



Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

# Φυσική για Μηχανικούς

## Ρεύμα και Αντίσταση



Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

# Φυσική για Μηχανικούς

## Ρεύμα και Αντίσταση

# Χωρητικότητα, Ρεύμα και Αντίσταση

## – επανάληψη

- Η **χωρητικότητα C** ενός πυκνωτή ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου του φορτίου σε οποιονδήποτε αγωγό προς το μέτρο της διαφοράς δυναμικού ανάμεσά τους:

$$C \equiv \frac{|Q|}{|\Delta V|}$$

- Παράλληλες πλάκες απόστασης  $d$  κι εμβαδού  $A$ :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

- Ομοαξονικός κυλινδρικός πυκνωτής μήκους  $l$  :

$$C = \frac{l}{2k_e \ln \left( \frac{b}{a} \right)}$$

# Χωρητικότητα, Ρεύμα και Αντίσταση – επανάληψη

- Πυκνωτές σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

- Πυκνωτές σε παραλληλία:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

- Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια  $U_E$

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

- Μέσο ρεύμα:

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- Στιγμιαίο ρεύμα:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

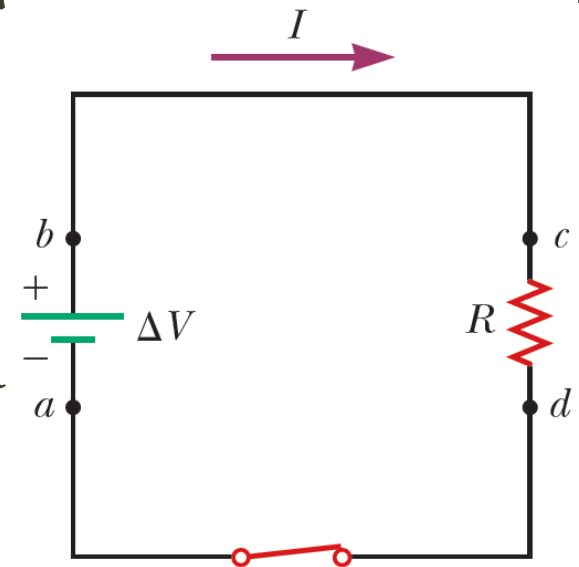
- Αντίσταση ενός αγωγού:

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I}$$

# Ρεύμα και Αντίσταση

## ● Ηλεκτρική Ισχύς

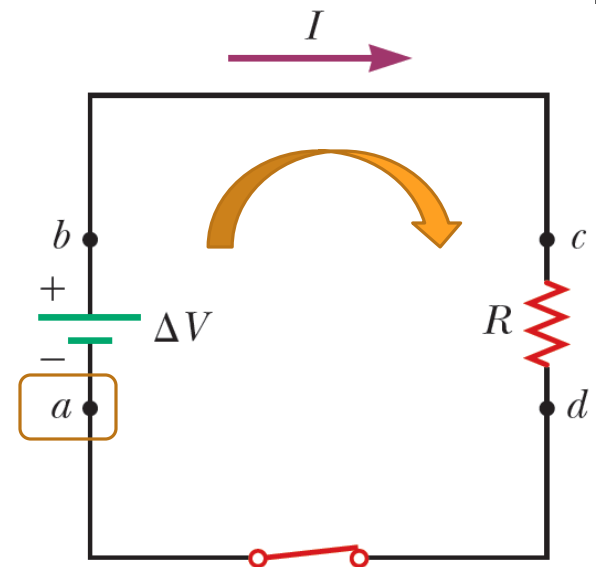
- Σε τυπικά ηλεκτρικά κυκλώματα, η ενέργεια μεταφέρεται από μια πηγή όπως η μπαταρία, σε μια λάμπα ή μια συσκευή
- Ας βρούμε μια έκφραση που θα μας δίνει το ρυθμό μεταφοράς αυτής της ενέργειας!
- Ας θεωρήσουμε το παρακάτω κύκλωμα όπου ενέργεια μεταφέρεται σε έναν αντιστάτη
  - Στην πραγματικότητα, κάποια ενέργεια μεταφέρεται και στα καλώδια, την οποία θεωρούμε αμελητέα
- Ο **θετικός** πόλος της μπαταρίας είναι **υψηλότερου δυναμικού** από τον **αρνητικό**



# Ρεύμα και Αντίσταση

## ● Ηλεκτρική Ισχύς

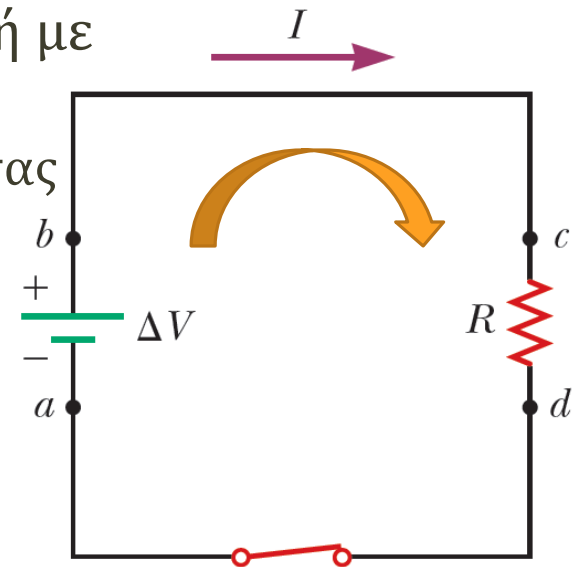
- Ας θεωρήσουμε ότι ακολουθούμε ένα φορτίο  $Q$  που κινείται στο κύκλωμα κατά τη φορά του ρολογιού, ξεκινώντας και καταλήγοντας στο σημείο  $a$ 
  - Από το  $a$  στο  $b$ , η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται κατά  $Q\Delta V$ 
    - ...ενώ η χημική δυναμική ενέργεια της μπαταρίας μειώνεται εξίσου
  - Όσο το φορτίο κινείται από το  $c$  στο  $d$ , η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται λόγω της σύγκρουσης ηλεκτρονίων με τα άτομα του αντιστάτη
  - Μετατροπή ηλ. δυναμικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια



# Ρεύμα και Αντίσταση

## ● Ηλεκτρική Ισχύς

- Όταν το φορτίο επιστρέφει στο  $a$ , το συνολικό αποτέλεσμα είναι ότι ένα τμήμα της χημικής δυναμικής ενέργειας της μπαταρίας μεταφέρθηκε στον αντιστάτη και έμεινε εκεί ως εσωτερική ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση των ατόμων του αντιστάτη
- Συνήθως ο αντιστάτης είναι σε επαφή με τον αέρα
  - Μεταφέρεται ενέργεια μέσω θερμότητας
  - Εκπέμπεται επίσης ακτινοβολία
- Μετά από λίγο, ο αντιστάτης επανέρχεται σε φυσιολογική θερμοκρασία



# Ρεύμα και Αντίσταση

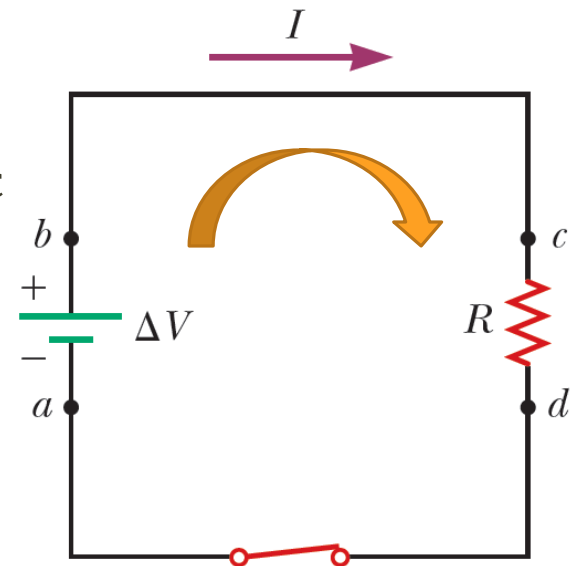
## • Ηλεκτρική Ισχύς

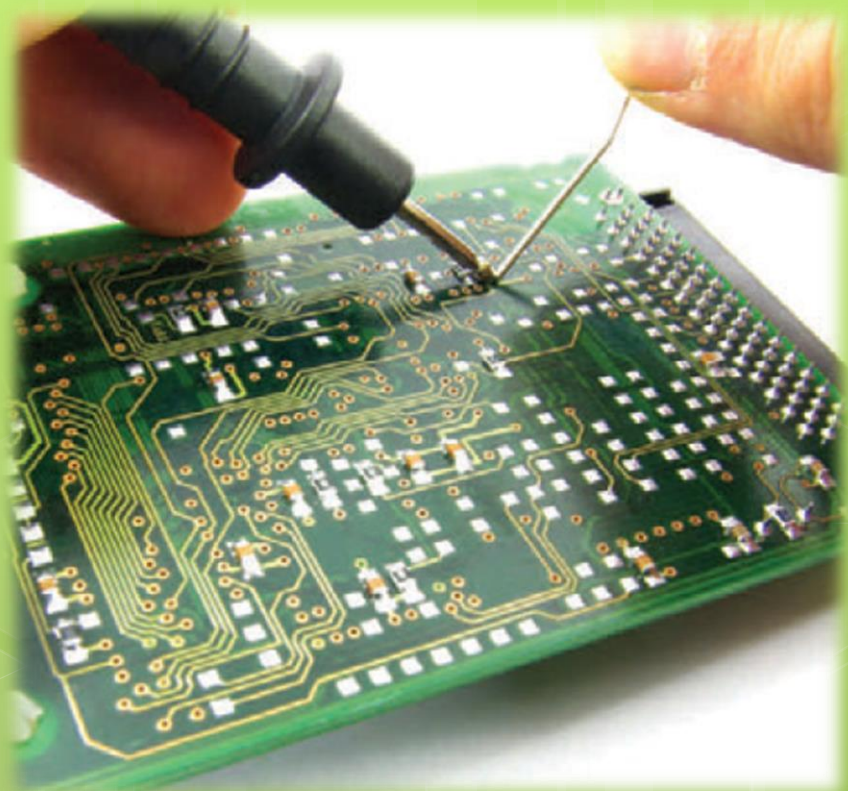
- Ας μετρήσουμε τώρα το ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όσο το φορτίο  $Q$  περνά από τον αντιστάτη:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

- Το σύστημα αποκτά ξανά αυτή τη δυναμική ενέργεια όταν το φορτίο περάσει ξανά από την μπαταρία
  - Φυσικά, με το κόστος απώλειας χημικής ενέργειας από την μπαταρία
- Ο ρυθμός αυτός είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια στον αντιστάτη
- Ισχύς  $P$  που παραδίδεται:

$$P = I\Delta V = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}$$

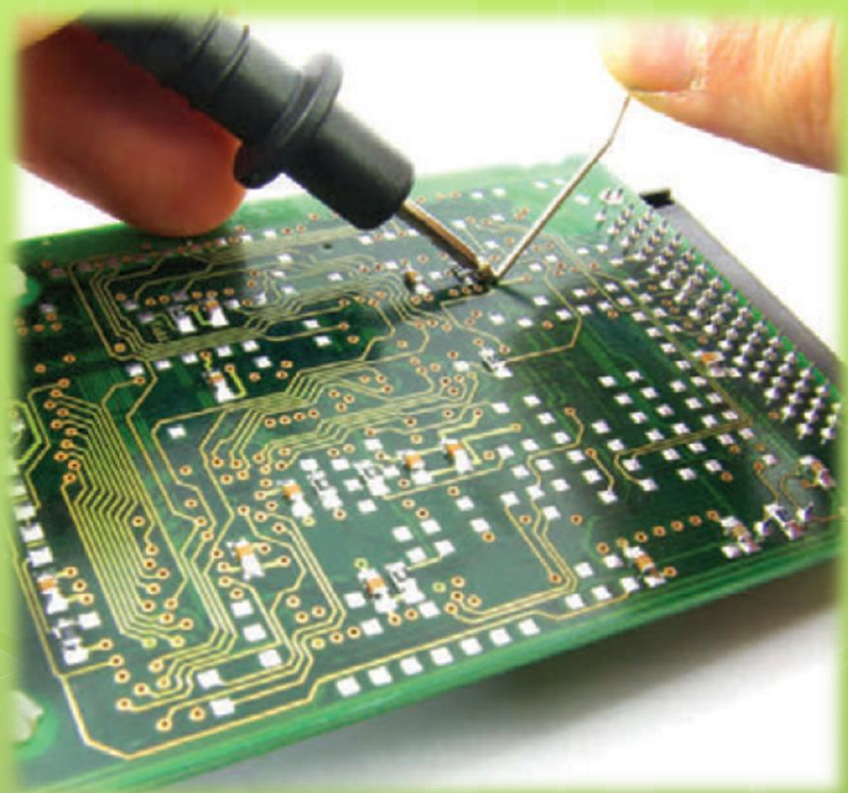




Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

# Φυσική για Μηχανικούς

## Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

# Φυσική για Μηχανικούς

## Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ◉ Εισαγωγή

- ◉ Τα κυκλώματα που θα δούμε περιέχουν τους δομικούς λίθους που συζητήσαμε ως τώρα
  - ◉ Αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηγές διαφοράς δυναμικού (μπαταρίες)
- ◉ Στην προσπάθεια ανάλυσής τους θα μάθουμε για τους ***Κανόνες του Kirchhoff***
  - ◉ Προέρχονται από την ***αρχή διατήρησης της ενέργειας*** και την ***αρχή διατήρησης του φορτίου***
- ◉ Το ρεύμα που θα διαρρέει τα κυκλώματά μας θα είναι (αρχικά) σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση
- ◉ Ας μιλήσουμε αρχικά για τον «πάροχο της ενέργειας»
  - ◉ Την «μπαταρία»

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ◉ Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- ◉ Η διαφορά δυναμικού στους πόλους μιας μπαταρίας είναι σταθερή για ένα δεδομένο κύκλωμα, το ρεύμα στο κύκλωμα είναι επίσης σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση, και λέγεται **συνεχές ρεύμα**
- ◉ Στην πραγματικότητα, η μπαταρία έχει διάρκεια ζωής
  - ◉ Ξεκινά δίνοντας διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ , η οποία φθίνει με την πάροδο του χρόνου
- ◉ Η μπαταρία καλείται είτε **πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης** είτε **πηγή ΗΕΔ**
- ◉ Η **ΗΕΔ  $\mathcal{E}$**  μιας μπαταρίας είναι η **μέγιστη δυνατή τάση ( $\Delta V$ )** που μπορεί να δώσει ανάμεσα στους πόλους της
- ◉ Σε όλη μας τη συζήτηση θα υποθέσουμε ότι:
  - α) τα καλώδια **δεν** έχουν αντίσταση
  - β) ο **θετικός** πόλος της μπαταρίας είναι **υψηλότερου δυναμικού** από τον **αρνητικό**

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

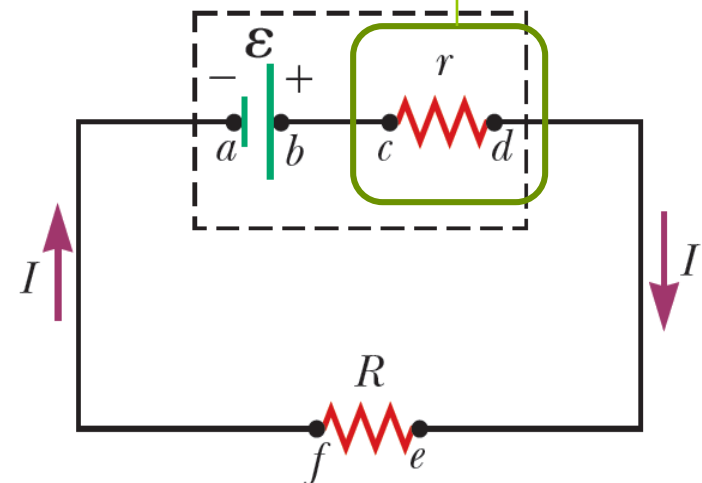
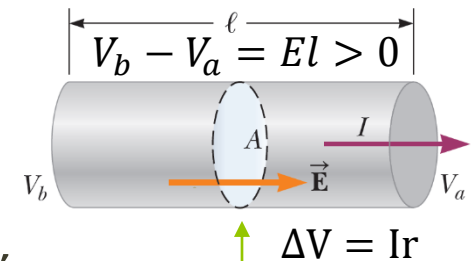
## ● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Η μπαταρία έχει κι αυτή τη δική της αντίσταση
  - Την ονομάζουμε **εσωτερική αντίσταση  $r$**
  - Αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου
- Ιδανικά, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας ισούται με την ΗΕΔ

- Στην πράξη όμως, δεν ισχύει. Γιατί;

- Το σχήμα δείχνει ένα μοντέλο μπαταρίας (κουτί διακ/μένων)
- Ιδανική ΗΕΔ και αντίσταση  $r$  σε σειρά:

$$V_d - V_a = (V_d - V_c) + (V_c - V_b) + (V_b - V_a) = -Ir + 0 + \varepsilon$$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

- Το σχήμα δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού (κατά μέτρο) στα άκρα της αντίστασης  $R$  είναι

$$\Delta V = IR$$

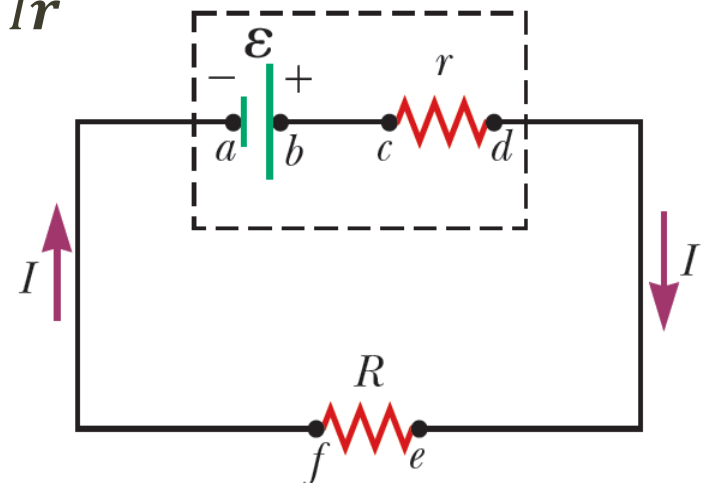
- Σύμφωνα με τη σχέση που υπολογίσαμε πριν, θα έχουμε

$$\Delta V = IR = \varepsilon - Ir$$

οπότε

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

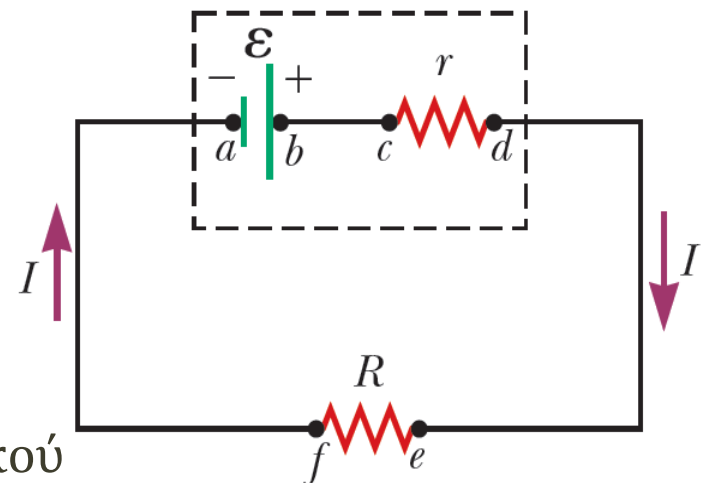
- Άρα το ρεύμα εξαρτάται τόσο από την  $R$  όσο κι από την  $r$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ● Ηλεκτρεγερτική Δύναμη

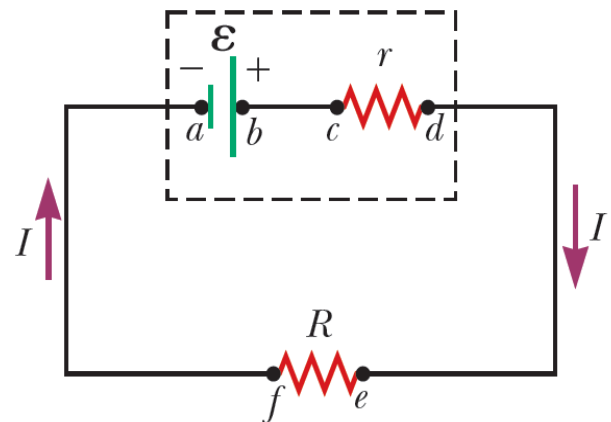
- Πολλαπλασιάζοντας με  $I$ , έχουμε  $I\varepsilon = I^2R + I^2r$
- Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ισχύς κατανέμεται τόσο στην εξωτερική αντίσταση  $R$  όσο και στην εσωτερική αντίσταση  $r$
- Στην πράξη, η  $R$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από την  $r$ 
  - Όσο «γερνάει» η μπαταρία τόσο μεγαλώνει η τιμή του  $r$  της
- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μπαταρία είναι μια πηγή σταθερής ΗΕΔ
  - Όχι σταθερού ρεύματος
  - Όχι σταθερής διαφοράς δυναμικού



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ◉ Παράδειγμα

- ◉ Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ  $12\text{ V}$  και εσωτερική αντίσταση  $r = 0.05\ \Omega$ . Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με  $R = 3\ \Omega$ .
- ◉ Α) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας
- ◉ Β) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## • Παράδειγμα – Λύση:

- Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ  $12\text{ V}$  και εσωτερική αντίσταση  $r = 0.05\ \Omega$ . Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με  $R=3\ \Omega$ .

A) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας

B) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία

A) Ζητάμε το ρεύμα  $I$ : 
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12}{3 + 0.05} = \frac{12}{3.05} \approx 3.9\text{ A}$$

— η — διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ : 
$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir$$

B)  $P_R = I^2 R = 46.3\text{ W}$

$$P_r = I^2 r = 0.772\text{ W}$$

$$P_{\text{tot}} = P_R + P_r = 47.1\text{ W}$$

Λη  $r = 2\ \Omega$ :

$$I = 2.4\text{ A}$$

$$\Delta V = 7.2\text{ V}$$

$$P_R = 17.3\text{ W}$$

$$= 12 - 3.9 \cdot 0.05$$

$$= 11.8\text{ V}$$

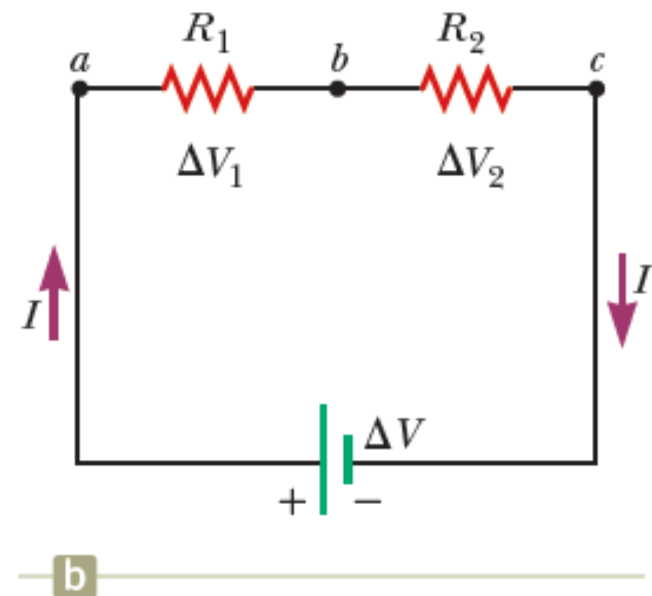
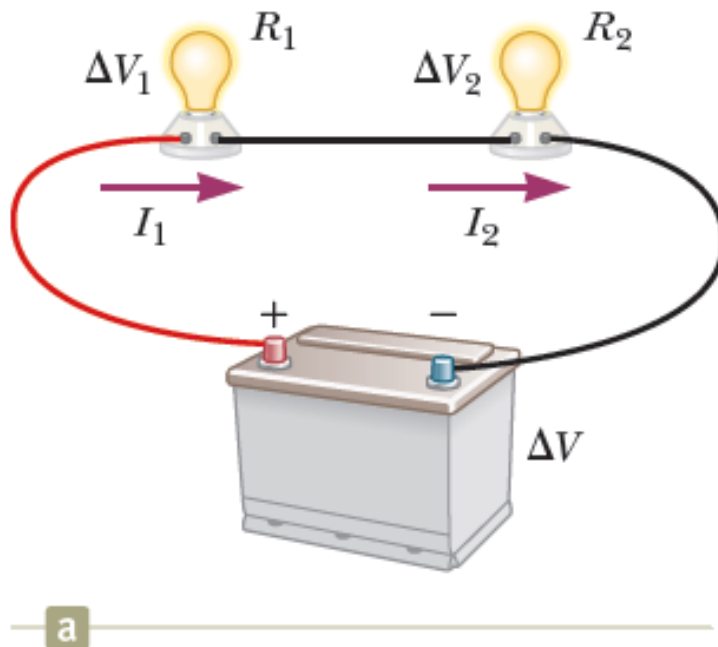
$$P_r = 11.5\text{ W}$$

$$P_{\text{tot}} = 28.8\text{ W}$$

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Αντιστάτες σε σειρά & παράλληλα

- Ας δούμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο «σχέδιο» στους αντιστάτες, όπως κάναμε με τους πυκνωτές
- Ας ξεκινήσουμε με μια διάταξη σε σειρά



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- Αντιστάτες σε σειρά

- Προφανώς, η ποσότητα φορτίου  $Q$  που εξέρχεται του αντιστάτη  $R_1$  θα πρέπει να είναι ίδια με αυτή που εισέρχεται στον  $R_2$

- Αφού το φορτίο στο κύκλωμα δεν αλλάζει!

- Άρα  $I = I_1 = I_2$ , αν  $I$  είναι το ρεύμα που άγει η μπαταρία

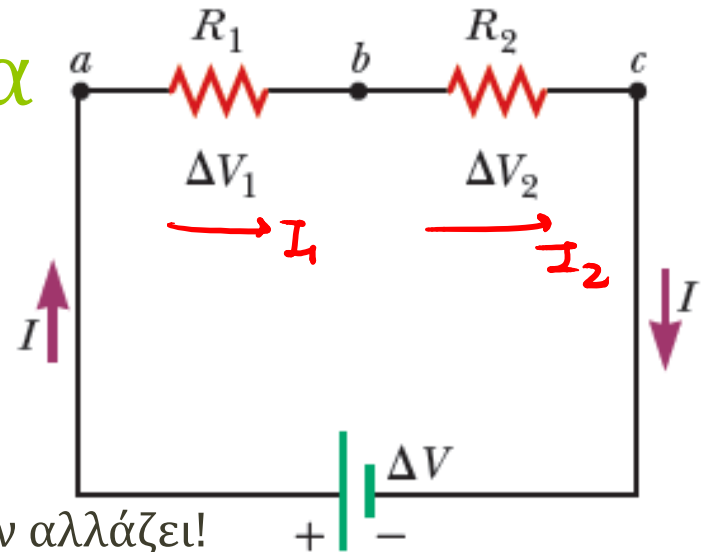
- Η διαφορά δυναμικού δίνεται ως

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2)$$

- Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση  $R_{eq} = R_1 + R_2$

- Γενικότερα

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## • Αντιστάτες σε παραλληλία

- Προφανώς, η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι η ίδια
- Άρα  $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ , αν  $\Delta V$  είναι η διαφορά δυναμικού που εγκαθιστά η μπαταρία
- Το ρεύμα  $I$  «χωρίζεται» σε δυο μονοπάτια
- Επειδή όμως το συνολικό φορτίο διατηρείται

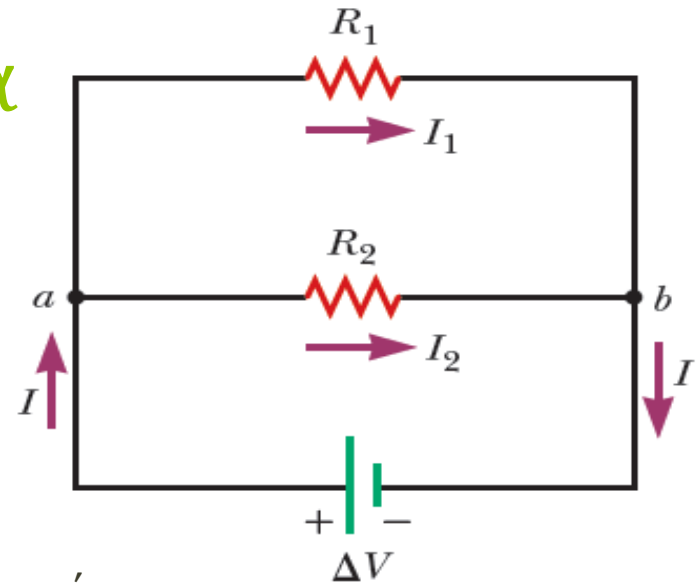
$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

- Γενικότερα

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Πυκνωτές

- Σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

- Σε παραλληλία:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

## Αντιστάτες

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Quiz:

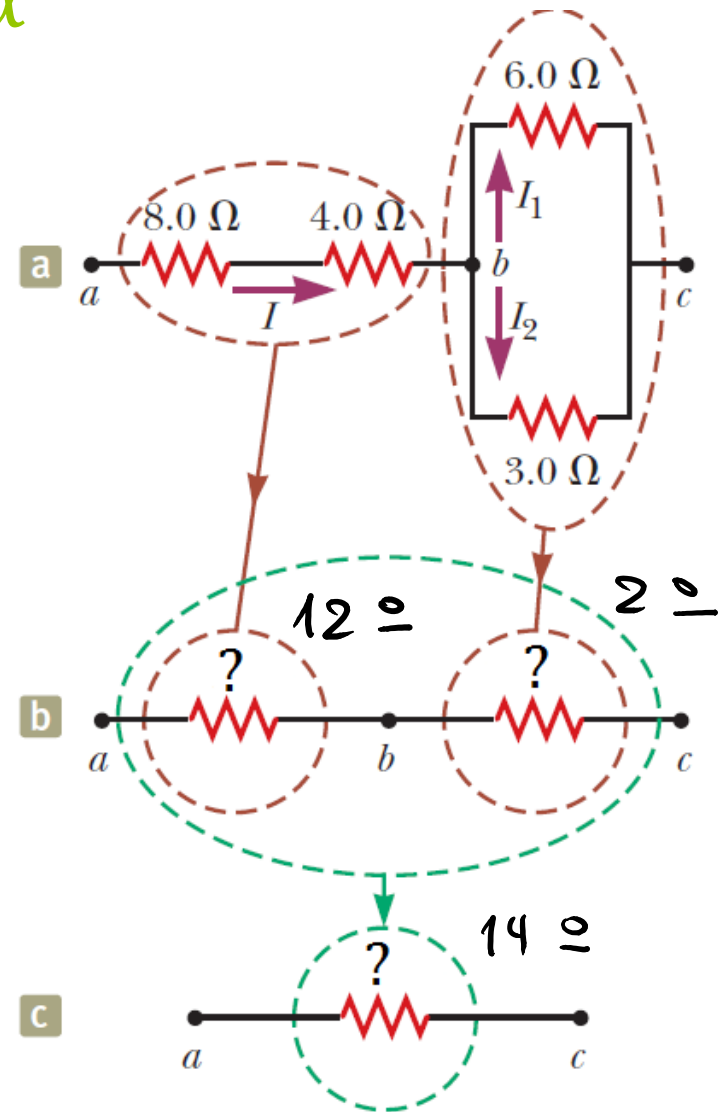
Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση

Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Οι Κανόνες του Kirchhoff

- Για πιο περίπλοκα κυκλώματα, ακολουθούμε κάποιους κανόνες, του λεγόμενου **κανόνες του Kirchhoff**

- 1. Κανόνας κόμβου:** σε οποιονδήποτε κόμβο, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{κόμβος}} I = 0$$

- Τα ρεύματα που μπαίνουν στον κόμβο έχουν θετικό πρόσημο, ενώ αυτά που βγαίνουν, αρνητικό.
- Εναλλακτικά:

$$I_{in} = I_{out}$$

- 2. Κανόνας βρόχου:** το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε ένα βρόχο πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Οι Κανόνες του Kirchhoff

### 1. Κανόνας κόμβου:

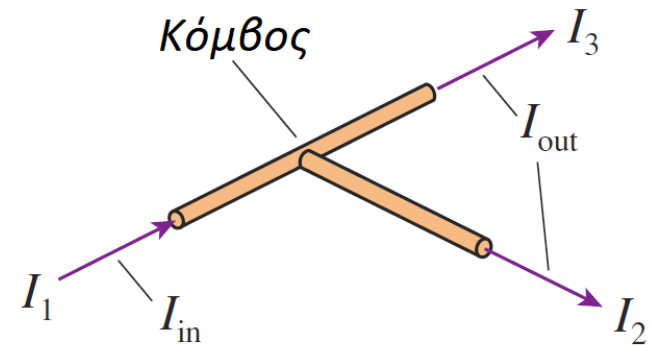
$$I_{in} = I_{out}$$

Προέρχεται από την αρχή διατήρησης του φορτίου

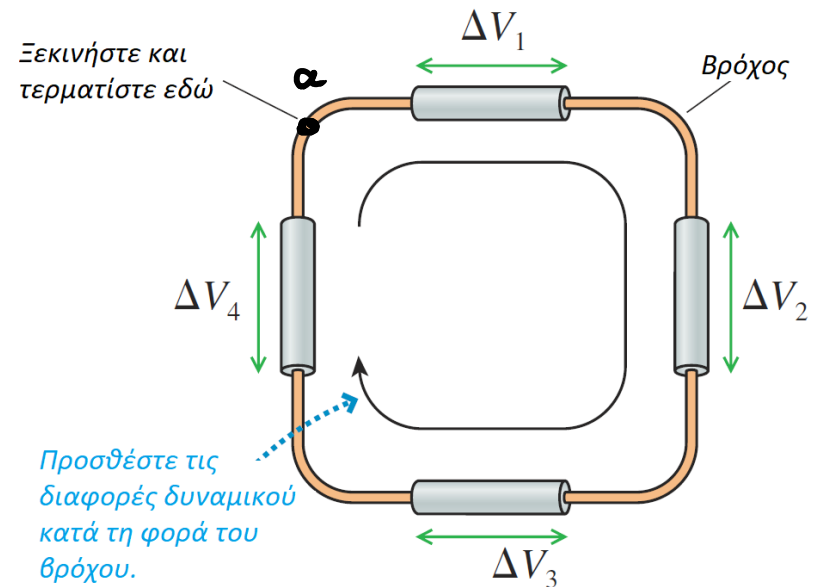
### 2. Κανόνας βρόχου:

$$\sum_{\text{βρόχος}} \Delta V = 0$$

### Προέρχεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας



Κανόνας κόμβου:  $I_1 = I_2 + I_3$



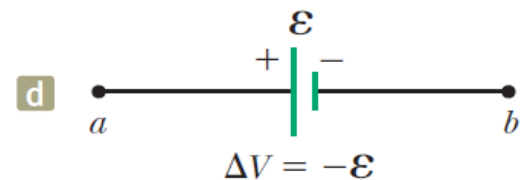
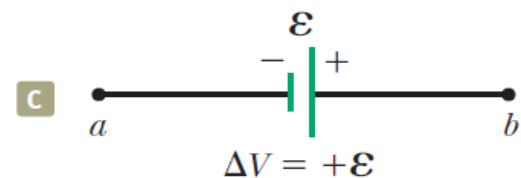
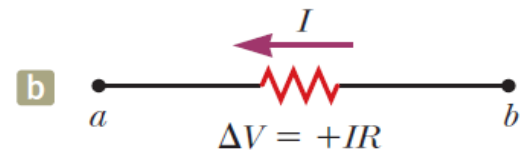
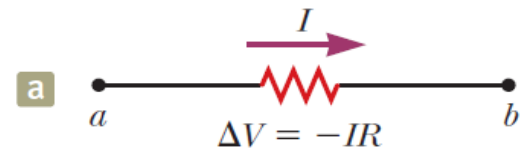
Κανόνας βρόχου:  $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 0$

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Κανόνες προσήμου

- a. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι  $-IR$
- b. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά την αντίθετη φορά του ρεύματος είναι  $+IR$
- c. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι  $+\mathcal{E}$  αν τη διατρέχουμε από τα αρνητικά προς τα θετικά
- d. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι  $-\mathcal{E}$  αν τη διατρέχουμε από τα θετικά προς τα αρνητικά

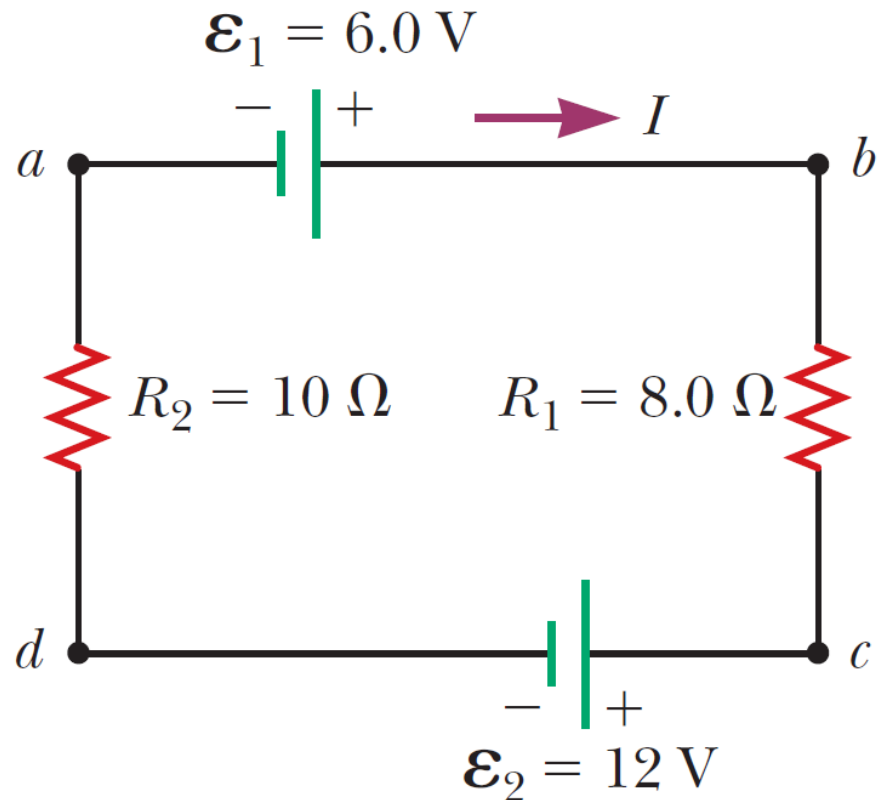
Σε κάθε διάγραμμα,  $\Delta V = V_b - V_a$  και το στοιχείο κυκλώματος διατρέχεται από το a στο b, αριστερά προς δεξιά.



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ● Παράδειγμα:

- Ένα κύκλωμα απλού βρόχου περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές όπως στο σχήμα. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ● Παράδειγμα - Λύση:

- Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

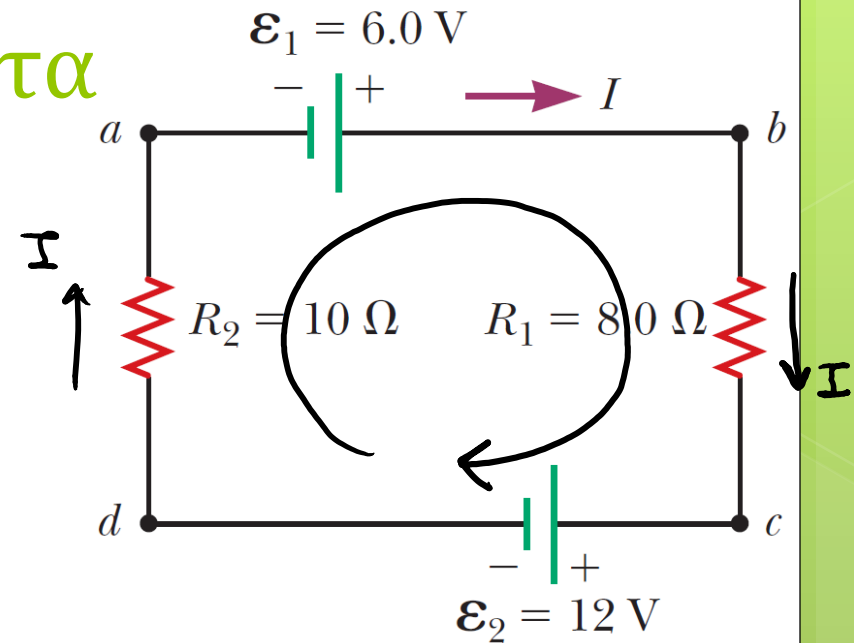
Εφαρμόσαμε το 2<sup>ο</sup> κανόνα

Kirchhoff:

$$\sum_{abcd a} \Delta V = 0 \Rightarrow +\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - I \cdot 8 - 12 - I \cdot 10 = 0 \Leftrightarrow I = -\frac{1}{3} \text{ A}$$

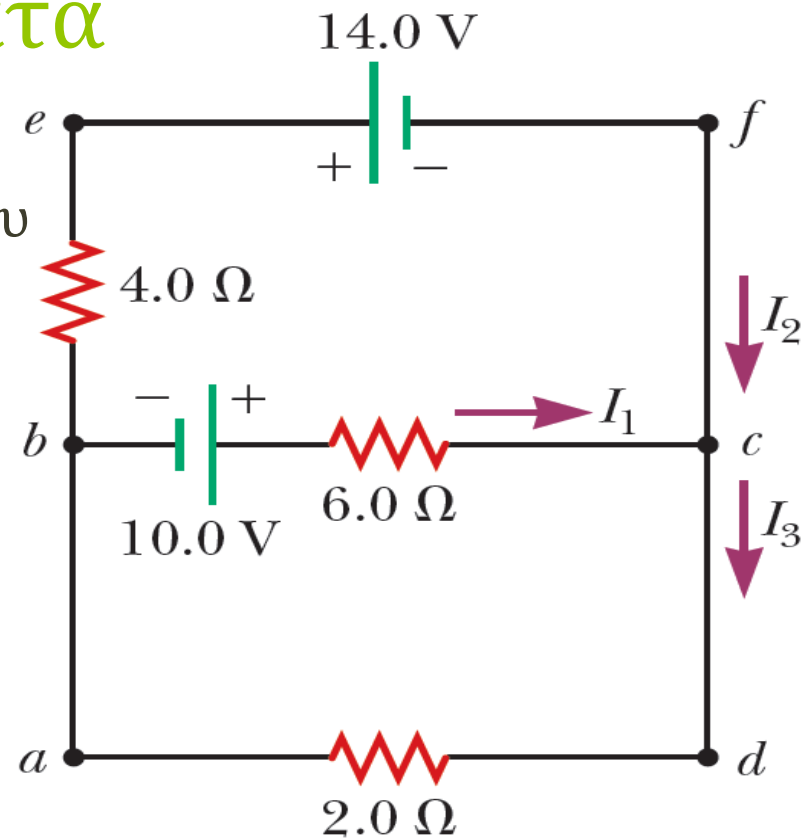
Το "μείον" στο αποτέλεσμα δηλώνει ότι το ρεύμα  $I$  έχει αντίθετη φορά από αυτή που υποθέσαμε.



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ● Παράδειγμα:

- Βρείτε τα ρεύματα  $I_1, I_2, I_3$  του διπλανού κυκλώματος και υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού και την ισχύ που παραδίδεται στα άκρα του αντιστάτη αντίστασης  $2\ \Omega$ .



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## ● Παράδειγμα - Λύση:

Στον κόμβο c, από τον 1<sup>ο</sup> κανόνα Kirchhoff  
θα έχουμε:

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

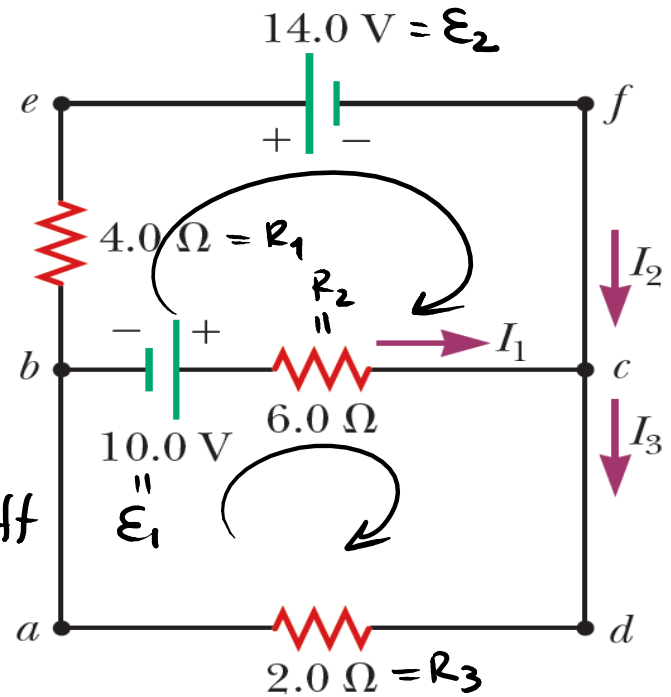
Στο βρόχο abcda, από το 2<sup>ο</sup> κανόνα Kirchhoff  
θα έχουμε:

$$\sum_{ab c d a} \Delta V = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0$$
$$10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \quad (2)$$

Στο βρόχο befcb, από το 2<sup>ο</sup> κανόνα Kirchhoff, θα έχουμε:

$$\sum_{b e f c b} \Delta V = 0 \Leftrightarrow -I_2 R_1 - \mathcal{E}_2 + I_1 R_2 - \mathcal{E}_1 = 0$$
$$-4I_2 + 6I_1 - 24 = 0 \quad (3)$$

Λύνουμε το 3x3 σύστημα για τα  $I_1, I_2, I_3$ :



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

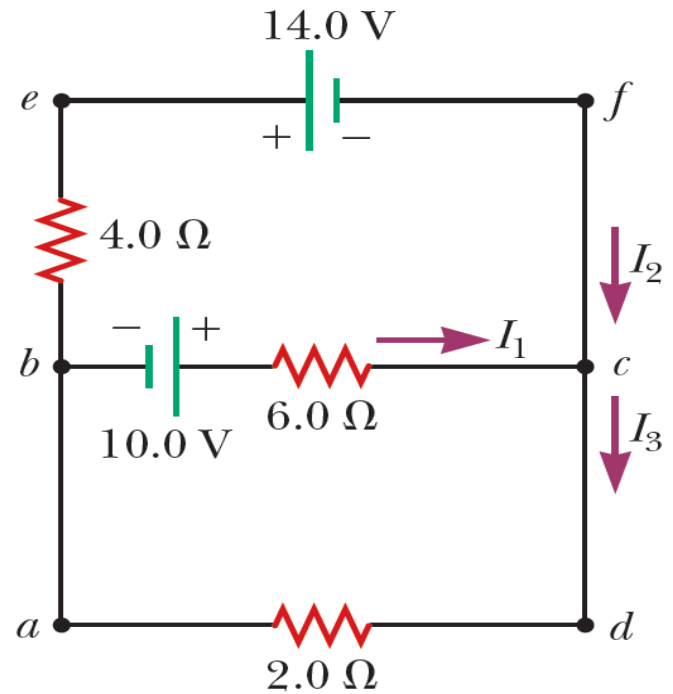
## Παράδειγμα - Λύση:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 6I_1 + 2I_3 - 10 = 0 \\ 6I_1 - 4I_2 - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_1 + I_3 - 5 = 0 \\ 3I_1 - 2I_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 + 2I_2 + 7 = 0 \\ 3I_1 - 2I_2 - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + 2I_2 + 7 = 0 \\ 3I_1 - 2I_2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + 3I_2 = -7 \\ 3I_1 - 2I_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 = -7 - 3I_2 \\ -21 - 11I_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 = -7 - 3I_2 \\ I_2 = -3 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3 = -1 \text{ A} \\ I_1 = 2 \text{ A} \\ I_2 = -3 \text{ A} \end{cases}$$

Άρα  $I_1 = 2 \text{ A}$ ,  $I_2 = -3 \text{ A}$ ,  $I_3 = -1 \text{ A}$  (τα πρόσημα "-" δηλώνουν αντίθετη φορά απ' ότι στο σχήμα)



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

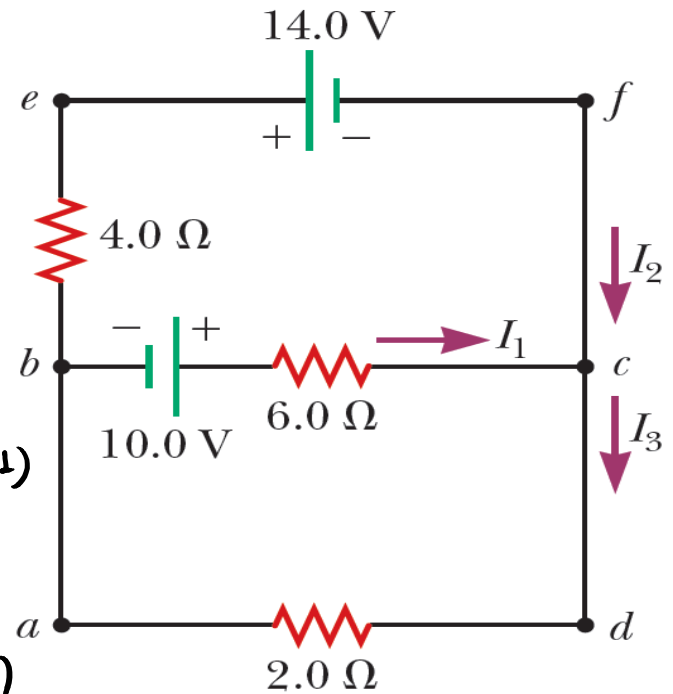
## ● Παράδειγμα - Λύση:

Για όσους ξέρουν αναλογική Gauss :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{+} \\ \text{(-1)} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \text{+} \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \cdot (-3)$$

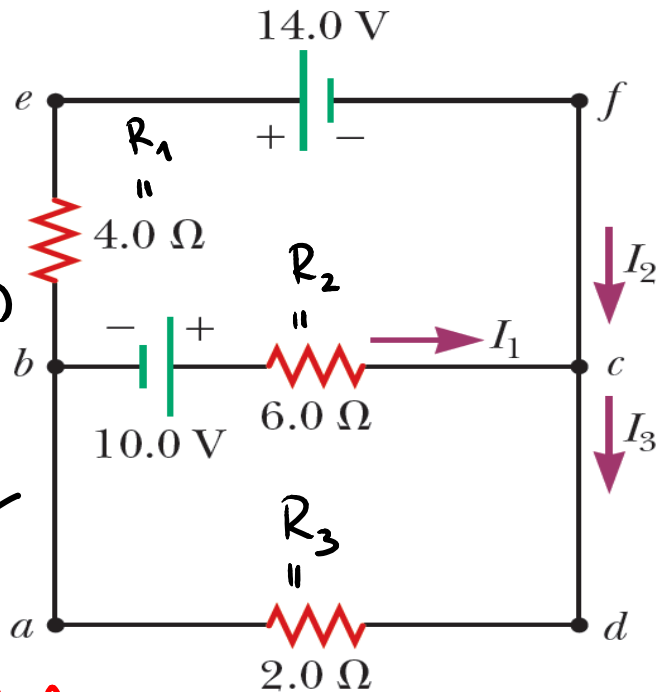
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -3 & 4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \text{+} \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \end{array} \right) \cdot \left( \frac{2}{11} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$



# Ηλεκτρικά Κυκλώματα

## Παράδειγμα - Λύση:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ R_2 \leftarrow R_2 \cdot (-1/2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$



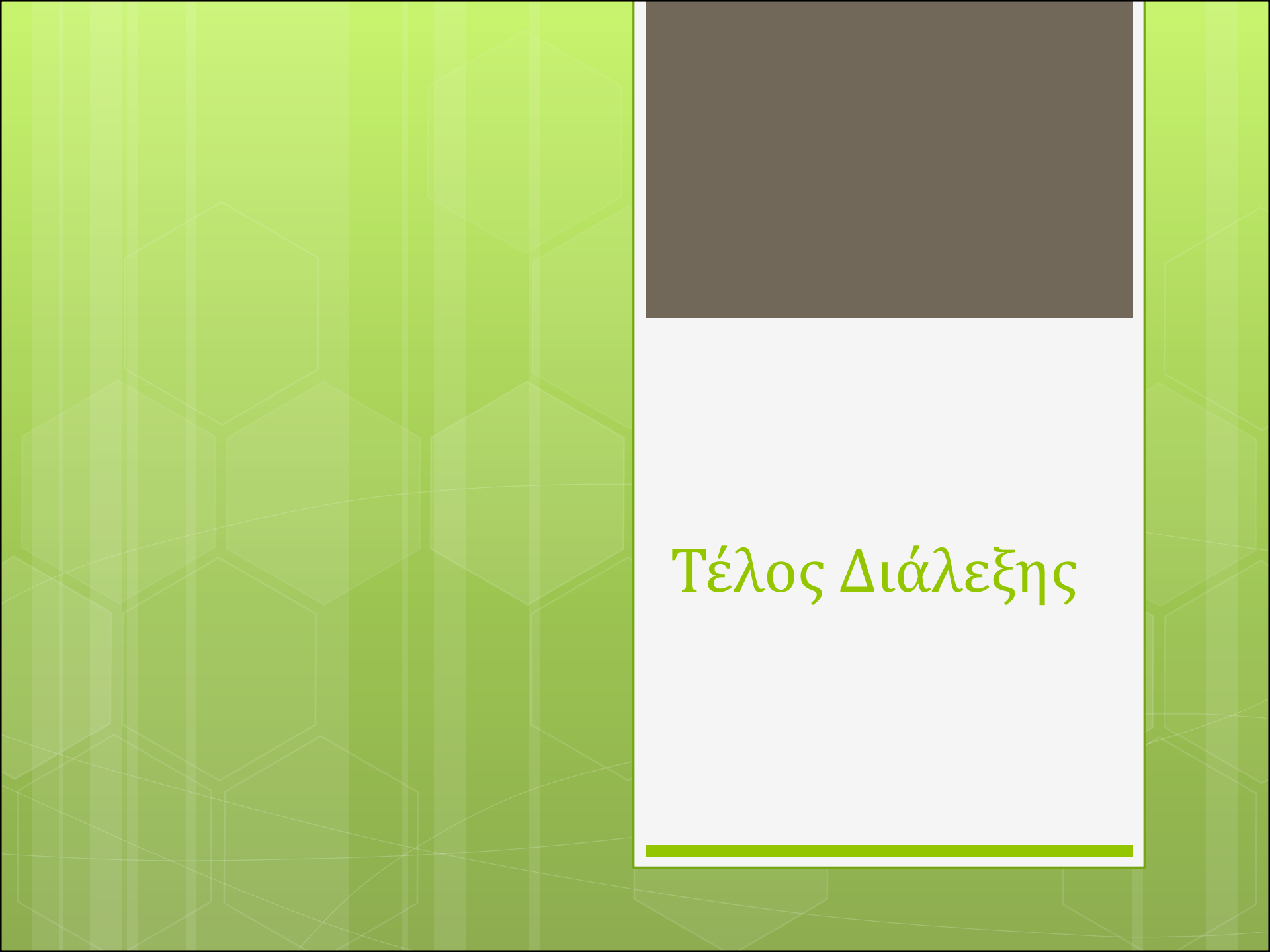
Άρα πράγματι  $I_1 = 2 \text{ A}$ ,  $I_2 = -3 \text{ A}$ ,  $I_3 = -1 \text{ A}$ .

---

Είς το  $\Delta V_{R_3} = V_d - V_a = -I_3 R_3 = -(-1) \cdot 2 = 2 \text{ Volt}$

και  $P_{R_3} = I_3^2 R_3 = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \text{ Watt}$

Εξασκηθείτε βρίσκοντας τα  $\Delta V_i$ ,  $P_{R_i}$  στα αντιστάτες  $R_i$ ,  $i=1,2$ .



Τέλος Διάλεξης