διαφορά δυναμικού
 - Περισσότερο έργο απαιτείται για τη μεταφορά μιας ποσότητας φορτίου
 - Το έργο που παράγεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εμφανίζεται ως μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος (διατήρηση της ενέργειας)





Χωρητικότητα

- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
- Ας υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής έχει φορτίο q σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας φόρτισης
 - Η διαφορά δυναμικού θα είναι $\Delta V = \frac{q}{C}$
- Το έργο dW που απαιτείται για τη μεταφορά ενός φορτίου dq από μια πλάκα φορτίου $-q$ σε αυτή φορτίου $+q$ είναι

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

- Άρα το συνολικό έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του πυκνωτή από μηδενικό φορτίο σε φορτίο Q είναι:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$



Χωρητικότητα

- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
- Το έργο που παράγεται κατά τη φόρτιση του πυκνωτή αποθηκεύεται ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_E και άρα

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

- Θεωρούμε την ενέργεια σε έναν πυκνωτή ως αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες του, όσο φορτίζεται
- Για έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες εμβαδού A που απέχουν απόσταση d , είναι

$$U_E = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2$$



Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

Φυσική για Μηχανικούς

Ρεύμα και Αντίσταση



Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

Φυσική για Μηχανικούς

Ρεύμα και Αντίσταση



Ρεύμα και Αντίσταση

◉ Εισαγωγή

- ◉ Σε αυτή τη διάλεξη θα ασχοληθούμε με την *κίνηση* ηλεκτρικών φορτίων σε μια περιοχή του χώρου
 - ◉ Ως τώρα θεωρούσαμε τα φορτία στάσιμα!
- ◉ Θα μάθουμε τον όρο **ηλεκτρικό ρεύμα** (ή απλώς *ρεύμα*) για την περιγραφή του ρυθμού της ροής του φορτίου
 - ◉ Ροές φορτίων υπάρχουν σε ατμοσφαιρικά φαινόμενα, στο ανθρώπινο σώμα, σε ηλεκτρικά συστήματα, στο ηλιακό μας σύστημα...
- ◉ Επίσης, θα μιλήσουμε για την **ηλεκτρική αντίσταση**
- ◉ Θα εισάγουμε ένα νέο στοιχείο, τον **αντιστάτη**



Ρεύμα και Αντίσταση

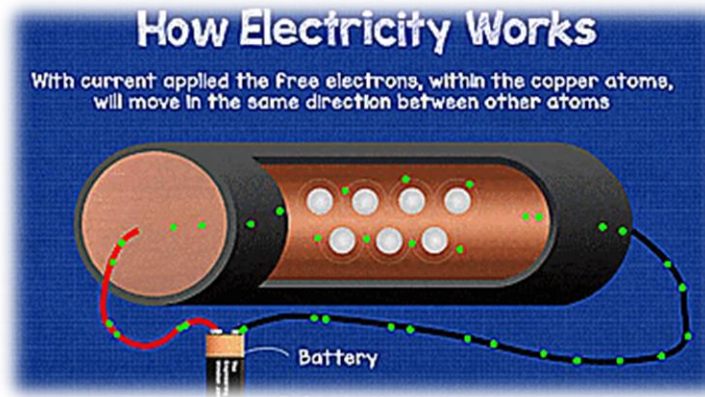
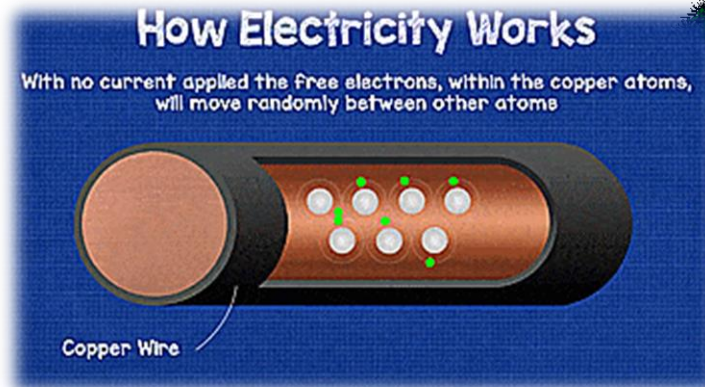
● Ηλεκτρικό Ρεύμα

- Στα πλαίσια του μαθήματος, μας ενδιαφέρει η ροή **σταθερών** ρευμάτων των **ηλεκτρονίων** αγωγιμότητας τα οποία κινούνται διαμέσου **μεταλλικών αγωγών** (καλώδια)
- Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη της ροής ηλεκτρικού φορτίου σε ένα τμήμα υλικού
- Η ποσότητα της ροής εξαρτάται από
 - το είδος του υλικού
 - τη διαφορά δυναμικού κατά μήκος του υλικού
- Όταν έχουμε **προσανατολισμένη** ροή ηλεκτρικού φορτίου μέσα από μια περιοχή, τότε λέμε ότι υπάρχει **ηλεκτρικό ρεύμα**

Ρεύμα και Αντίσταση

◉ Ηλεκτρικό Ρεύμα

- ◉ Τι σημαίνει «προσανατολισμένη ροή»?
- ◉ Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια σε έναν αγωγό κινούνται τυχαία με ταχύτητες της τάξης του 10^6 m/s...
 - ◉ ...αλλά δεν έχουν συνολικά κάποια τάση να κινηθούν προς μια κατεύθυνση...
 - ◉ ...κι έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στον αγωγό
- ◉ Μια διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού θα προκαλέσει μια «προδιάθεση» για κίνηση (προσανατολισμένη κίνηση) των ηλεκτρονίων προς μια κατεύθυνση, και αυτό θα αποτελέσει το ρεύμα

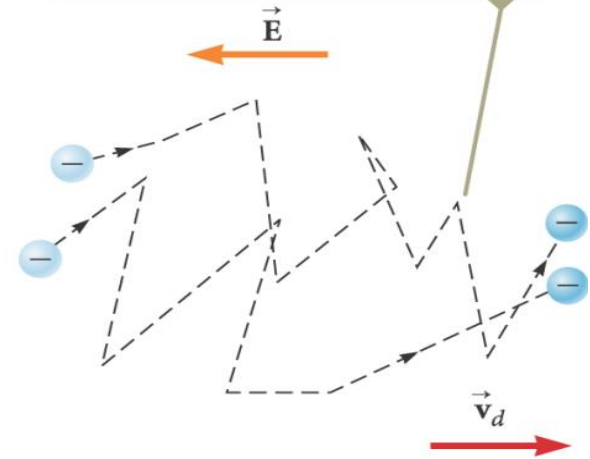


Ρεύμα και Αντίσταση

◉ Ηλεκτρικό Ρεύμα

- ◉ Αυτή η προσανατολισμένη κίνηση γίνεται με ταχύτητες πολύ μικρές
- ◉ Η ταχύτητα κίνησης των ηλεκτρονίων αντίθετα της φοράς του ηλ. πεδίου ονομάζεται **ταχύτητα ολίσθησης** $\vec{u}_d$
- ◉ Η ταχύτητα ολίσθησης είναι αρκετά μικρή, της τάξης του 10^{-4} m/s
- ◉ Πώς τότε πατάμε ένα κουμπί και φωτίζεται αμέσως μια λάμπα?
 - ◉ Μα τα καλώδια είναι γεμάτα ηλεκτρόνια!
 - ◉ Με την εγκατάσταση του πεδίου, υπάρχει σχεδόν άμεση κίνηση όλων των ηλεκτρονίων στο καλώδιο
 - ◉ Δε χρειάζεται να περιμένουμε να φτάσει ένα συγκεκριμένο ηλεκτρόνιο από το διακόπτη στη λάμπα!

Το πεδίο αλλάζει την τυχαία κίνηση των φορέων φορτίου, οπότε η ταχύτητα ολίσθησής τους είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου.



Ρεύμα και Αντίσταση

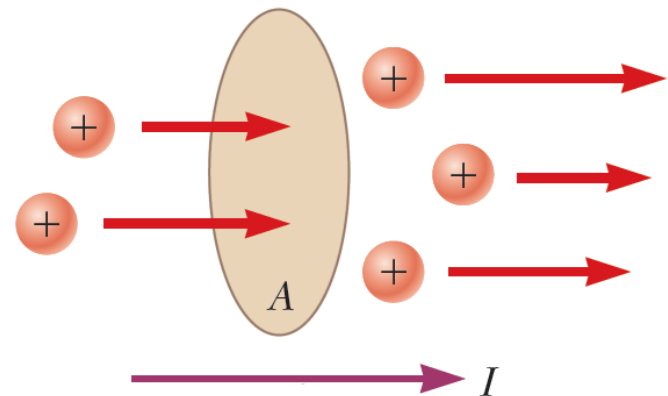


- Ηλεκτρικό Ρεύμα

- Ας ορίσουμε το ρεύμα ποσοτικά:

- Έστω μια ποσότητα φορτίου που κινείται κάθετα σε μια επιφάνεια εμβαδού A
- Το **ρεύμα** ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο το φορτίο ρέει μέσα από την επιφάνεια
- Αν η ποσότητα του φορτίου που περνάει από την επιφάνεια σε χρόνο Δt είναι ΔQ , τότε το **μέσο ρεύμα** ισούται με

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

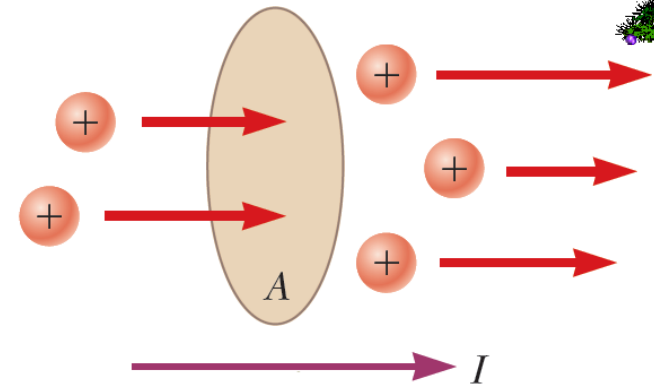


Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό Ρεύμα**
- Το **στιγμιαίο ρεύμα** ορίζεται ως το όριο του μέσου ηλεκτρικού ρεύματος όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

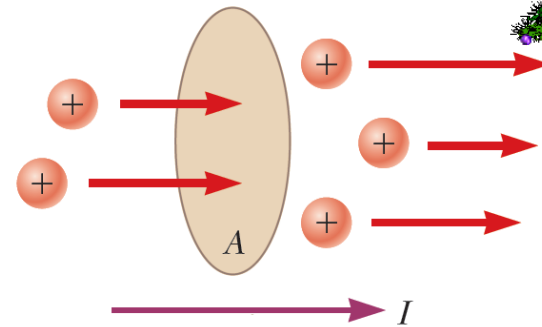
- Μονάδα μέτρησης του ρεύματος: $1 \text{ Ampere (A)} = 1 \text{ C/s}$
- Τα φορτισμένα σωματίδια που διαπερνούν μια επιφάνεια μπορεί να είναι θετικά, αρνητικά, ή και τα δυο (στα μέταλλα είναι αρνητικά – ηλεκτρόνια)
- Έχει συμφωνηθεί (για ιστορικούς λόγους) να θεωρούμε ως κατεύθυνση του ρεύματος την κατεύθυνση των **θετικών** φορτίων
 - Δηλ. αντίθετη στην κίνηση των ηλεκτρονίων στους μεταλλικούς αγωγούς



Ρεύμα και Αντίσταση

● Ηλεκτρικό Ρεύμα

- Αν τα άκρα ενός αγώγιμου καλωδίου ενωθούν σε ένα βρόχο, όλα τα σημεία του βρόχου έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό
 - Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι μηδέν
 - Άρα δεν υπάρχει ρεύμα
- Αν όμως τα άκρα του συνδεθούν σε μια μπαταρία (πηγή **διαφοράς δυναμικού**), δεν έχουν όλα τα σημεία του βρόχου το ίδιο δυναμικό!
 - Η μπαταρία εγκαθιστά διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του βρόχου
 - Δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο καλώδιο
 - Το πεδίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του καλωδίου, προκαλώντας την προσανατολισμένη κίνησή τους
 - Δημιουργώντας έτσι το **ηλεκτρικό ρεύμα**!



Ρεύμα και Αντίσταση

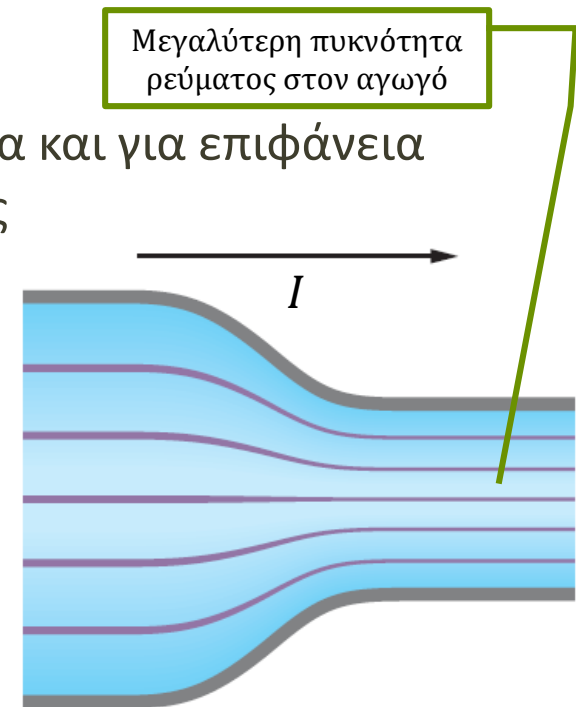


● Ηλεκτρικό ρεύμα

- Ας ορίσουμε ως **πυκνότητα ρεύματος** J σε ένα καλώδιο ως το ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας

$$J = \frac{I}{A}$$

- Ισχύει μόνο για ομοιόμορφη πυκνότητα και για επιφάνεια A κάθετη στη διεύθυνση του ρεύματος
- Όπως περιγράψαμε ηλεκτρικά πεδία με ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, έτσι μπορούμε να περιγράψουμε την πυκνότητα ρεύματος με αντίστοιχες **ρευματικές γραμμές**



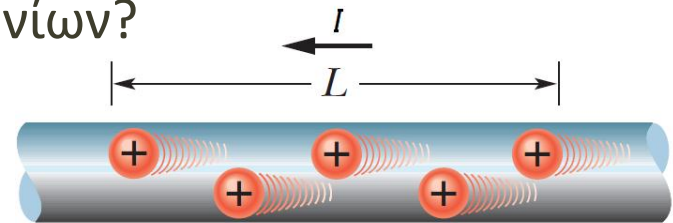


Ρεύμα και Αντίσταση

● Ηλεκτρικό ρεύμα

- Μπορούμε να σχετίσουμε το μέτρο της πυκνότητας ρεύματος με την ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων?

- Τα (υποτιθ.) θετικά φορτία του αγωγού κινούνται προς τη φορά του ηλεκτρ. πεδίου

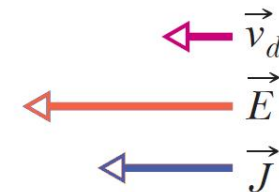


- Αν η πυκνότητα ρεύματος είναι ομοιόμορφη σε όλο τον αγωγό, και η ταχύτητα ολίσθησης είναι ίδια για όλα τα φορτία, τότε το πλήθος των φορτίων σε έναν αγωγό μήκους L είναι

$$N = nAL$$

- ...όπου n το πλήθος των φορέων φορτίου ανά μονάδα όγκου
- Το συνολικό φορτίο θα είναι (αν e είναι το φορτίο κάθε φορέα)

$$q = Ne = (nAL)e$$





Ρεύμα και Αντίσταση

- Ηλεκτρικό ρεύμα

- Το συνολικό φορτίο θα είναι (αν e είναι το φορτίο κάθε φορέα)

$$q = Ne = (nAL)e$$

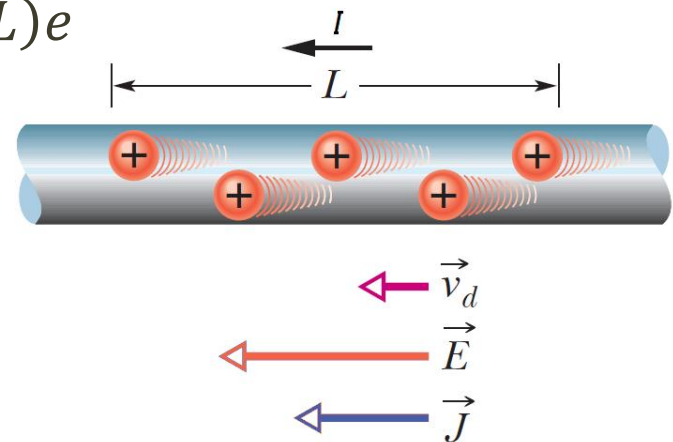
- Αφού η ταχύτητα ολίσθησης είναι κοινή για όλα τα φορτία, τότε σε χρόνο

$$t = \frac{L}{u_d}$$

θα έχει περάσει το παραπάνω $q = (nAL)e$ φορτίο από τον αγωγό

- Άρα, εφόσον

$$I = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{\frac{L}{u_d}} = nAeu_d \Rightarrow u_d = \frac{I}{nAe} = \frac{J}{ne}$$





Ρεύμα και Αντίσταση

- Ηλεκτρικό ρεύμα

- Ας ορίσουμε ως **ειδική αγωγιμότητα** σ ενός υλικού μια σταθερά που περιγράφει την πυκνότητα ρεύματος J δεδομένης μιας τιμής ηλεκτρικού πεδίου E
- Σε μερικά υλικά (αρκετά, συμπεριλαμβανομένων και πολλών μετάλλων), η πυκνότητα ρεύματος είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου

$$J = \sigma E$$



Ρεύμα και Αντίσταση

- Ηλεκτρικό ρεύμα

- Υλικά που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση λέμε ότι ακολουθούν το **νόμο του Ohm**:
- Ο λόγος της πυκνότητας ρεύματος J προς το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E είναι σταθερός και ίσος με σ , και ανεξάρτητος από το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το ρεύμα

$$\sigma = \frac{J}{E}$$

- Ο νόμος του Ohm δεν είναι «νόμος» της Φύσης, αλλά μια εμπειρική σχέση που ισχύει μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις



Ρεύμα και Αντίσταση

○ Ηλεκτρικό ρεύμα

- Ο νόμος του Ohm είναι μια σχέση με πολύ μεγάλη σημασία. Γιατί;
- Μας λέει **τρία** πράγματα:
 - ✓ Το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο που ασκεί ηλεκτρ. δυνάμεις στους φορείς φορτίου
 - ✓ Η πυκνότητα ρεύματος, και ως εκ τούτου το ρεύμα, εξαρτάται με γραμμικό τρόπο από το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου: $J = \sigma E$
 - ✓ Η πυκνότητα ρεύματος εξαρτάται και από την ειδική αγωγιμότητα του υλικού



Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό ρεύμα και αντίσταση**
- Αν εφαρμόσουμε μια διαφορά δυναμικού στα άκρα δυο ίδιων ράβδων χαλκού και γυαλιού, παρατηρούμε τελείως διαφορετικά ρεύματα
- Κάθε ράβδος έχει διαφορετική **αντίσταση** και η ράβδος χαλκού ή γυαλιού ονομάζεται **αντιστάτης**
- Μας ενδιαφέρουν υλικά και όχι συγκεκριμένα σχήματα και διαστάσεις κάποιου αντιστάτη
- **Ειδική αντίσταση** ρ ενός υλικού:

$$\rho = \frac{E}{\sigma}$$

με σ την ειδική αγωγιμότητα που είδαμε πριν, δηλ.

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Ιδιότητα
του υλικού!



Ρεύμα και Αντίσταση

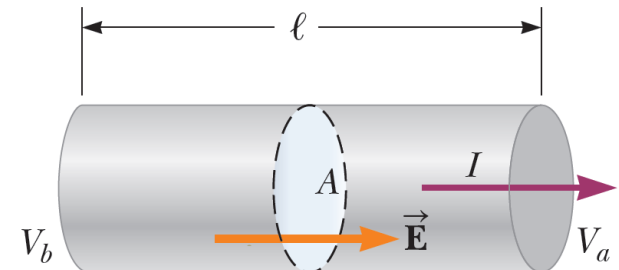
● Αντίσταση

- Ας θεωρήσουμε έναν συγκεκριμένο αγωγό με ομοιόμορφη επιφάνεια διατομής εμβαδού A και με μήκος l
- Μια διαφορά δυναμικού ΔV δημιουργείται κατά μήκος του αν τον συνδέσουμε με μια μπαταρία (π.χ.)
 - Δημιουργώντας έτσι εντός του αγωγού ένα ηλεκτρικό πεδίο και ένα ρεύμα
- Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο της διαφοράς δυναμικού κατά μήκος του αγωγού είναι

$$|\Delta V| = |V_b - V_a| = El$$

- Έτσι, η πυκνότητα ρεύματος είναι

$$J = \sigma \frac{|\Delta V|}{l}$$





Ρεύμα και Αντίσταση

- **Αντίσταση**

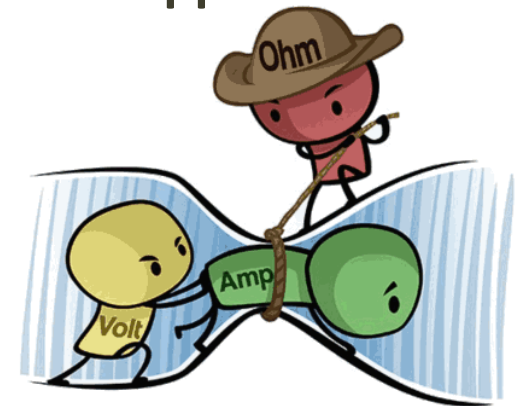
- Επειδή όμως $J = \frac{I}{A}$, η διαφορά δυναμικού είναι

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} J = \frac{l}{\sigma A} I = RI$$

- Η ποσότητα $R = \frac{l}{\sigma A}$ ονομάζεται **αντίσταση** του αγωγού
- Ορίζουμε λοιπόν την **αντίσταση** ενός αγωγού ως το **λόγο της διαφοράς δυναμικού προς το ρεύμα που τον διαρρέει**

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I}$$

- Μονάδα μέτρησης: $V/A = 1 \text{ Ohm } (\Omega)$





Ρεύμα και Αντίσταση

● Μπαταρία

- Η βασική πηγή διαφοράς δυναμικού θα είναι η μπαταρία
- Πόλοι μπαταρίας:
 - Θετικός (+): υψηλού δυναμικού
 - Αρνητικός (-): χαμηλότερου δυναμικού
- Όταν συνδέεται σε κύκλωμα, οι ηλεκτροχημικές διεργασίες που συμβαίνουν μέσα της επιτρέπουν να παράγει έργο επάνω σε θετικά φορτία...
 - ...δημιουργώντας ροή θετικών φορτίων από τον αρνητικό πόλο στο θετικό πόλο
 - Στην πραγματικότητα, ηλεκτρόνια «φεύγουν» από τον αρνητικό πόλο προς το θετικό πόλο
- Αυτή η ροή είναι τμήμα του ρεύματος που εγκαθίσταται στο κύκλωμα

Ρεύμα και Αντίσταση



● Μπαταρία

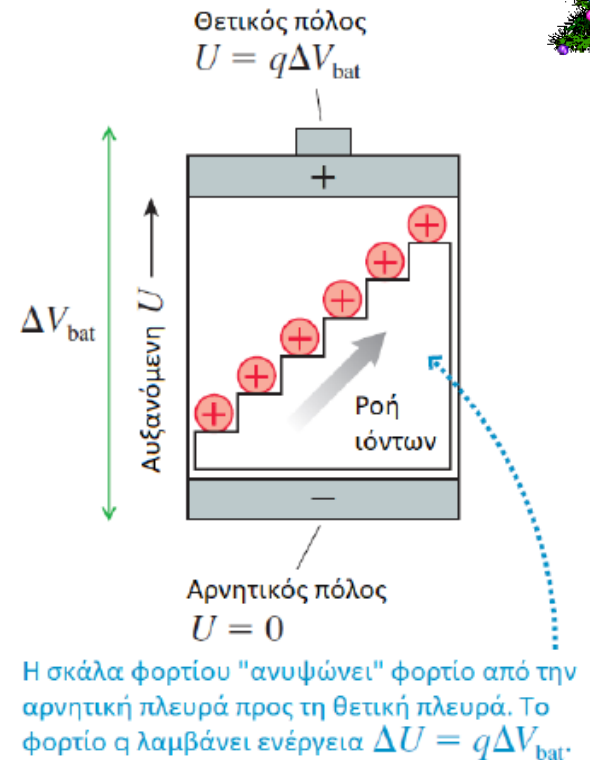
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα **ιδεατό** μοντέλο μιας μπαταρίας ως μια κυλιόμενη σκάλα φορτίου

- Η σκάλα ανυψώνει θετικά φορτία από τον αρνητικό στο θετικό πόλο

- ...και μόλις αυτά φτάσουν εκεί, κινούνται στο υπόλοιπο κύκλωμα ως ρεύμα

- Μπορούμε να πούμε ότι:

- Η μπαταρία παρέχει διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των ακρών ενός καλωδίου
- Η διαφορά δυναμικού προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο $E = \frac{\Delta V}{L}$ στο καλώδιο
- Το πεδίο εγκαθιστά ρεύμα $I = JA = \sigma AE$ στο καλώδιο
- Το μέτρο του ρεύματος καθορίζεται από τα στοιχεία του κυκλώματος

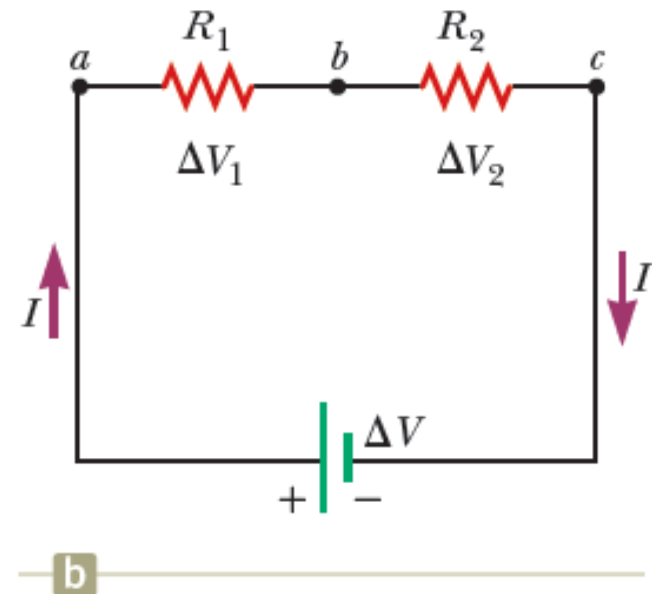
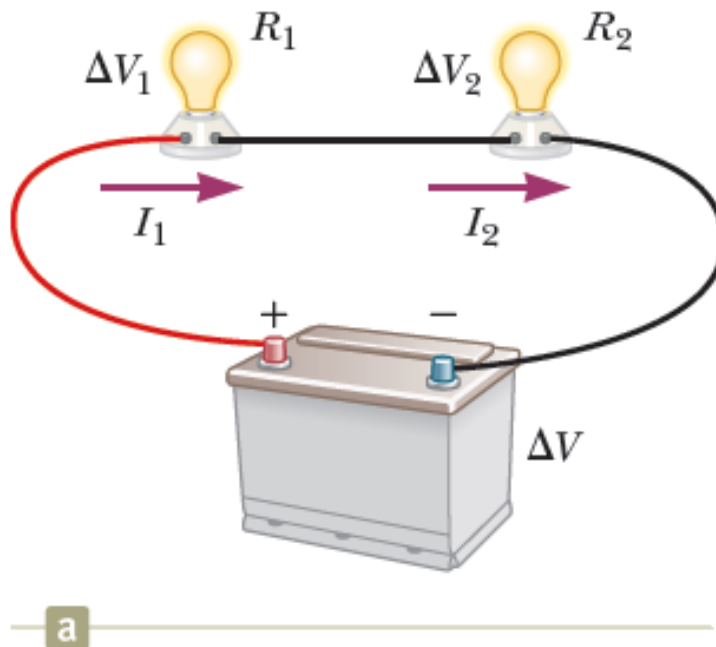


Ηλεκτρικά Κυκλώματα



● Αντιστάτες σε σειρά & παράλληλα

- Ας δούμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο «σχέδιο» στους αντιστάτες, όπως κάναμε με τους πυκνωτές
- Ας ξεκινήσουμε με μια διάταξη σε σειρά



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Αντιστάτες σε σειρά**

- Η διαφορά δυναμικού δίνεται ως

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 \\ &= I_1 R_1 + I_2 R_2\end{aligned}$$

- Η ποσότητα φορτίου Q που εξέρχεται του αντιστάτη R_1 θα πρέπει να είναι ίδια με αυτή που εισέρχεται στον R_2 , αφού το φορτίο στο κύκλωμα δεν αλλάζει!

- Άρα $I = I_1 = I_2$, αν I είναι το ρεύμα που άγει η μπαταρία

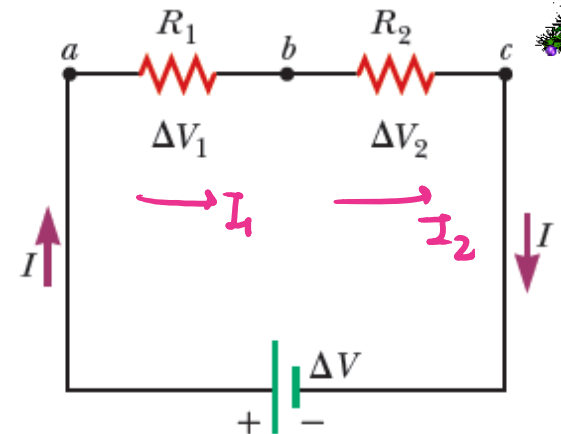
- Έτσι, $I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2)$

- Οπότε ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

- Γενικότερα

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα



● Αντιστάτες σε παραλληλία

- Προφανώς, η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι η ίδια
- Άρα $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, αν ΔV είναι η διαφορά δυναμικού που εγκαθιστά η μπαταρία
- Το ρεύμα I «χωρίζεται» σε δυο, αφού οι αντιστάσεις είναι διαφορετικές
- Επειδή όμως το συνολικό φορτίο διατηρείται

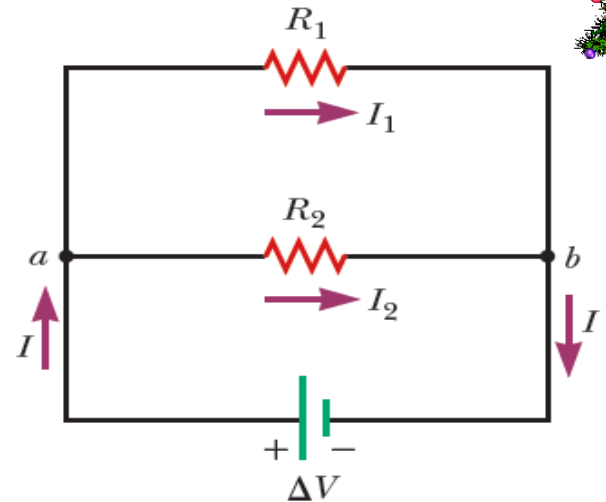
$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- Γενικότερα

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$





Χωρητικότητα

- Συνοψίζοντας:

- Παράλληλη σύνδεση:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

- Ισοδύναμος αντιστάτης με **ρεύμα ίσο με το άθροισμα των επιμέρους ρευμάτων** και **ίδια διαφορά δυναμικού με τους επιμέρους αντιστάτες**
- Αντίσταση ίση με το αντίστροφο άθροισμα των επιμέρους αντίστροφων αντιστάσεων

- Σειριακή σύνδεση:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Ισοδύναμος αντιστάτης με **ρεύμα ίσο με τα επιμέρους ρεύματα** και **διαφορά δυναμικού ίση με το άθροισμα των διαφορών δυναμικού των επιμέρους αντιστατών**
- Αντίσταση ίση με το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Πυκνωτές

- Σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

- Σε παραλληλία:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

Αντιστάτες

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- Α) Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για
τις αντιστάσεις καταλήγαμε ότι

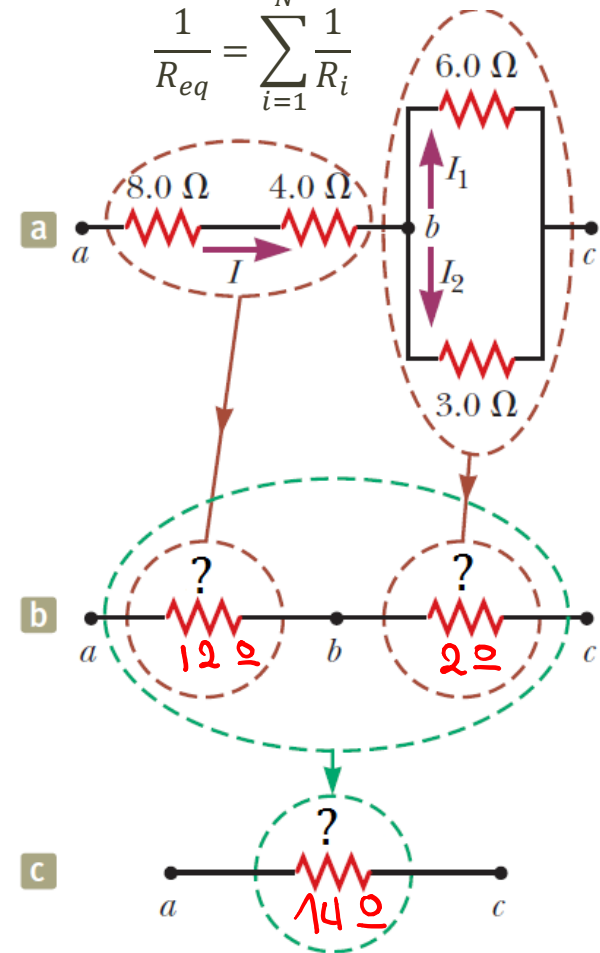
$$R_{eq} = 14 \Omega$$

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- B) Αν η διάταξη συνδεθεί σε μια διαφορά δυναμικού 7 V , πόση θα είναι η διαφορά δυναμικού στον πρώτο αντιστάτη, των $8\ \Omega$?

$$\text{Στο σχήμα (c), } I_{ac} = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}\text{ A.}$$

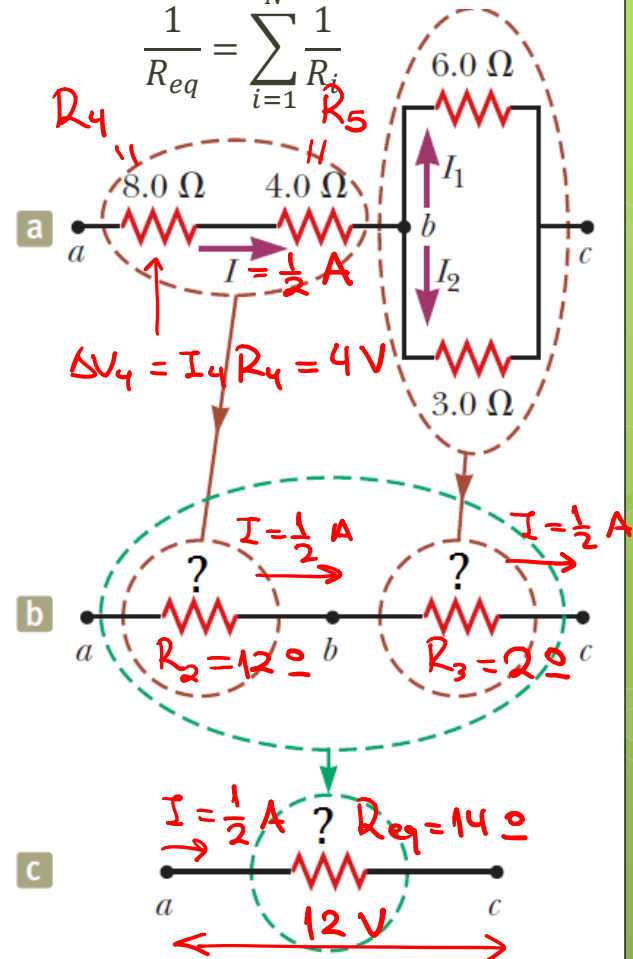
Το ίδιο ρεύμα διαρρέει τους αντιστάτες R_2, R_3 στο σχήμα (b), αφού αυτοί είναι σε σειρά. Άρα $I_2 = 0.5\text{ A}$. Οι αντιστάτες R_4, R_5 (που αντικαθιστά ο R_2) έχουν κι αυτοί το ίδιο ρεύμα ως σε σειρά συνδέονται. Άρα $I_4 = 0.5\text{ A}$ και επίσης $\Delta V_4 = I_4 R_4 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4\text{ Volt}$

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$



Δε λύθηκε στο μάθημα

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- Β) Αν η διάταξη συνδεθεί σε μια διαφορά δυναμικού 7 V , πόση θα είναι η διαφορά δυναμικού και το ρεύμα στον αντιστάτη των $6\ \Omega$?

Ξανά, $I_{ac} = \frac{1}{2}\text{ A}$ στο σχήμα (c). Το ίδιο ρεύμα διαρρέει τον αντιστάτη R_3 στο σχήμα (b).

Άρα $\Delta V_{bc} = I_3 R_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\text{ V}$. Αυτή η διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται και στα άκρα της διαδρομής bc στο σχήμα (a). Άρα $\Delta V_4 = I_4 R_4 = 1\text{ V}$ και άρα $I_4 = \frac{\Delta V_4}{R_4} = \frac{1}{6}\text{ A}$.

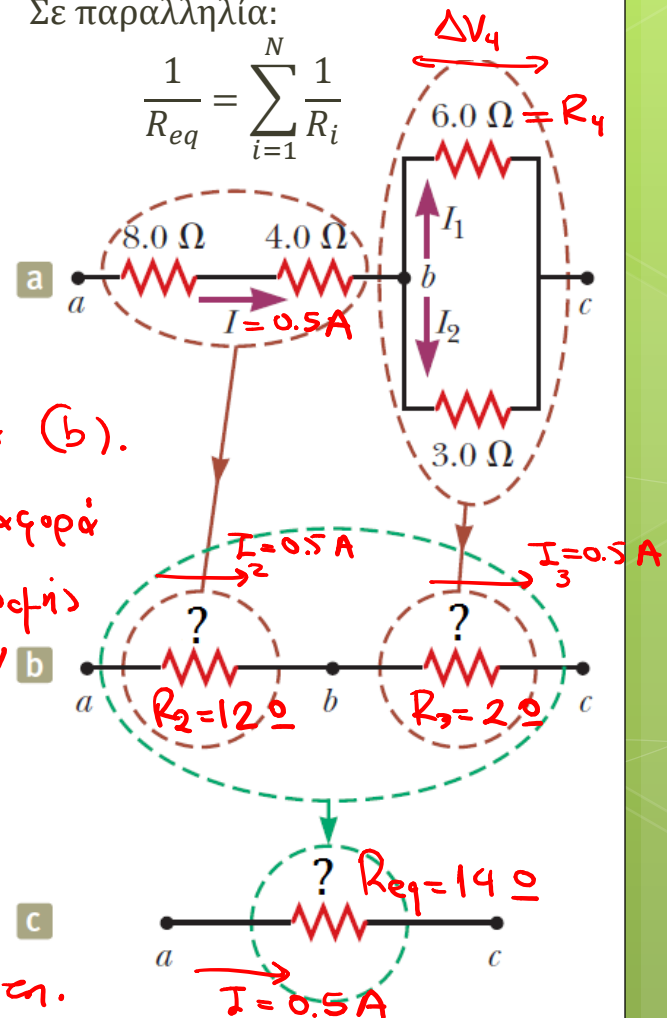
Εξάσκηση: Βρείτε όλα τα ρεύματα και τις διαφορές δυναμικού για κάθε αντιστάτη.

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

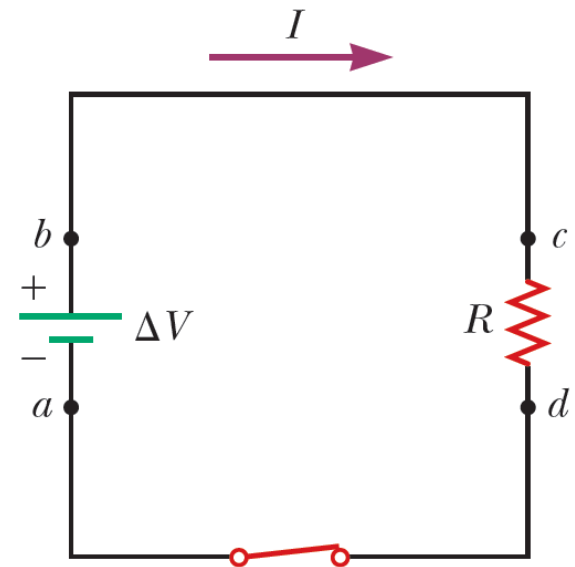




Ρεύμα και Αντίσταση

● Ηλεκτρική Ισχύς

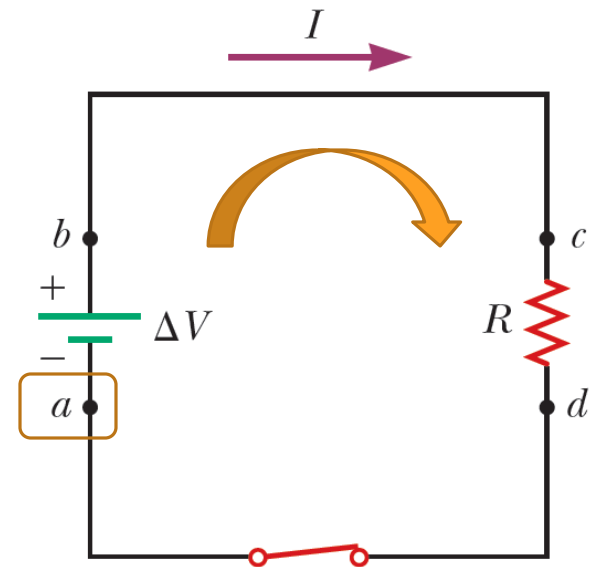
- Σε τυπικά ηλεκτρικά κυκλώματα, η ενέργεια μεταφέρεται από μια πηγή όπως η μπαταρία, σε μια λάμπα ή μια συσκευή
- Ας βρούμε μια έκφραση που θα μας δίνει το ρυθμό μεταφοράς αυτής της ενέργειας!
- Ας θεωρήσουμε το παρακάτω κύκλωμα όπου ενέργεια μεταφέρεται σε έναν αντιστάτη
 - Στην πραγματικότητα, κάποια ενέργεια μεταφέρεται και στα καλώδια, την οποία θεωρούμε αμελητέα
- Ο **θετικός** πόλος της μπαταρίας είναι **υψηλότερου δυναμικού** από τον **αρνητικό**





Ρεύμα και Αντίσταση

- Ηλεκτρική Ισχύς
- Ας θεωρήσουμε ότι ακολουθούμε ένα φορτίο Q που κινείται στο κύκλωμα κατά τη φορά του ρολογιού, ξεκινώντας και καταλήγοντας στο σημείο a
 - Από το a στο b , η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται κατά $Q\Delta V$
 - ...ενώ η χημική δυναμική ενέργεια της μπαταρίας μειώνεται εξίσου
 - Όσο το φορτίο κινείται από το c στο d , η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται λόγω της σύγκρουσης ηλεκτρονίων με τα άτομα του αντιστάτη
 - Μετατροπή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας σε θερμική ενέργεια

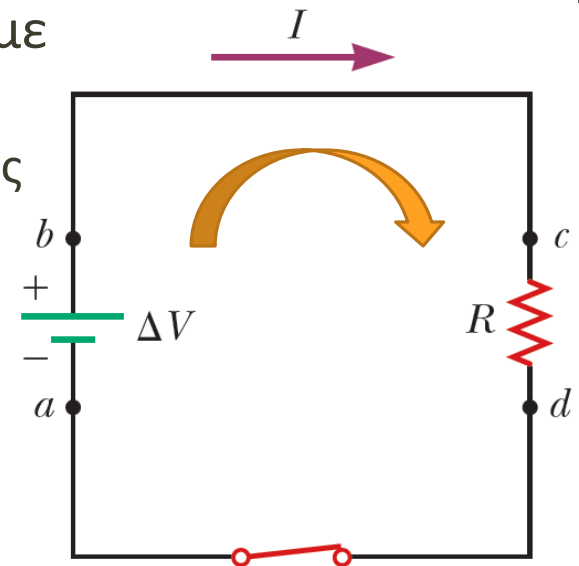


Ρεύμα και Αντίσταση



● Ηλεκτρική Ισχύς

- Όταν το φορτίο επιστρέφει στο a , το συνολικό αποτέλεσμα είναι ότι ένα τμήμα της χημικής δυναμικής ενέργειας της μπαταρίας μεταφέρθηκε στον αντιστάτη και έμεινε εκεί ως θερμική ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση των ατόμων του αντιστάτη
- Συνήθως ο αντιστάτης είναι σε επαφή με τον αέρα
 - Μεταφέρεται ενέργεια μέσω θερμότητας
 - Εκπέμπεται επίσης ακτινοβολία
- Μετά από λίγο, ο αντιστάτης επανέρχεται σε φυσιολογική θερμοκρασία





Ρεύμα και Αντίσταση

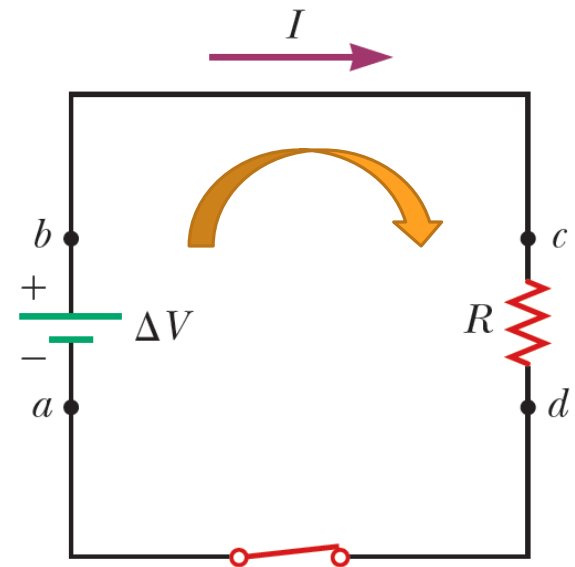
Ηλεκτρική Ισχύς

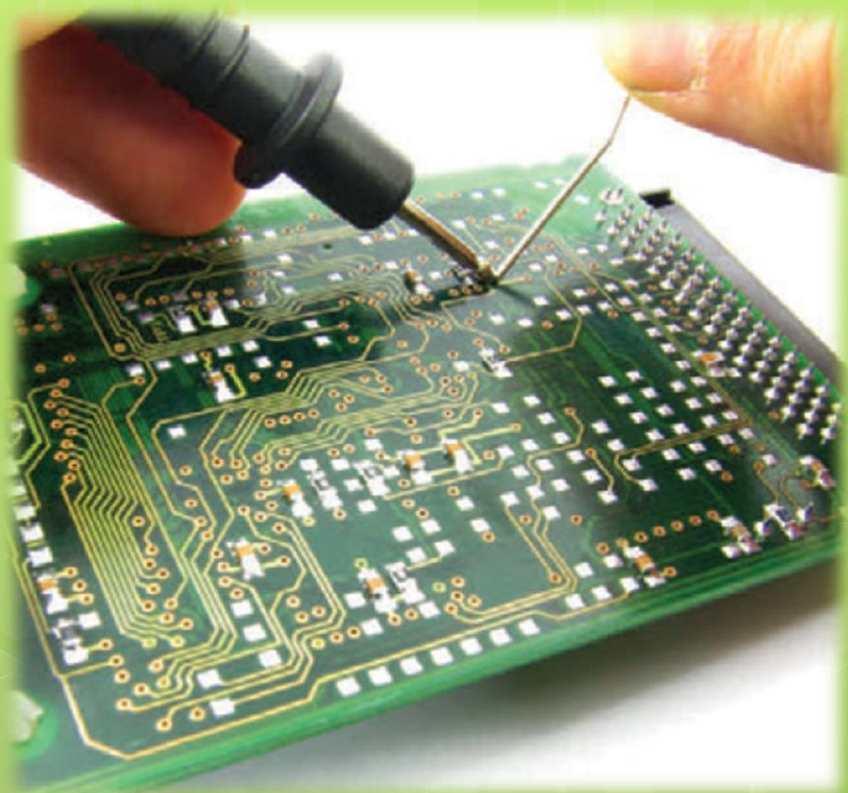
- Ας μετρήσουμε τώρα το ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όσο το φορτίο Q περνά από τον αντιστάτη:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

- Το σύστημα αποκτά ξανά αυτή τη δυναμική ενέργεια όταν το φορτίο περάσει ξανά από την μπαταρία
 - Φυσικά, με το κόστος απώλειας χημικής ενέργειας από την μπαταρία
- Ο ρυθμός αυτός είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η θερμική ενέργεια στον αντιστάτη
- Ισχύς P** που παραδίδεται:

$$P = I\Delta V = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}$$

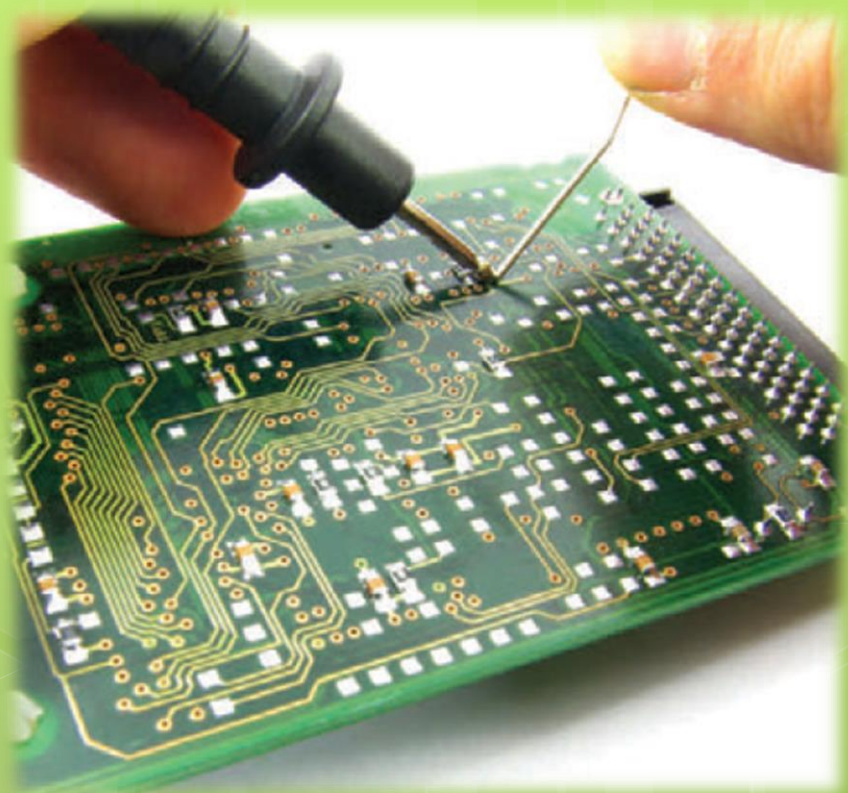




Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα
Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Εισαγωγή

- ◉ Τα κυκλώματα που θα δούμε περιέχουν τους δομικούς λίθους που συζητήσαμε ως τώρα
 - ◉ Αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηγές διαφοράς δυναμικού (μπαταρίες)
- ◉ Στην προσπάθεια ανάλυσής τους θα μάθουμε για τους **Κανόνες του Kirchhoff**
 - ◉ Προέρχονται από την **αρχή διατήρησης της ενέργειας** και την **αρχή διατήρησης του φορτίου**
- ◉ Το ρεύμα που θα διαρρέει τα κυκλώματά μας θα είναι (αρχικά) σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση
- ◉ Ξεκινώντας, ας μιλήσουμε πρώτα με λίγο περισσότερη λεπτομέρεια για τον «πάροχο της ενέργειας», την μπαταρία

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Επειδή η διαφορά δυναμικού στους πόλους μιας μπαταρίας είναι σταθερή για ένα δεδομένο κύκλωμα, το ρεύμα είναι επίσης σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση, και λέγεται **συνεχές ρεύμα**
- Στην πραγματικότητα, η μπαταρία έχει διάρκεια ζωής
 - Ξεκινά δίνοντας μια διαφορά δυναμικού ΔV , η οποία φθίνει με την πάροδο του χρόνου
- Η μπαταρία καλείται είτε **πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης** είτε **πηγή ΗΕΔ**
 - Ορολογικό «απομεινάρι» από τις εποχές που δε γνωρίζαμε ακριβώς τι γίνεται με τα φορτία 😊
 - Συμβολίζεται με $\mathcal{E}$
 - Η **ΗΕΔ** $\mathcal{E}$ μιας μπαταρίας είναι η **μέγιστη δυνατή διαφορά δυναμικού (τάση) (ΔV)** που μπορεί να δώσει ανάμεσα στους πόλους της

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

○ Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

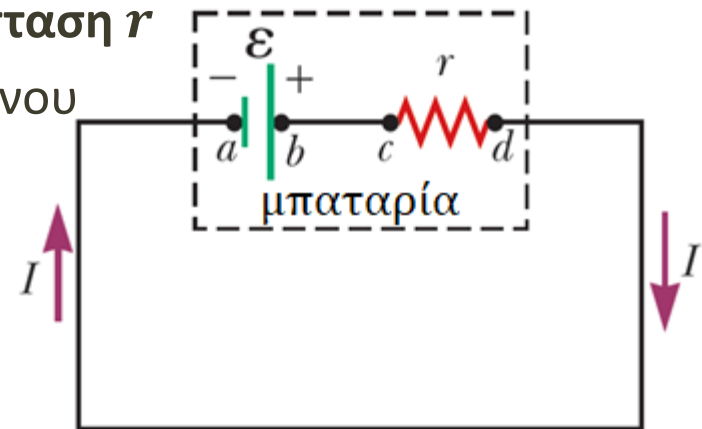
○ Στο παράδειγμα που θα ακολουθήσει θα υποθέσουμε ότι:

- Τα καλώδια ενός κυκλώματος **δεν** έχουν αντίσταση (ιδανικά)
- Ο **θετικός** πόλος της μπαταρίας είναι **υψηλότερου δυναμικού** από τον **αρνητικό**
- Το ρεύμα κινείται από τον **αρνητικό** πόλο προς το **θετικό** πόλο της μπαταρίας

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Ιδανικά, η διαφορά δυναμικού ΔV στα άκρα της μπαταρίας ισούται με την ΗΕΔ της, $\mathcal{E}$
- Στην πράξη όμως, δεν ισχύει. Γιατί;
- Μια πραγματική μπαταρία έχει κι αυτή τη δική της «αντίσταση»
 - Την ονομάζουμε **εσωτερική αντίσταση** r
 - Αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου
- Το σχήμα δείχνει ένα **μοντέλο μπαταρίας** (κουτί διακ/μένων)
- Ιδανική ΗΕΔ κι αντίσταση r σε σειρά:



$$V_d - V_a = (V_d - V_c) + (V_c - V_b) + (V_b - V_a)$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Ιδανική ΗΕΔ κι αντίσταση r σε σειρά:

$$V_d - V_a = (V_d - V_c) + (V_c - V_b) + (V_b - V_a) = \varepsilon - Ir$$

- $V_d - V_c = -Ir$, πτώση δυναμικού ($V_c = V_b > V_d = V_a$)

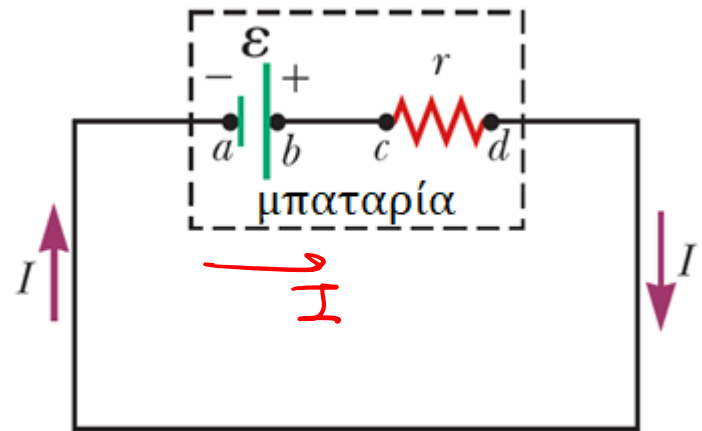
- $V_c - V_b = 0$, ιδανικό καλώδιο

- $V_b - V_a = \varepsilon$, το σημείο b είναι υψηλότερου δυναμικού από το σημείο a

- Επειδή $V_a = V_d \Rightarrow V_d - V_a = 0$

- Άρα το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$\varepsilon - Ir = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Ας βάλουμε μια εξωτερική αντίσταση R στο κύκλωμα (που πλέον τώρα είναι διαφορετικό σε σχέση με πριν)
- Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R είναι

$$V_f - V_e = -IR \quad (= V_a - V_d)$$

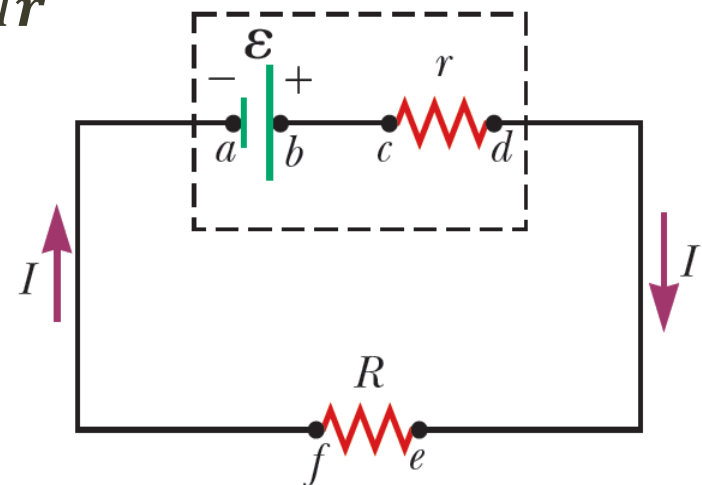
- Σύμφωνα με τη σχέση που υπολογίσαμε πριν, θα έχουμε

$$V_d - V_a = \varepsilon - Ir$$

οπότε απ' τις δυο σχέσεις

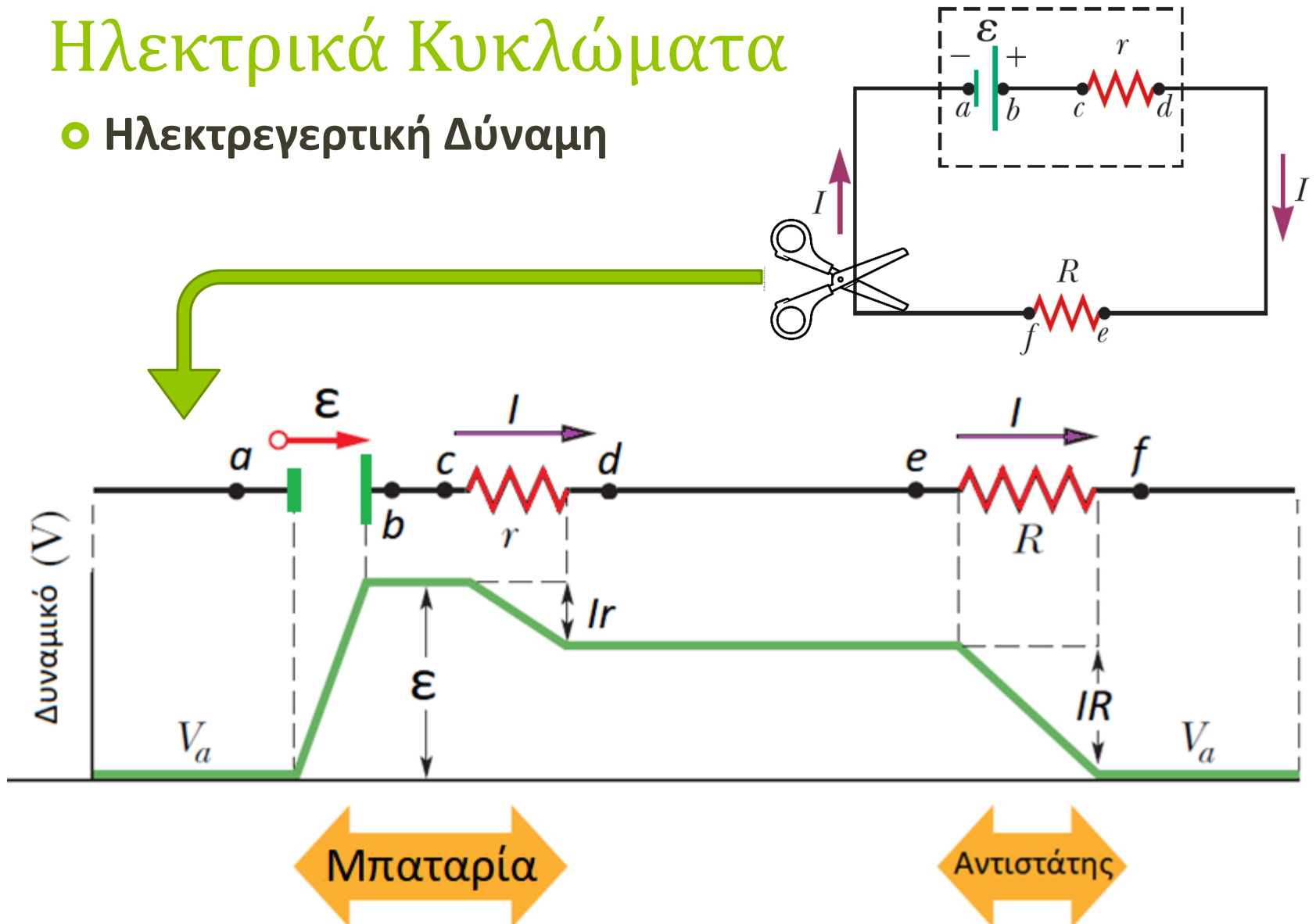
$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

- Άρα πλέον το ρεύμα εξαρτάται τόσο από την R όσο κι από την r



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη



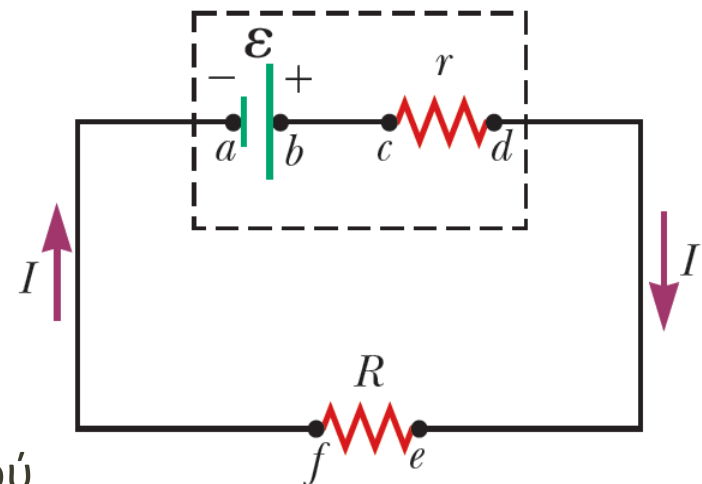
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Πολλαπλασιάζοντας με I , έχουμε

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r \Leftrightarrow P_{source} = P_R + P_r$$

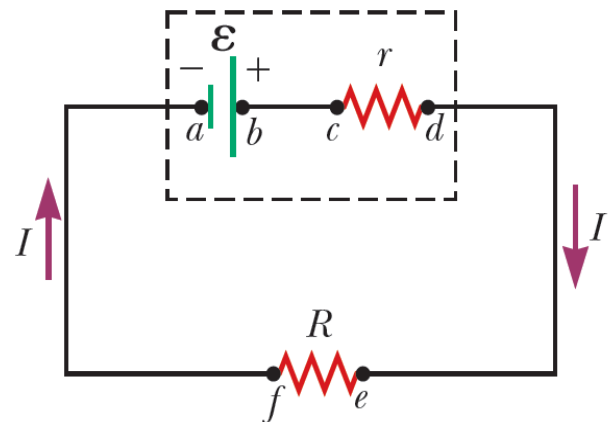
- Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ισχύς κατανέμεται τόσο στην εξωτερική αντίσταση R όσο και στην εσωτερική αντίσταση r
- Στην πράξη, η R είναι αρκετά μεγαλύτερη από την r
 - Όσο «γερνάει» η μπαταρία τόσο μεγαλώνει η τιμή του r της
- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μπαταρία είναι μια **πηγή σταθερής ΗΕΔ**
 - Όχι σταθερού ρεύματος
 - Όχι σταθερής διαφοράς δυναμικού



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα

- ◉ Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $r = 0.05\ \Omega$. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με $R = 3\ \Omega$.
- ◉ Α) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας
- ◉ Β) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $r = 0.05 \Omega$. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με $R=3 \Omega$.

A) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας

B) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία

$$A) \text{ Δείξατε πριν ότι } I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12}{3+0.05} = \frac{12}{3.05} = 3.93 \text{ A}$$

$$\text{Επίσης, } \Delta V_{\text{bat}} = \mathcal{E} - Ir = 12 - 3.93 \cdot 0.05 = 11.8 \text{ V}$$

$$B) \text{ Είναι } P_R = I^2 \cdot R = (3.93)^2 \cdot 3 = 46.33 \text{ W}$$

$$P_r = I^2 \cdot r = (3.93)^2 \cdot 0.05 = 0.77 \text{ W}$$

$$\text{Άρα } P = P_r + P_R = 47.1 \text{ W}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Οι Κανόνες του Kirchhoff

- Για πιο περίπλοκα κυκλώματα, ακολουθούμε κάποιους κανόνες, του λεγόμενου **κανόνες του Kirchhoff**

- 1. **Κανόνας κόμβου:** σε οποιονδήποτε κόμβο (διακλάδωση καλωδίων), το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι **μηδέν**

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Εναλλακτικά:

$$I_{in} = I_{out}$$

Τα ρεύματα που μπαίνουν στον κόμβο έχουν θετικό πρόσημο, ενώ αυτά που βγαίνουν, αρνητικό.

- 2. **Κανόνας βρόχου:** το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε ένα βρόχο πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Οι Κανόνες του Kirchhoff

1. Κανόνας κόμβου:

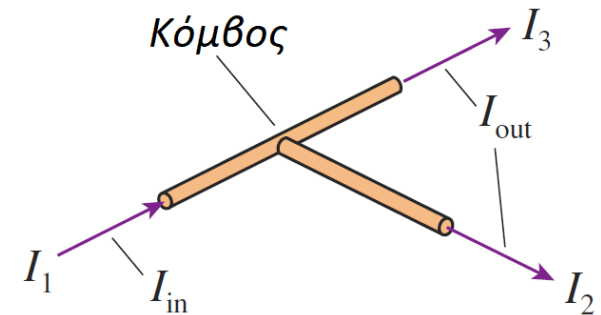
$$I_{in} = I_{out}$$

Προέρχεται από την αρχή διατήρησης του φορτίου

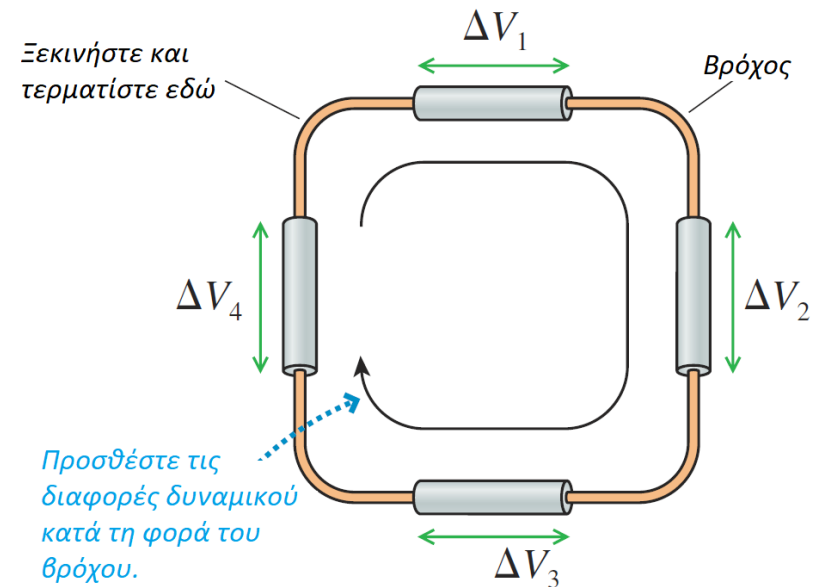
2. Κανόνας βρόχου:

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

Προέρχεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας



$$\text{Κανόνας κόμβου: } I_1 = I_2 + I_3$$



$$\text{Κανόνας βρόχου: } \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 0$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Κανόνες προσήμου

- 1. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -IR$$

- 2. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά την αντίθετη φορά του ρεύματος είναι

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = IR$$

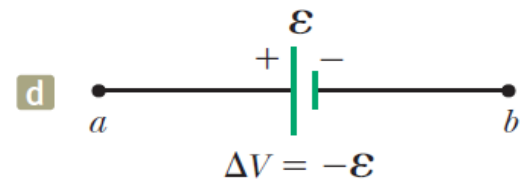
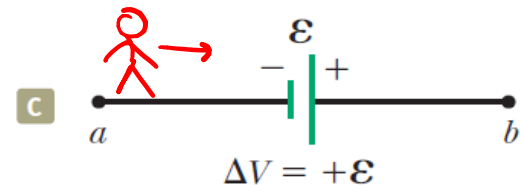
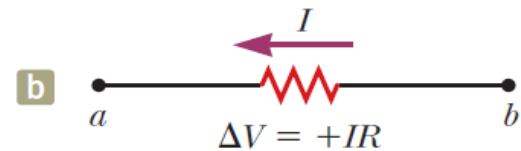
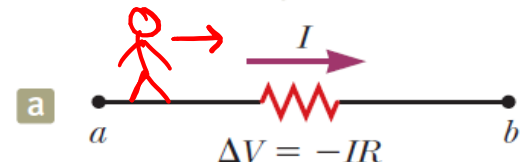
- 3. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $+\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα αρνητικά προς τα θετικά

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \mathcal{E}$$

- 4. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι $-\mathcal{E}$ αν τη διατρέχουμε από τα θετικά προς τα αρνητικά

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\mathcal{E}$$

Σε κάθε διάγραμμα, $\Delta V = V_b - V_a$ και το στοιχείο κυκλώματος διατρέχεται από το a στο b , αριστερά προς δεξιά.

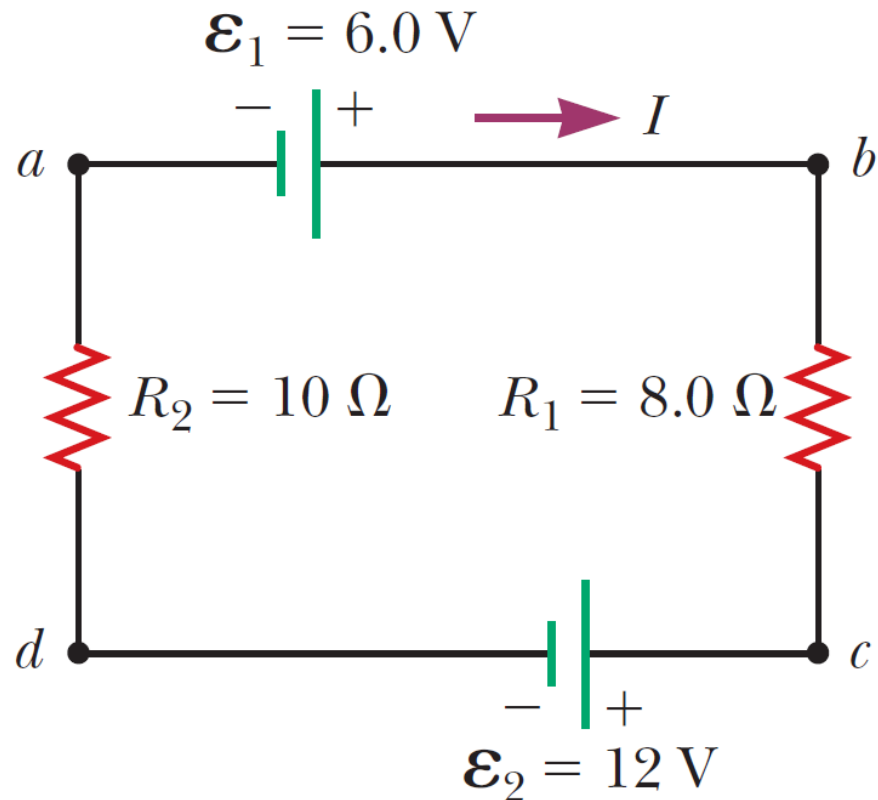


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Ένα κύκλωμα απλού βρόχου περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές όπως στο σχήμα. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Υποθέτω ότι η φορά του
ρεύματος είναι όπως στο
σχήμα (ΤΥΧΑΙΑ)



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

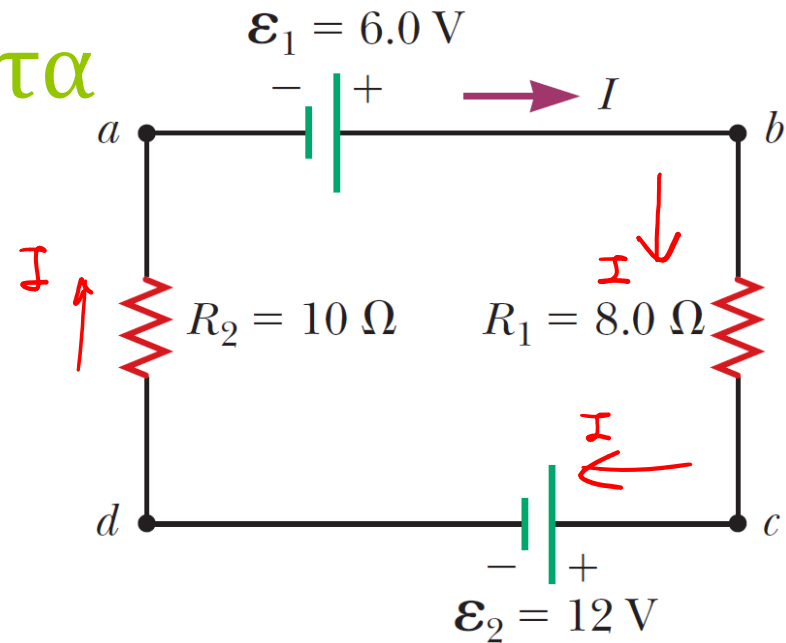
- Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Έστω ο βρόχος $abcd a$. Ισχύει ο 2ος καν. Kirchhoff:

$$\sum_{abcd a} \Delta V = 0 \Leftrightarrow +\mathcal{E}_1 - I \cdot R_1 - \mathcal{E}_2 - I R_2 = 0$$
$$6 - I \cdot 8 - 12 - I \cdot 10 = 0$$

Λίναφε ως προς I , $-6 - 18I = 0 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{3} \text{ A}$.

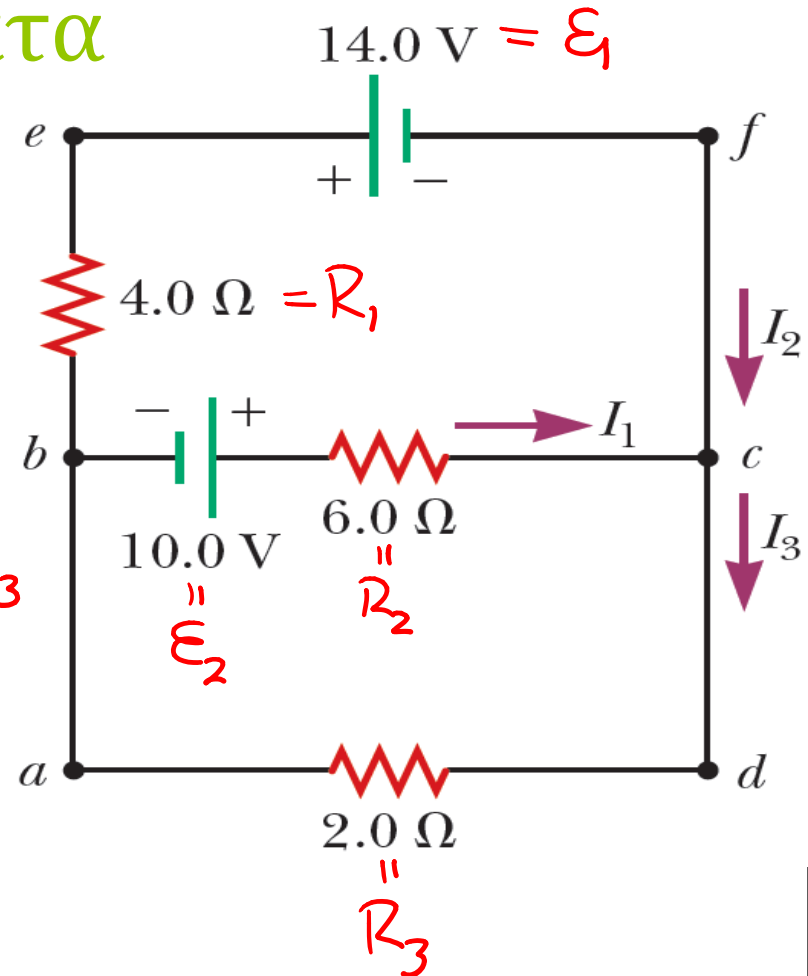
Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα I είναι αντίθετο φοράς από αυτή που υποθέσαμε!



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα:

- Βρείτε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 του διπλανού κυκλώματος και υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού και την ισχύ που παραδίδεται στα άκρα του αντιστάτη αντίστασης $2\ \Omega = R_3$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα – Λύση:

Έστω ο κόμβος c : Ισχύει ο 1ος καν. Kirchhoff: $I_{in} = I_{out}$,
 άρα

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

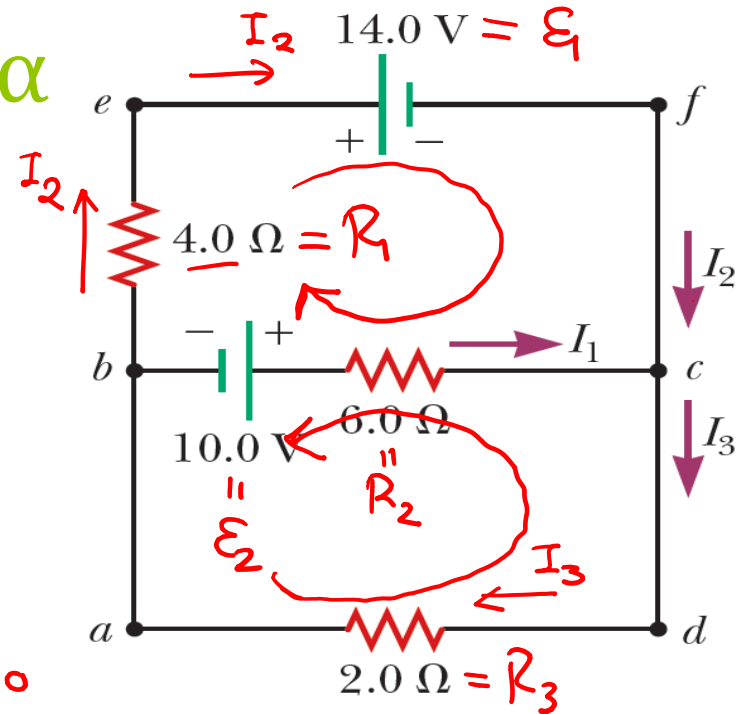
Έστω ο βρόχος $efcbe$: Ισχύει ο 2ος καν. Kirchhoff:

$$\sum_{efcbe} \Delta V = 0 \Leftrightarrow -\varepsilon_1 + I_1 R_2 - \varepsilon_2 - I_2 R_1 = 0$$

$$(2) \quad -14 + I_1 \cdot 6 - 10 - I_2 \cdot 4 = 0$$

Έστω ο βρόχος $adcb a$: Ισχύει ο 2ος καν. Kirchhoff:

$$\sum_{adcb a} \Delta V = 0 \Leftrightarrow +I_3 R_3 + I_1 R_2 - \varepsilon_2 = 0 \Leftrightarrow 2I_3 + 6I_1 - 10 = 0 \quad (3)$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Παράδειγμα – Λύση:

Έχουμε το σύστημα 3x3:

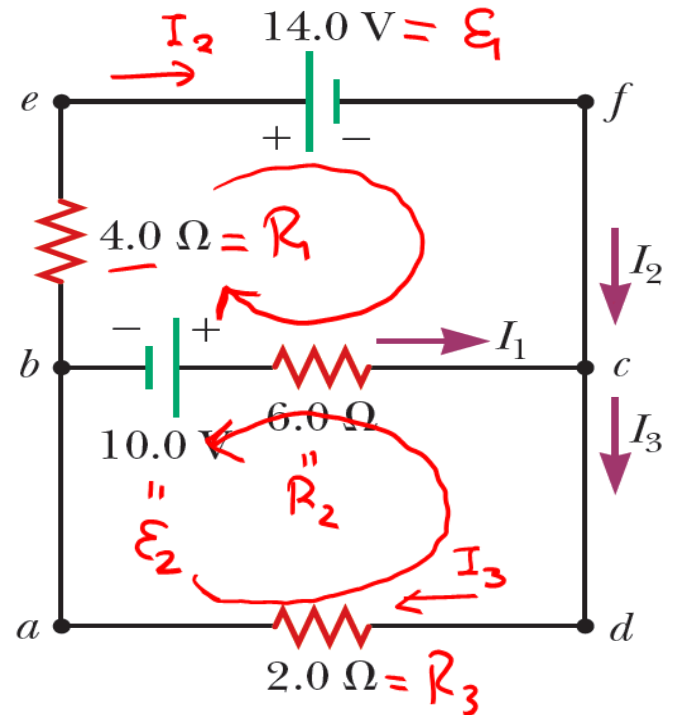
$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ -24 + 6I_1 - 4I_2 &= 0 \\ 2I_3 + 6I_1 - 10 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

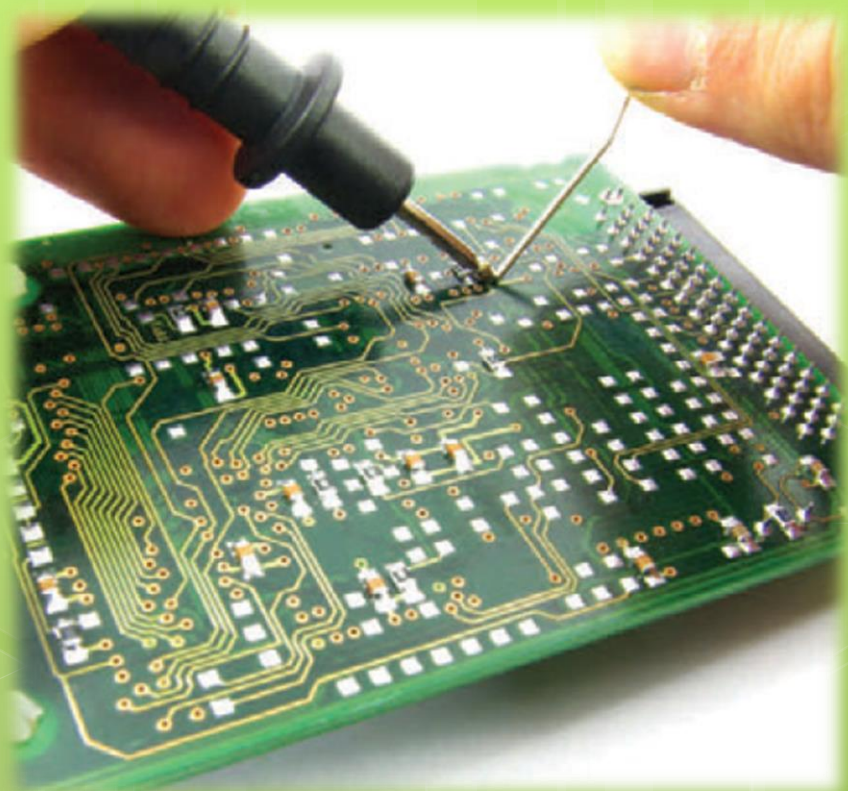
$$\Rightarrow I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = -3 \text{ A}, I_3 = -1 \text{ A}$$

Αρα τελικά

$$\Delta V_{R_3} = I_3 \cdot R_3 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ V}$$

$$P_{R_3} = I_3^2 \cdot R_3 = (1)^2 \cdot 2 = 2 \text{ W}$$

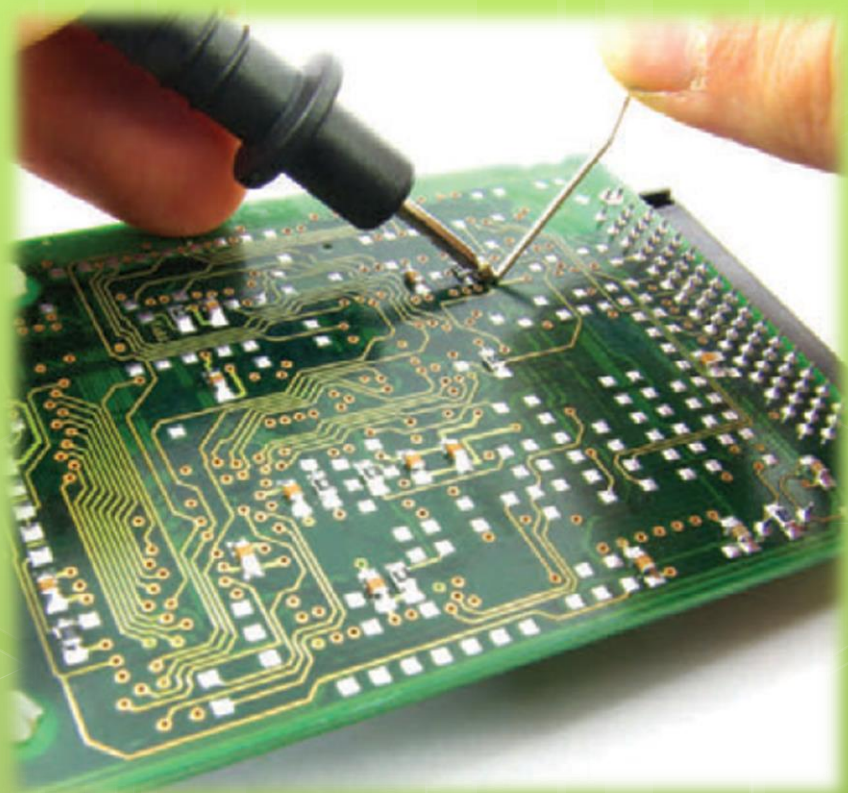




Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

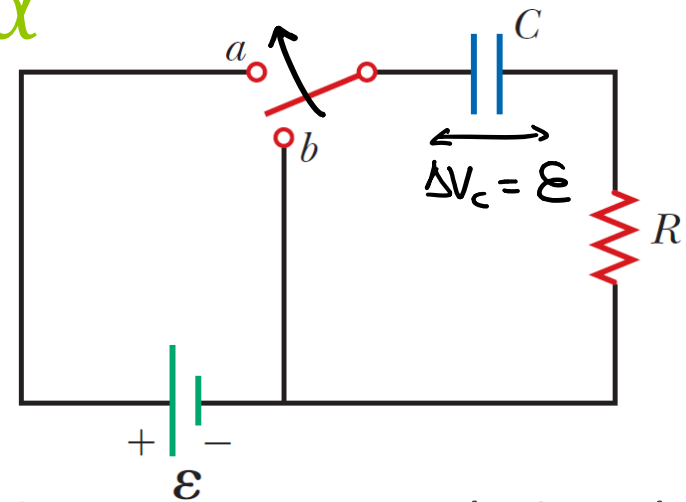
○ Κυκλώματα RC

- Ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό σε μέτρο
- Αν όμως αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα εξακολουθεί να έχει την ίδια κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές
- Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται **RC-κύκλωμα**
 - Τέτοια βρίσκονται σε φλας φωτογραφικών μηχανών, σε βηματοδότες, σε φανάρια, στο αυτοκίνητό σας, ως φίλτρα αποκοπής συχνοτήτων, κλπ

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή
- Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή $t = 0$, (θέση α) ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, κι ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται
- Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται
- Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται! Γιατί;
 - Γιατί δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα!
 - Ο πυκνωτής έχει $\Delta V_c = \mathcal{E}$!



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ας αναλύσουμε τη διαδικασία ποσοτικά
- Σύμφωνα με το 2^ο κανόνα του Kirchhoff:

$$\sum \Delta V = 0 \Leftrightarrow \Delta V_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} + \Delta V_C + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow \varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0$$

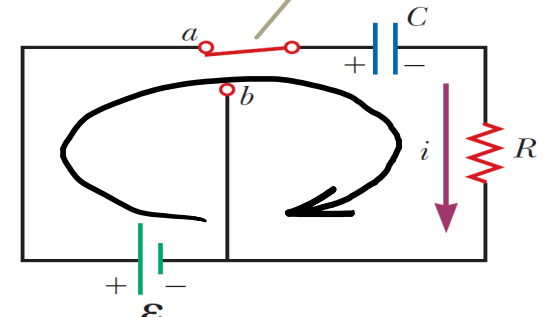
με i , q το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t > 0$

- Αποτελούν δηλαδή **στιγμιαίες** τιμές
- Αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I_{init} = \frac{\varepsilon}{R}, \quad t = 0$$

- ...γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδέν
- Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Φόρτιση πυκνωτή

- Στο τέλος, όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν
 - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή
 - Το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = C\Delta V = C\varepsilon$$

- Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή t , και όχι μόνο τι συμβαίνει στις δυο ακραίες καταστάσεις που περιγράψαμε
 - Ας το δούμε...

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή

- Ξέρουμε ότι $i = \frac{dq}{dt}$ και άρα

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR = 0 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC}$$

- Πολλαπλασιάζοντας με dt και αναδιατάσσοντας

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{\hat{q}} \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC} \int_0^{\hat{t}} dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\hat{q} - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Φόρτιση πυκνωτή

- Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC})$$

ως προς το χρόνο έχουμε ότι

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

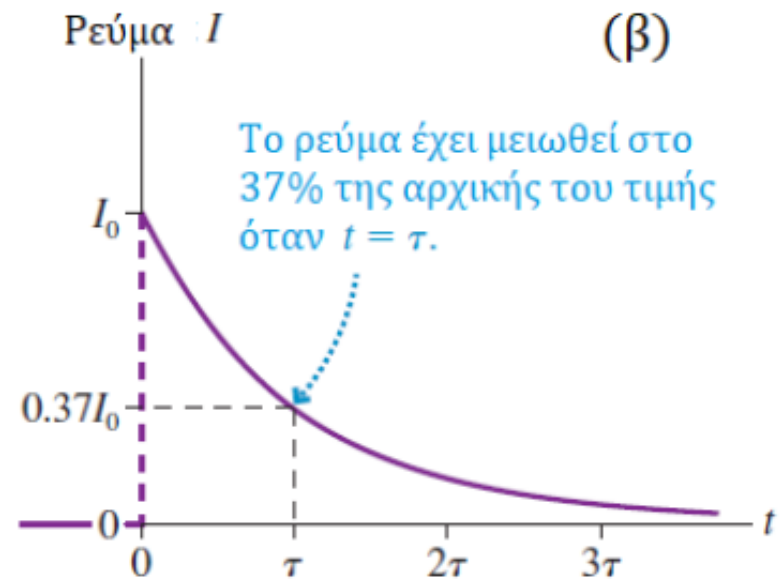
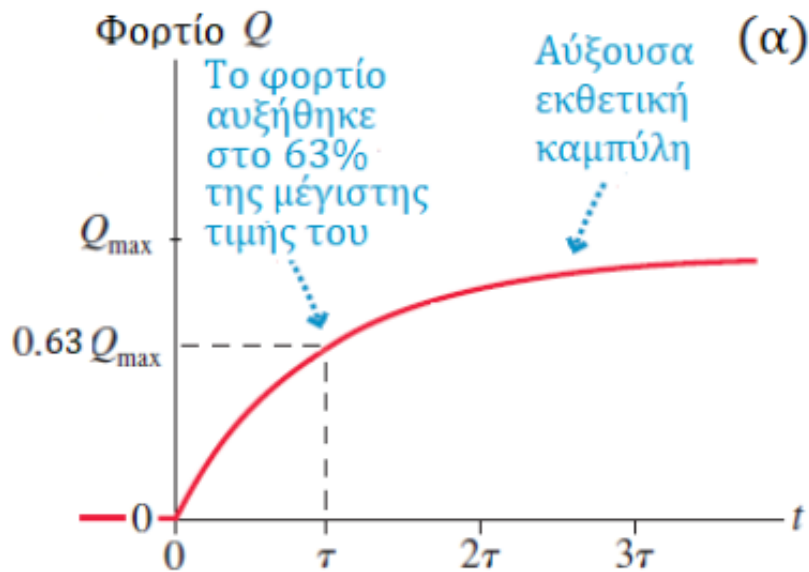
- Η ποσότητα RC ονομάζεται **χωρητική χρονική σταθερά τ**

$$\tau = RC$$

- Εκφράζει τη χρονική στιγμή όπου το ρεύμα φθίνει στο $1/e$ της αρχική του τιμής ($0.368I_i$),
- Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή όπου το φορτίο αυξάνει από $q = 0$ στην τιμή $q = 0.632C\varepsilon$
- Με άλλα λόγια, εκφράζει τη χρονική στιγμή που ο πυκνωτής φορτίζεται στο 63.2% του συνολικού του φορτίου, $Q_{\max} = C\varepsilon$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Φόρτιση πυκνωτή



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

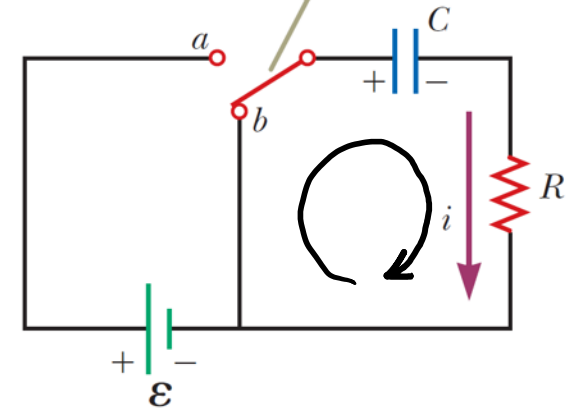
● Εκφόρτιση πυκνωτή

- Έστω ότι ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος με κάποιο φορτίο Q_i
- Στα άκρα του θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V_c = \frac{Q_i}{C}$$

- Ο αντιστάτης έχει μηδενική διαφορά δυναμικού, αφού δεν υπάρχει πλέον ροή ρεύματος
- Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$, κλείσουμε το διακόπτη στη θέση b , τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη
- Έστω μια χρονική στιγμή t
 - Ο πυκνωτής θα έχει φορτίο q
 - Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι i

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση b , ο πυκνωτής εκφορτίζεται.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Εκφόρτιση πυκνωτή

- Από το 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα, έχουμε

$$\Delta V_{\text{πυκν}} + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow -\frac{q}{C} - iR = 0$$

- Ξανά, θέτοντας $i = \frac{dq}{dt}$, έχουμε

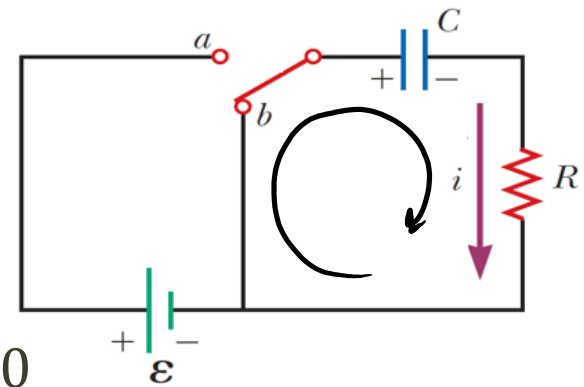
$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

- Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{Q_i}^{\hat{q}} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^{\hat{t}} dt \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\hat{q}}{Q_i} \right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

- Άρα

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Εκφόρτιση πυκνωτή

- Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$

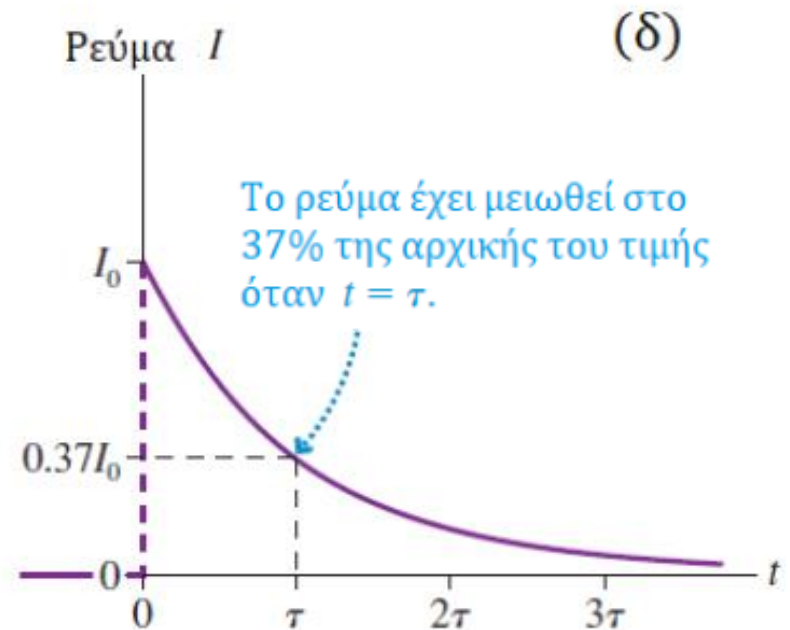
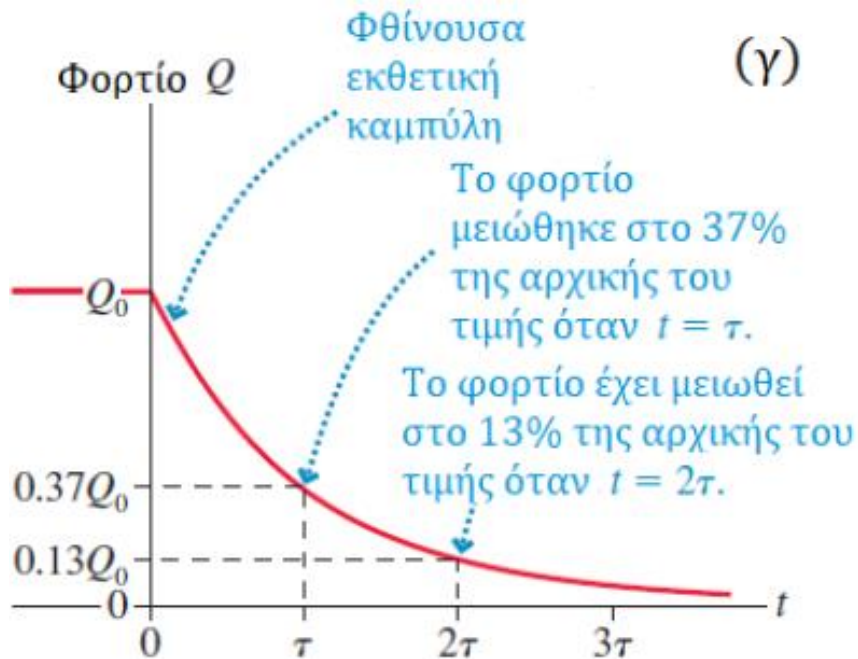
ως προς το χρόνο, έχουμε

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Το παραπάνω αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε όταν ο πυκνωτής φορτιζόταν

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Εκφόρτιση πυκνωτή



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Φόρτιση πυκνωτή

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Εκφόρτιση πυκνωτή

$$q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

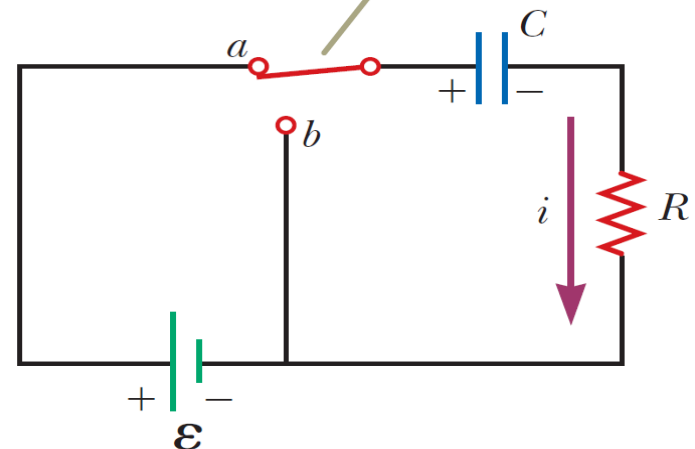
- Όλα τα παραπάνω ορίζονται για $t > 0$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α, ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά με τιμές $\varepsilon = 12 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 8 \times 10^5 \Omega$. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ , το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

$$\text{Είναι: } \tau = RC = 8 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 40 \cdot 10^{-1} = 4 \text{ sec}$$

$$Q_{\max} = C\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 60 \cdot 10^{-6} = 60 \mu\text{C}$$

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{8 \cdot 10^5} = 15 \mu\text{A}$$

$$\text{Είναι: } q(t) = Q_{\max} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = (60 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{4}})$$

$$i(t) = I_{\max} e^{-\frac{t}{\tau}} = (15 \cdot 10^{-6}) e^{-\frac{t}{4}}$$

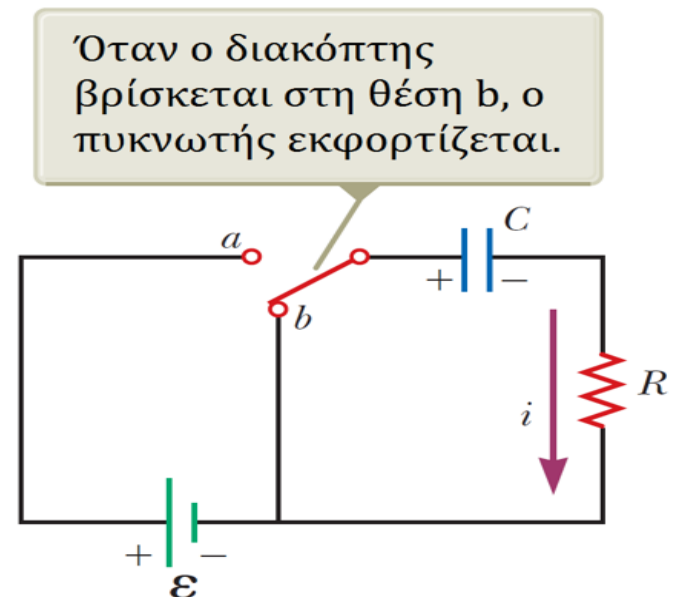
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;

B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

Α) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής;

Έστω Q_i το αρχικό φορτίο του πυκνωτή. Ξέραμε ότι

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC} = Q_i e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC. \text{ Άρα θα έχουμε}$$

$$\cancel{Q_i} e^{-t/\tau} = \frac{1}{4} \cancel{Q_i} \Leftrightarrow e^{-t/\tau} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-t/\tau} = 2^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-t/\tau} = \ln 2^{-2} \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = -2 \cdot \ln 2 \Leftrightarrow t = (2 \ln 2) \tau.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 1.38 \end{array}$$

$$\text{Άρα } t \cong 1.38 \tau = 1.38 RC.$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

● Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

Β) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;

Η ηλεκτρ. ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U_E(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C}$.

Θέλουμε

$$U_E(t) = \frac{1}{4} U_E$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = \frac{1}{8} \frac{Q^2}{C}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\cancel{Q_i^2}}{\cancel{C}} e^{-2t/\tau} = \frac{1}{8} \frac{\cancel{Q_i^2}}{\cancel{C}}$$

$$\frac{1}{2} e^{-2t/\tau} = \frac{1}{8}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R , όπως είδαμε νωρίτερα.

Β) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής της τιμής;

$$e^{-2t/\tau} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ln e^{-2t/\tau} = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{2t}{\tau} = \cancel{\ln 1} - \ln 4 \Leftrightarrow -\frac{2t}{\tau} = -\ln 4$$

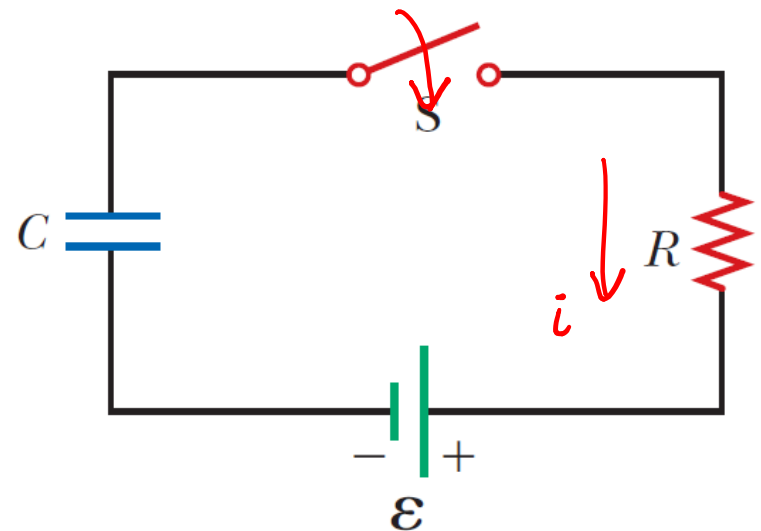
$$t = \left(\frac{1}{2} \ln 4\right) \tau.$$

$$\text{Άρα} \quad t = \left(\frac{1}{2} \ln 4\right) \tau = \left(\frac{1}{2} \ln 4\right) RC.$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Παράδειγμα:

- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 1 \times 10^6 \Omega$. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$, $C = 5 \mu\text{F}$, και $R = 1 \times 10^6 \Omega$. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Κλείνουμε το διακόπτη S , το κύκλωμα
ξεκινά να φορτίζει τον πυκνωτή.

Ξέρουμε

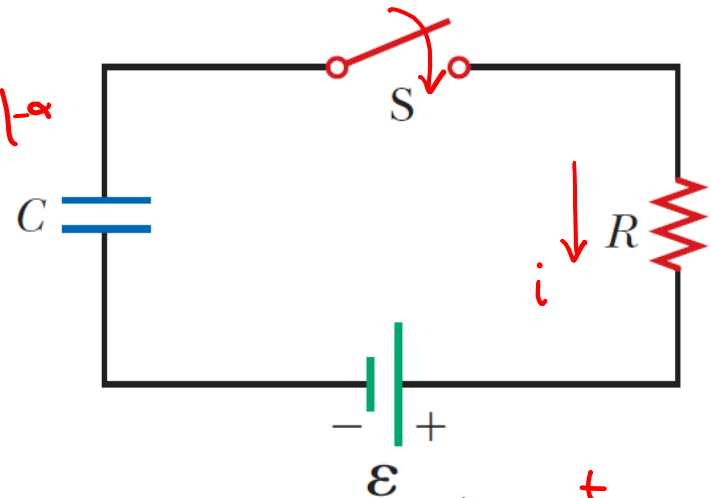
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

$$RC = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^6 = 5 \text{ s}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{30}{10^6} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$I(t) = (30 \cdot 10^{-6}) e^{-\frac{t}{5}} \text{ A}$$

$$\Gamma_{\alpha} \quad t = 10 \text{ s}, \quad I(10) = (30 \cdot 10^{-6}) \cdot e^{-\frac{10}{5}} = 30 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-2} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

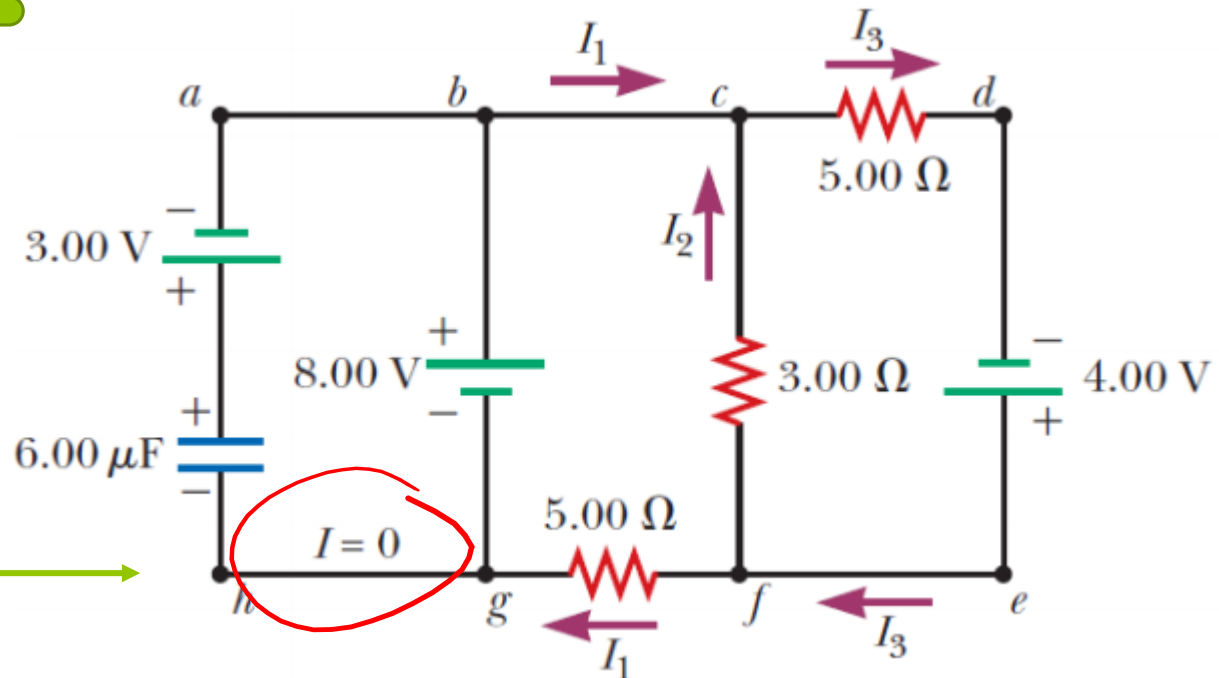


Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα:

- Το κύκλωμα του σχήματος έχει συνδεθεί για πολλή ώρα, έτσι ώστε ο πυκνωτής έχει φορτιστεί. Βρείτε τα ρεύματα και το φορτίο στον πυκνωτή.

Ο κλάδος ghab ΔΕ διαρρέεται από ρεύμα λόγω του ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος !!!!!



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

● Παράδειγμα – Λύση:

Ισχύει ο 1^{ος} καν. Kirchhoff
στον κόμβο c: $I_1 + I_2 = I_3$ (1)

Στο βρόχο bcfgb ισχύει ο 2^{ος} καν. Kirchhoff : $\sum \Delta V = 0$

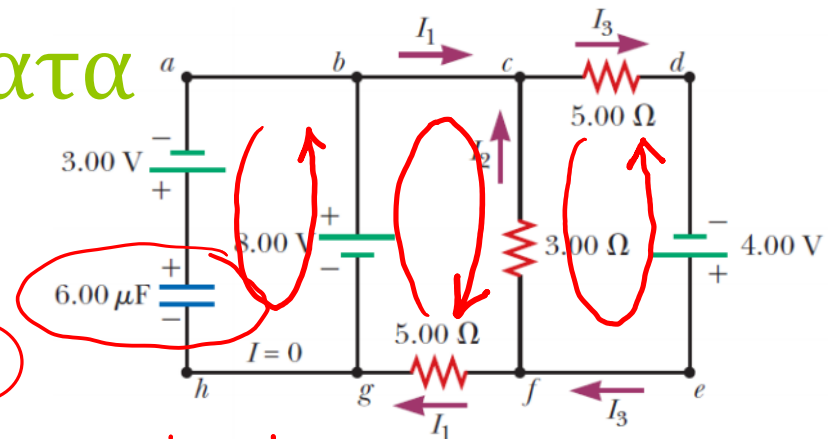
$$\text{δηλ. } I_2 \cdot 3 - I_1 \cdot 5 + 8 = 0 \quad (2)$$

Στο βρόχο ctedc ισχύει ο 2^{ος} καν. Kirchhoff : $\sum \Delta V = 0$
 $+ I_2 \cdot 3 - 4 + 5 I_3 = 0 \quad (3)$. Λύνοντας το 3x3 σύστημα,

$$I_1 = 1.38 \text{ A}, \quad I_2 = -0.3636 \text{ A}, \quad I_3 = 1.02 \text{ A}.$$

Για το φορτίο, ισχύει $Q = C \Delta V$. Στο βρόχο ahgba,

$\sum \Delta V = 0$, από 2^ο καν. Kirchhoff. Οπότε:



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

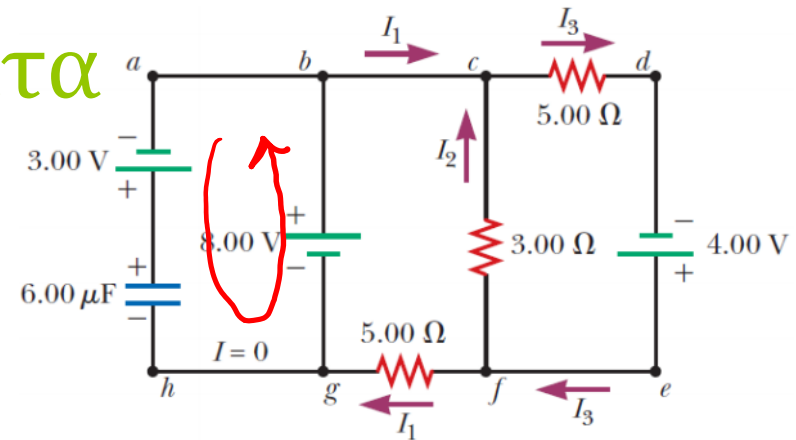
● Παράδειγμα – Λύση:

$$\sum \Delta V = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow +3 - \frac{q}{C} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{q}{6 \cdot 10^{-6}} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11 = \frac{q}{6 \cdot 10^{-6}} \Leftrightarrow q = 66 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 66 \text{ } \mu\text{C}.$$



1 PHYSICS

1.1 History

Aristotle said a bunch of stuff that was wrong. Galileo and Newton fixed things up. Then Einstein broke everything again. Now, we've basically got it all worked out, except for small stuff, big stuff, hot stuff, cold stuff, fast stuff, heavy stuff, dark stuff, turbulence, and the concept of time.

Τέλος
Μαθήματος