



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

- Συναρτηση θέσης: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- Κυκλική συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
- Συχνότητα: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Στιγμιαία ταχύτητα: $u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$
- Στιγμιαία επιτάχυνση: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$

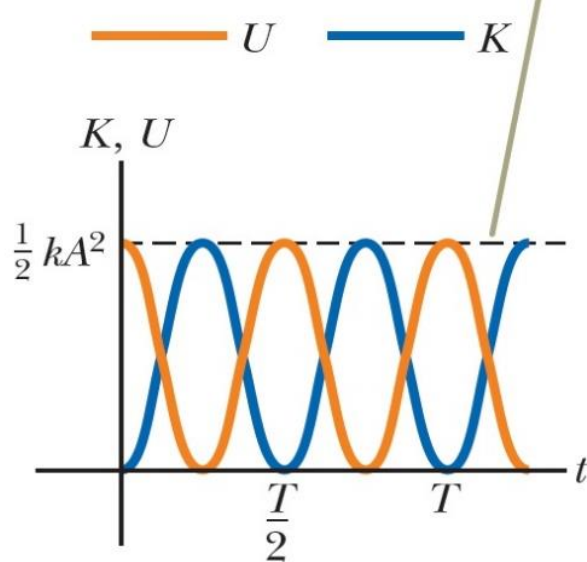
Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

• Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

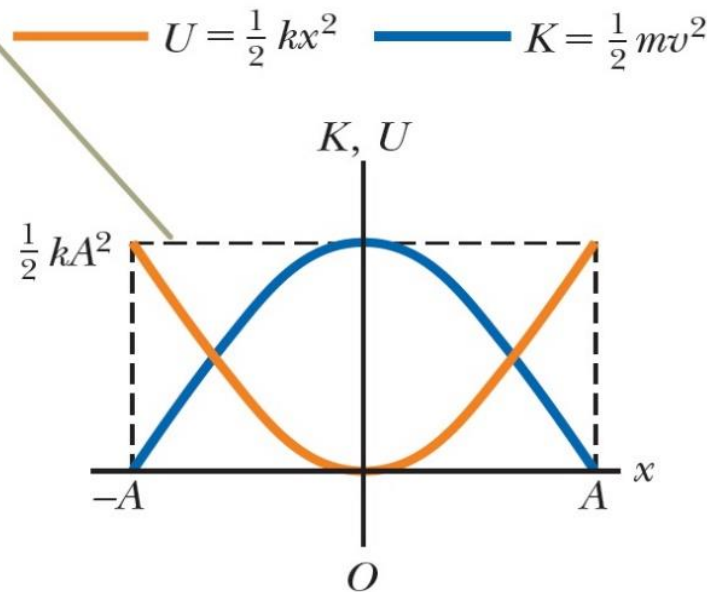
• Μηχανική Ενέργεια $K + U$

$$E_{\text{mech}} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

Το άθροισμα $K + U$ είναι
σταθερό και στα δυο
γραφήματα

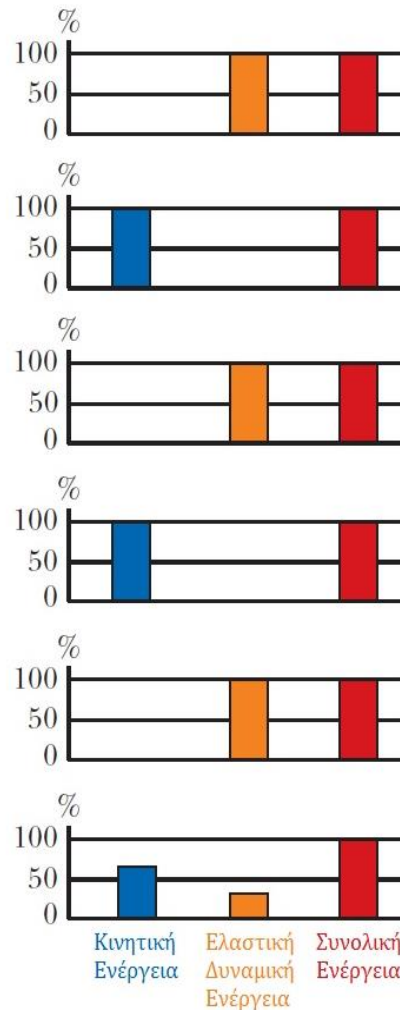
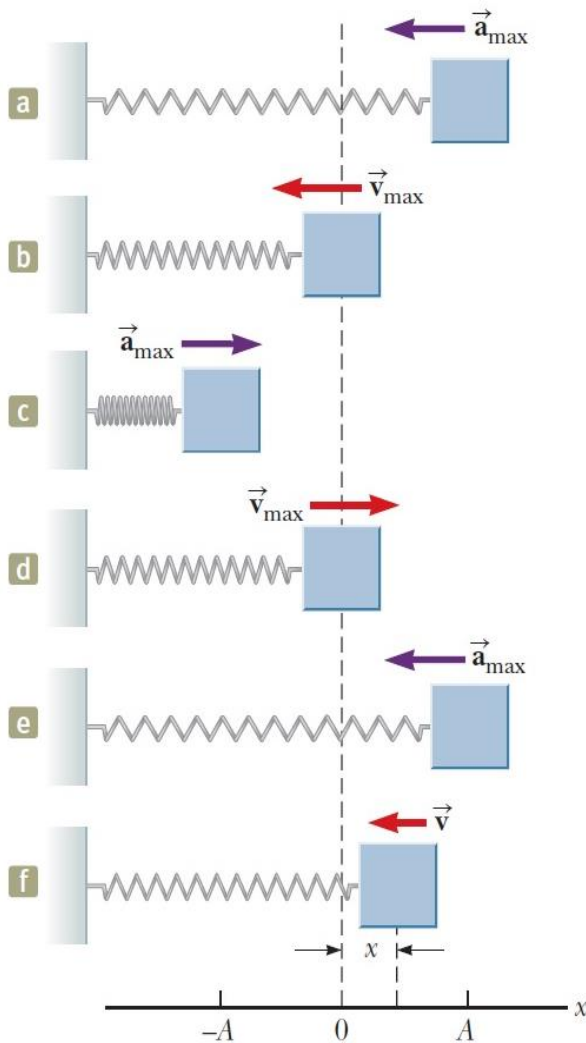


a



b

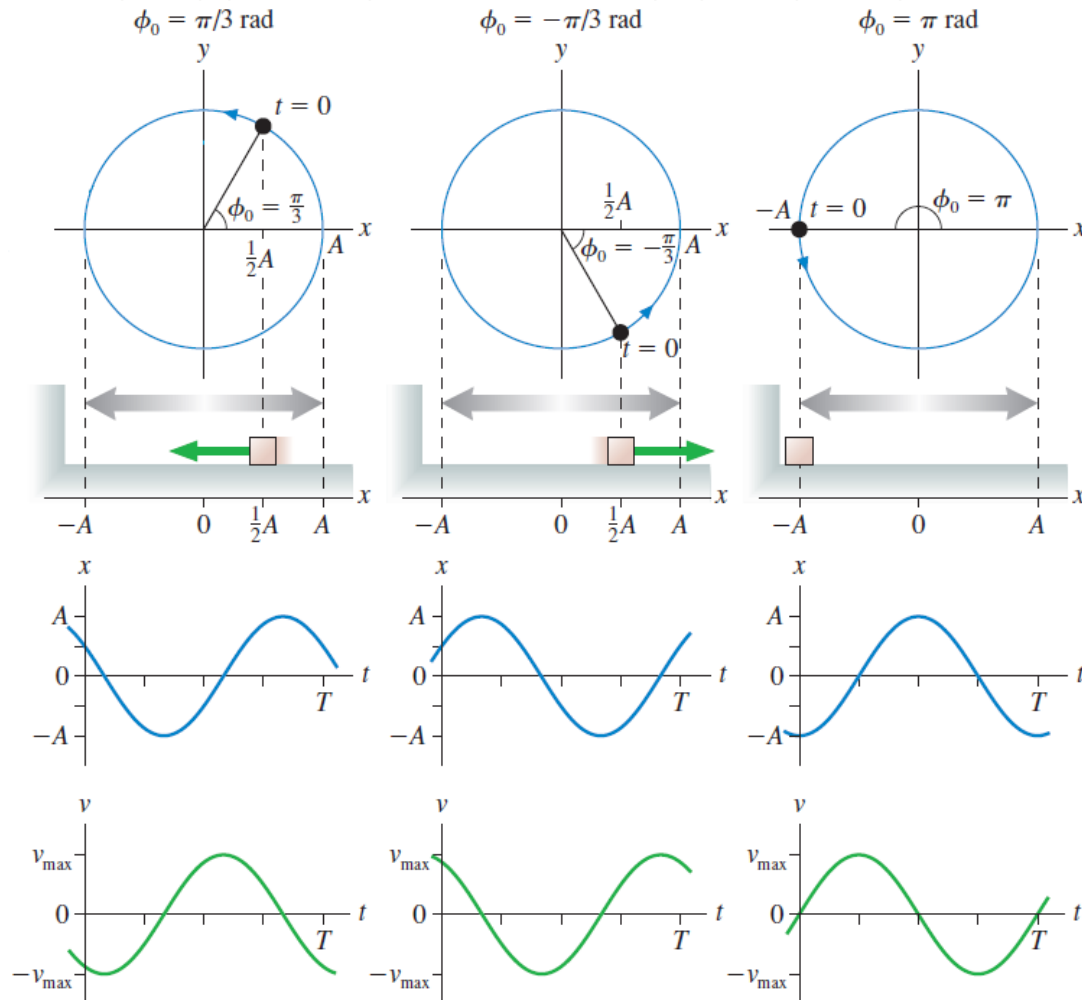
Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$F_{\varepsilon\pi} = ma \Leftrightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Επειδή $s = L\theta$,

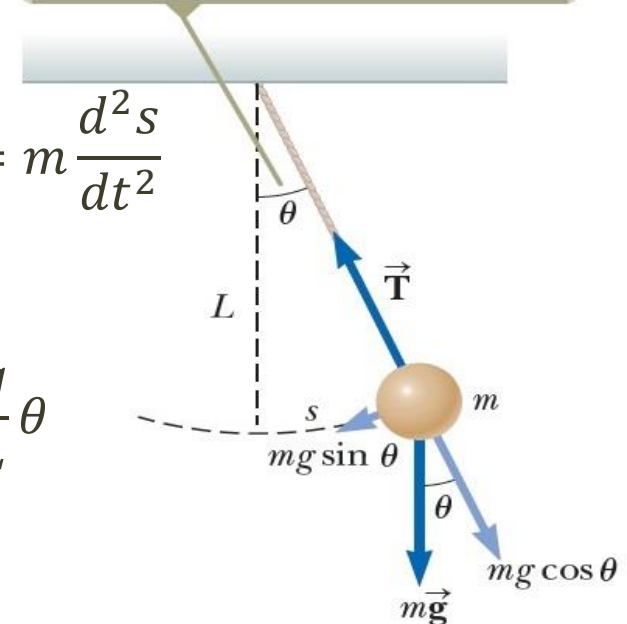
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \approx -\frac{g}{L} \theta$$

όταν θ μικρό.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση
 $\sin(\theta) \approx \theta$

για μικρές τιμές του θ (σε rad)

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
- Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρό θ !

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

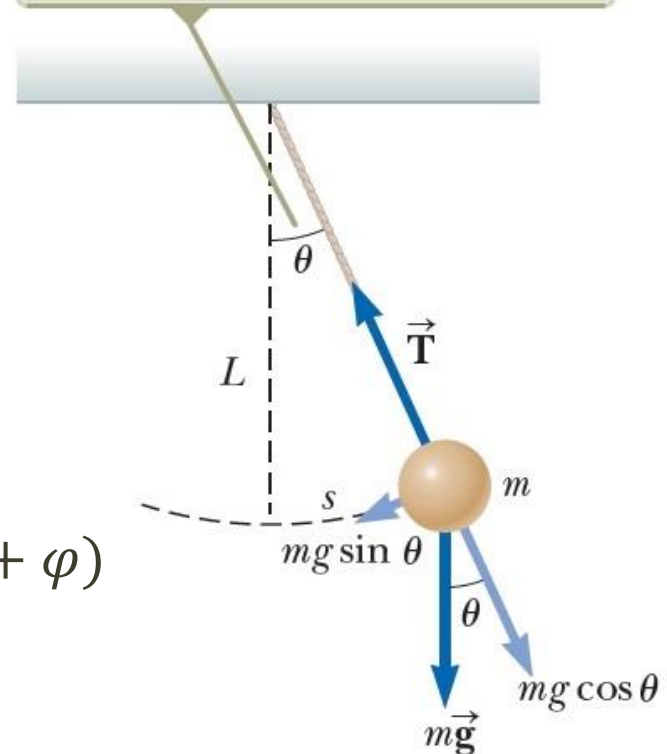
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι φθίνουσα ταλάντωση

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:

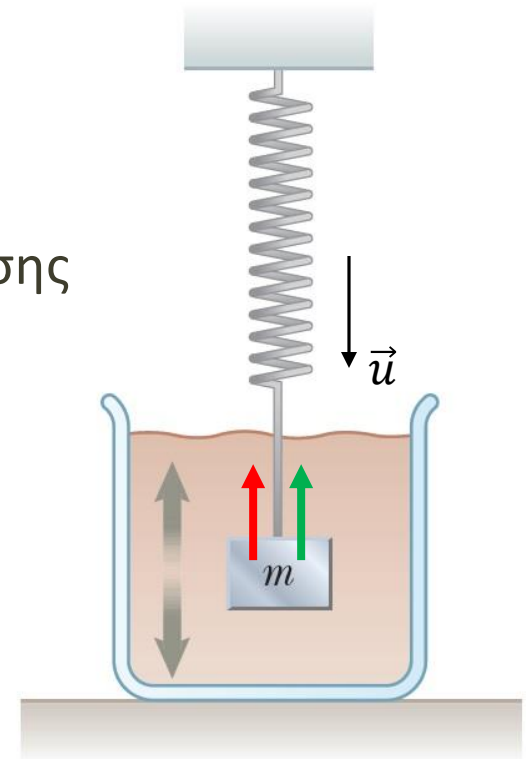
- τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b

- Δρα πάντα **αντίθετα στην ταχύτητα** του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

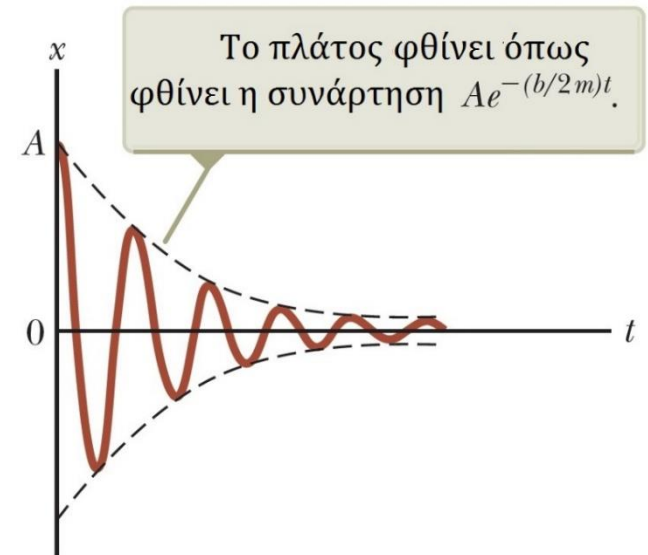
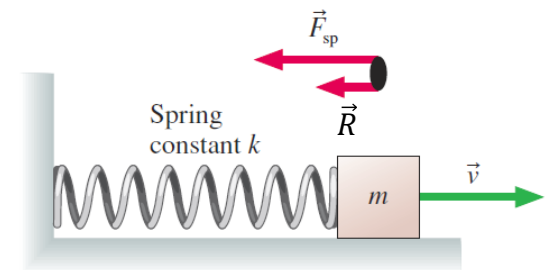
$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (b μικρό):

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Ενναλακτικά,

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

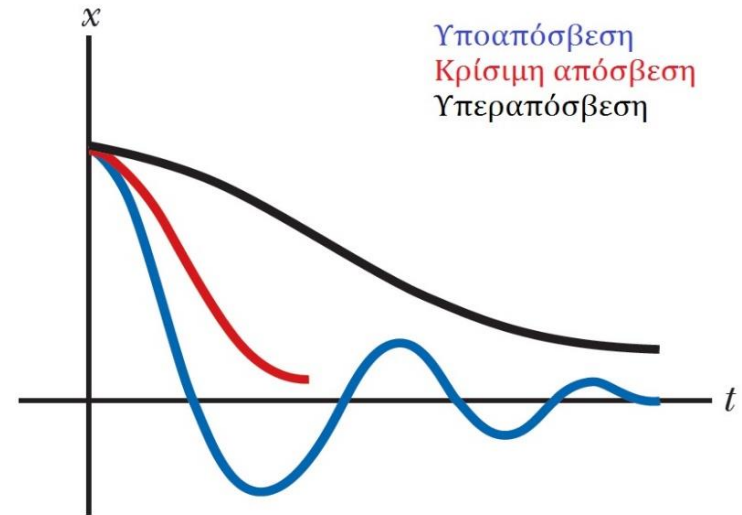
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

- Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

- Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t)$ που βρήκαμε δεν ισχύει.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα:

- Ένα εκκρεμές μήκους 1.00 m αφήνεται ελεύθερο από αρχική γωνία $\theta_i = 15$ μοιρών. Μετά από 1000 s, το πλάτος ταλάντωσής του έχει μειωθεί σε $\theta(1000) = 5.5$ μοίρες. Ποια είναι η τιμή του $b/2m$?

Ξέρουμε ότι στη φθίνουσα ταλάντωση ισχύει

$$A(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Απο εξομύνηση, έχουμε:

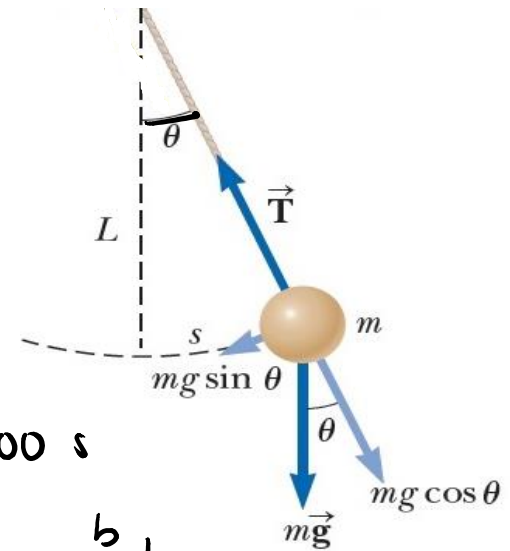
$$A(0) = A e^0 = A \rightarrow \text{αρχικό πλάτος}$$

$$A(1000) = A e^{-\frac{b}{2m} \cdot 1000} \rightarrow \text{πλάτος μετά από 1000 s}$$

Επίσης,

$$\vartheta(t) = \underbrace{\vartheta_i e^{-\frac{b}{2m}t}}_{\theta(t)} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 15^\circ e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$\theta(t)$ είναι το "πλάτος" ταλάντωσης σε μοίρες



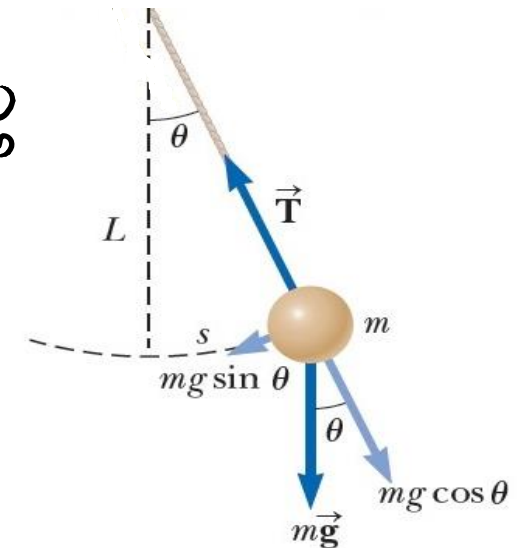
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα:

- Ένα εκκρεμές μήκους 1.00 m αφήνεται ελεύθερο από αρχική γωνία $\theta_i = 15$ μοιρών. Μετά από 1000 s, το πλάτος ταλάντωσής του έχει μειωθεί σε $\theta(1000) = 5.5$ μοίρες. Ποια είναι η τιμή του $b/2m$?

$$\begin{aligned} \text{Σίμ} \quad \theta(0) &= 15^\circ \cdot e^{-\frac{b}{2m} \cdot 0} = 15^\circ \\ \theta(1000) &= 15^\circ \cdot e^{-\frac{b}{2m} \cdot 1000} = 5.5^\circ \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (:) \\ \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (:) \\ \Rightarrow \quad \frac{\theta(0)}{\theta(1000)} &= \frac{15}{5.5} = \frac{1}{e^{-\frac{1000b}{2m}}} \end{aligned}$$



$$\text{Λρα} \quad 15 e^{-\frac{1000b}{2m}} = 5.5 \Leftrightarrow e^{-\frac{1000b}{2m}} = \frac{5.5}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{-\frac{1000b}{2m}} = \ln \left(\frac{5.5}{15} \right) \approx -1 \Rightarrow -\frac{1000b}{2m} \approx -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b/2m \approx 10^{-3}}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- ◉ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης επιβράδυνσης
 - ◉ Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
 - ◉ Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την ταλάντωσή του
 - ◉ Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
 - ◉ Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα

- ◉ Εξωτερική δύναμη διέγερσης: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$

- ◉ Τότε

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- $\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$
- Λύση (σταθερή κατάσταση):

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

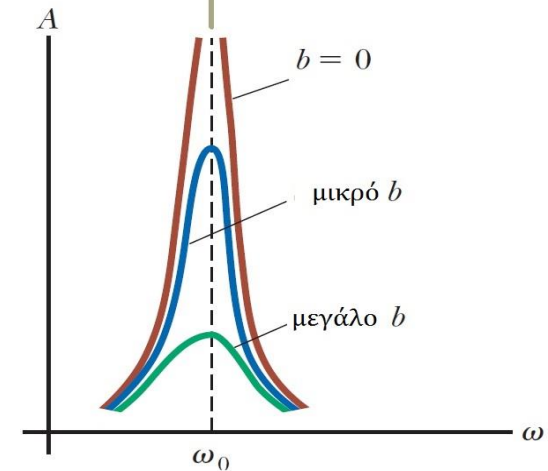
με

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το A γίνεται πολύ μεγάλο

ω_0 : συχνότητα συντονισμού

Όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Μηχανική:



a



b

© Topham/The Image Works

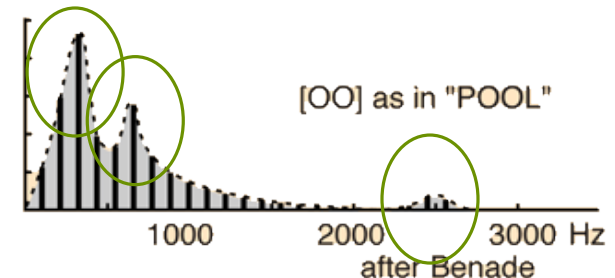
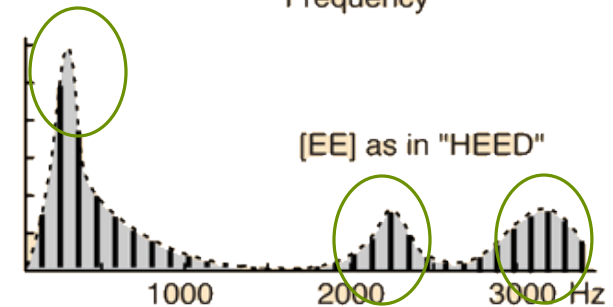
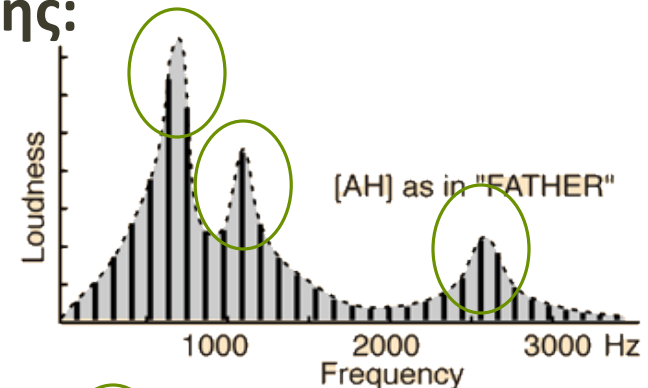
- ο Ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

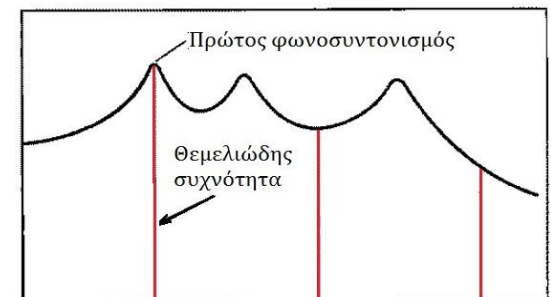
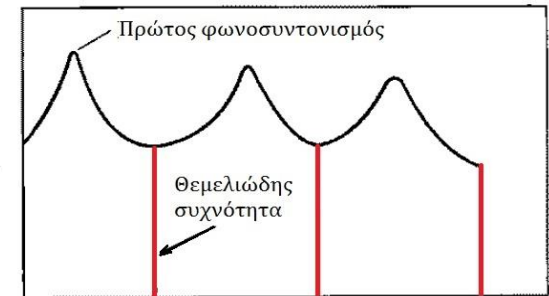
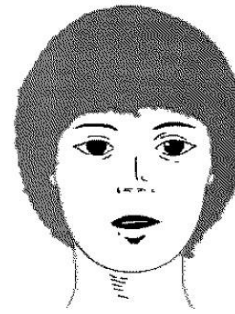
- Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα διαφορετικά φωνήματα
 - /ου/, /α/, /ι/
- Φωνοσυντονισμός (formant)
 - Υψηλά πλάτη σε περιοχές συγκεκριμένων συχνοτήτων



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

- ο Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
- ο Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων 2500-3000 Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα





Εικόνα: Ναυαγοςώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα



Εικόνα: Ναυαγοςώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
 - Μηχανικά & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα **μέσο διάδοσης**
- Θα μελετήσουμε πρώτα τα μηχανικά κύματα
 - (Πολύ) ...αργότερα τα ηλεκτρομαγνητικά
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
 - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
 - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί δεξιά-αριστερά και πάνω-κάτω αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας
 - **Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!**

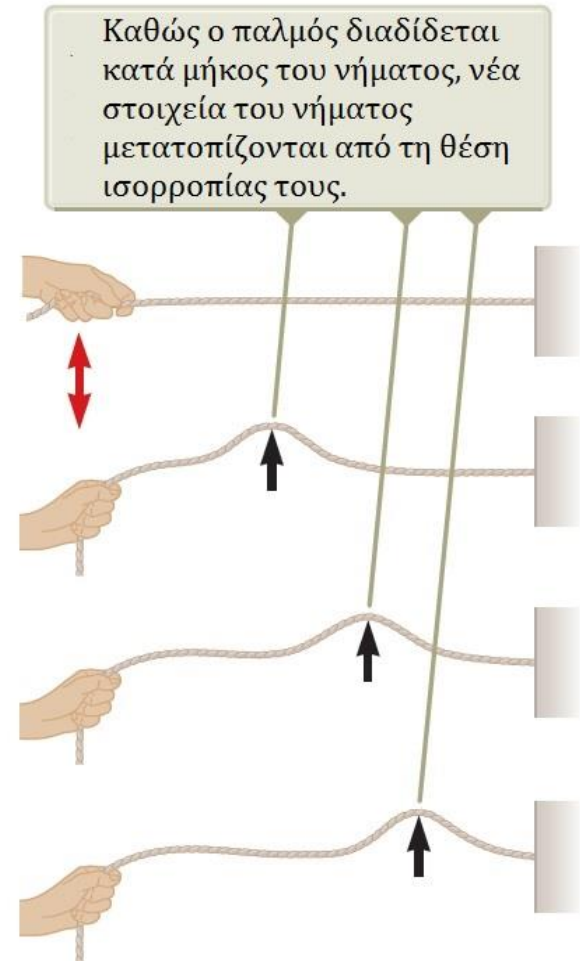
Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν

- **A)** Κάποια πηγή διαταραχής
- **B)** Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- **Γ)** Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

- Κίνηση κύματος

- Παλμός = διαταραχή
- Σχήμα σχεδόν απaráλλαχτο
- Ύψος και ταχύτητα παλμού
 - Ύψος == κατακόρυφη μετατόπιση



Κύματα

- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος

- Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης

- *Εγκάρσιο κύμα*

- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου

- Είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης

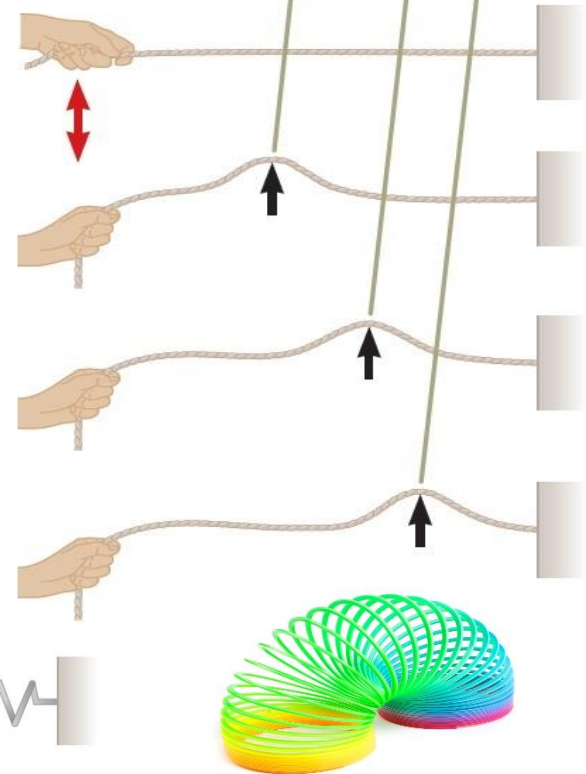
- *Διάμηκες κύμα*

Το χέρι κινείται γρήγορα μπρος-πίσω μια φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.



Καθώς ο παλμός διαδίδεται κατά μήκος του νήματος, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας τους.

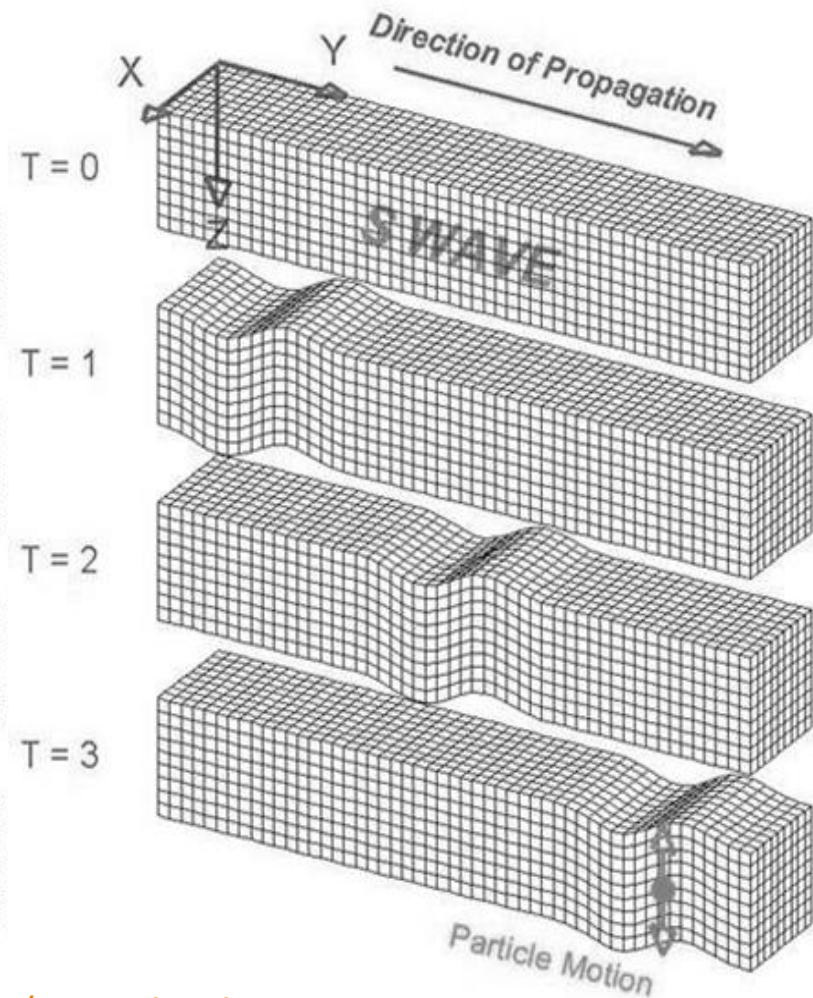
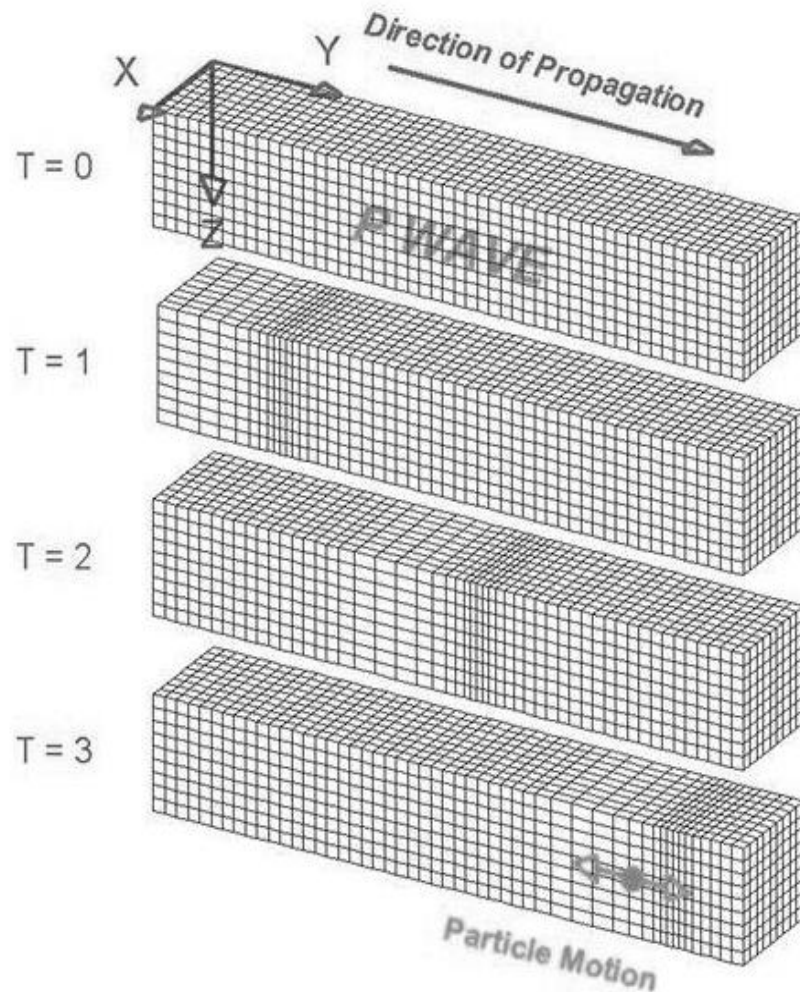


Κύματα



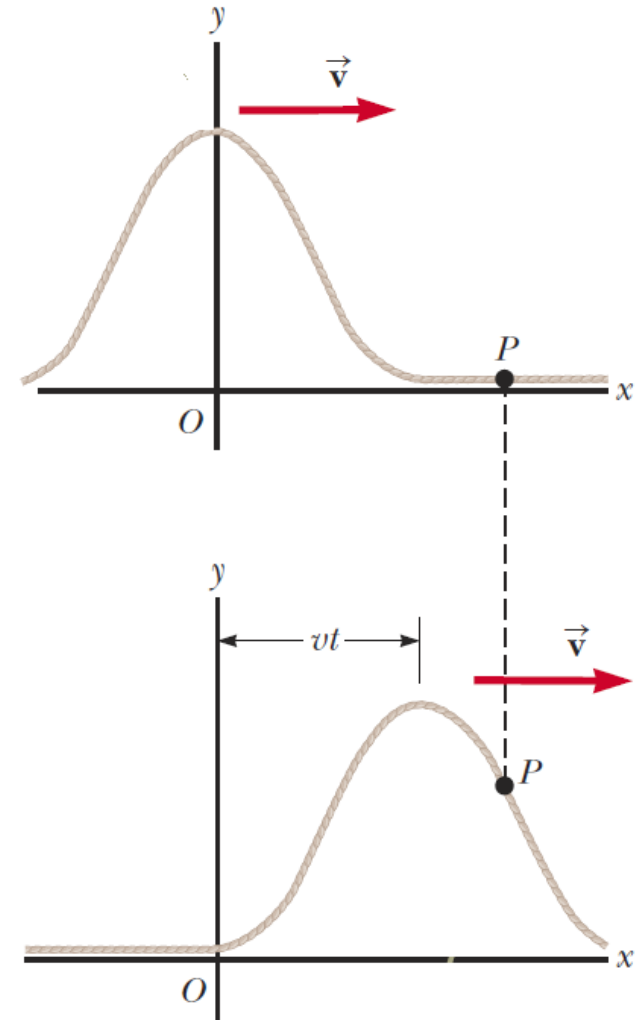
Κύματα

Σεισμικά Κύματα

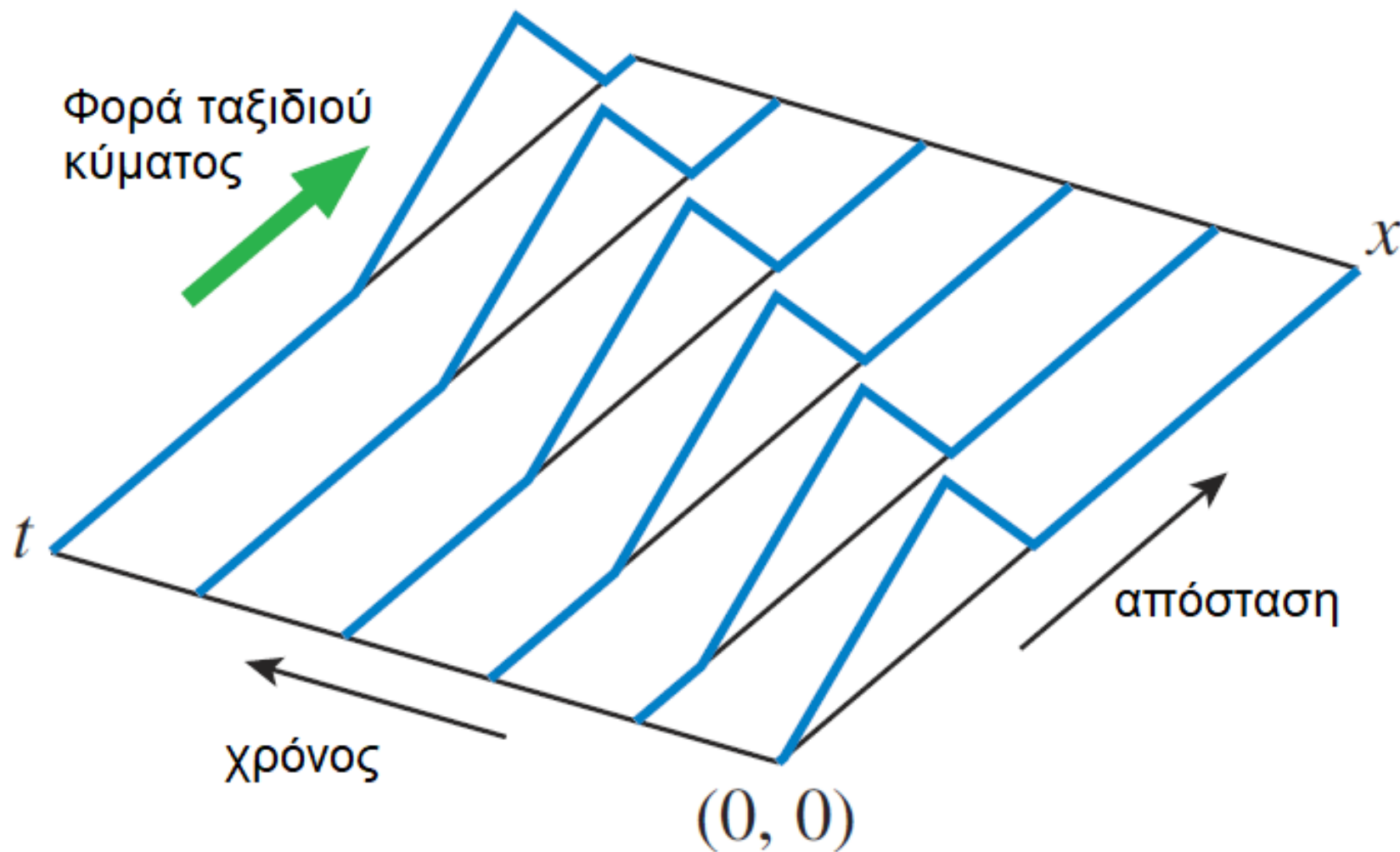


Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Μετατόπιση y του στοιχείου ενός κύματος ως προς τη θέση του x τη χρονική στιγμή t
 - $y(x, t) = f(x - ut, t)$ → κίνηση προς τα δεξιά
 - $y(x, t) = f(x + ut, t)$ → κίνηση προς τα αριστερά
 - όπου u η ταχύτητα του παλμού
- Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «φωτογραφία» του όλου κύματος για μια χρονική στιγμή
- Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση ενός στοιχείου του κύματος με την πάροδο του χρόνου



Κύματα



Κύματα

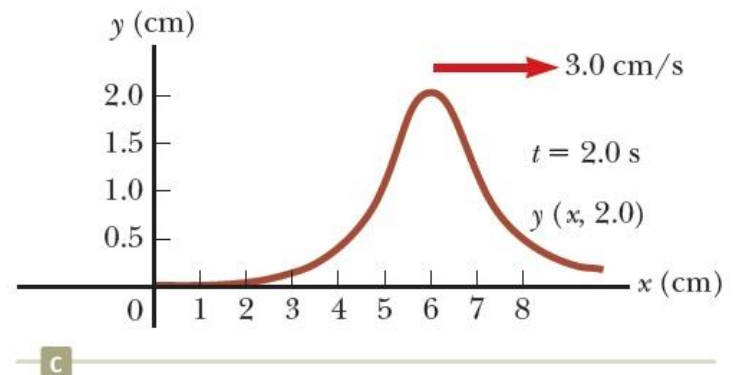
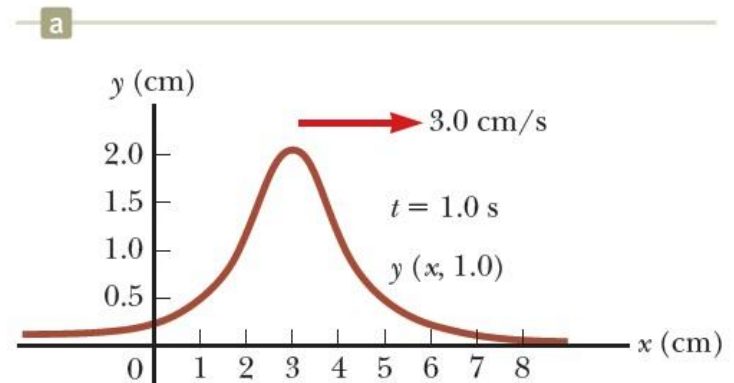
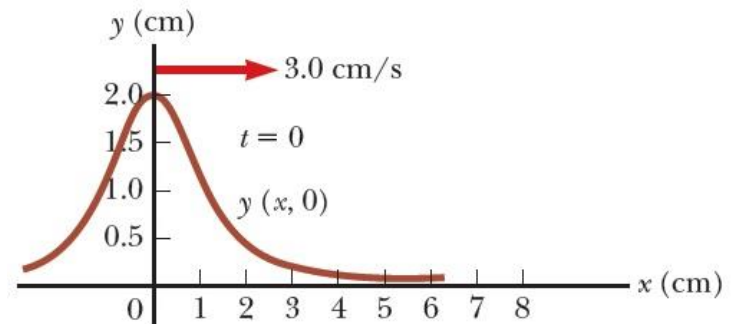
◉ Παράδειγμα:

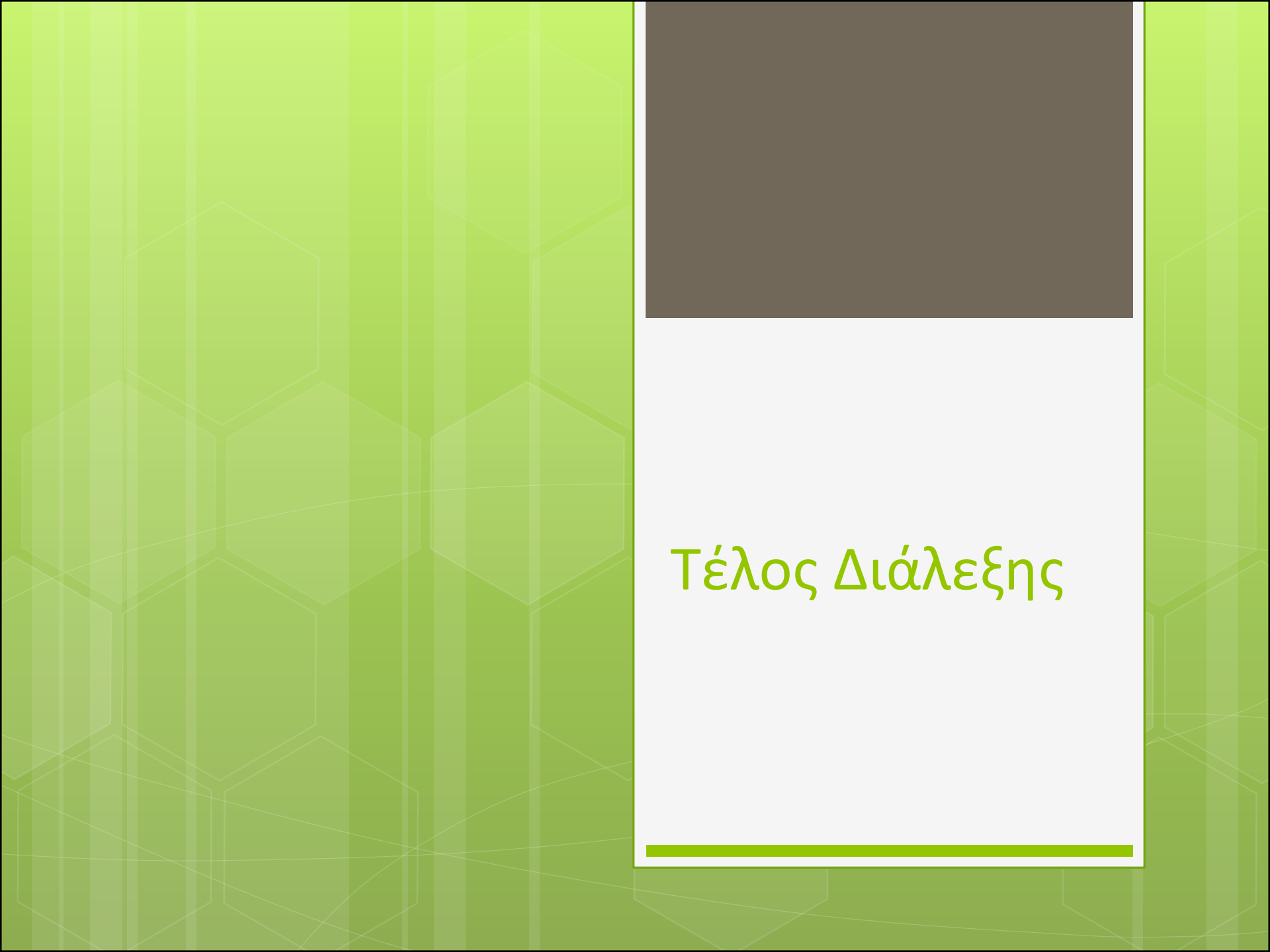
- ◉ Έστω ένα παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

- ◉ Παλμοί για $t = 0, 1, 2$





Τέλος Διάλεξης

