



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

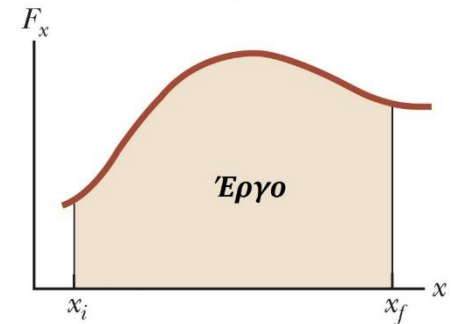
Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη...)

- Το **έργο** W που παράγεται σε σύστημα από δύναμη που ασκείται σε αυτό ορίζεται ως

$$W \equiv F \Delta r \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

- Έργο δύναμης μεταβαλλόμενου μέτρου  σε ευθεία γραμμή



- Έργο δύναμης ελατηρίου:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο W_{ext} και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητάς του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος:

$$K_f = K_i + W_{ext}$$

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη...)

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

$$U_g = mgy$$

- Ελαστική Δυναμική ενέργεια

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

- Εσωτερική ή θερμική ενέργεια

$$\Delta E_{int} = f_k \Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος (επανάληψη...)

- **Συντηρητικές δυνάμεις:**

1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
2. Το έργο που παράγεται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

- Άθροισμα της κινητικής K και της δυναμικής ενέργειας U ενός συστήματος = **μηχανική ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

- **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ**

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνο αν στο σύστημα δρουν αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις!

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα πολυμελές σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας **εσωτερικής συντηρητικής δύναμης**, W_{int}
 - Ένα σώμα από τα μέλη του κινείται από μια θέση i σε μια θέση f
 - Μεταβλήθηκε (αυξήθηκε) η κινητική του ενέργεια
 - Πρέπει ισόποσα να μεταβληθεί (μειωθεί) η δυναμική του ενέργεια
 - ...λόγω Α.Δ.Μ.Ε!

$$W_{int} = \Delta K = -\Delta U = U_i - U_f$$

- Το έργο W_{int} που παράγεται από μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα σώμα που είναι μέλος ενός συστήματος** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας
 - Δηλ. με τη διαφορά της αρχικής τιμής της δυναμικής ενέργειας του συστήματος μείον την τελική τιμή τής
- **Προσοχή!** Το έργο αυτό παράγεται από μια δύναμη **ενός σώματος του συστήματος σε ένα άλλο μέλος του συστήματος!**

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια **εσωτερική συντηρητική δύναμη F**
- Έστω ότι αυτή η δύναμη προκαλεί αλλαγή της διάταξης του συστήματος λόγω της κίνησης ενός από τα σώματα επάνω στο $x'x$ άξονα
 - Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα
- Το έργο της δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός):

$$W_{int} = F\Delta x \cos \theta = F_x \Delta x = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Εναλλακτικά,

$$\Delta U = -W_{int} = -F_x \Delta x$$

- Άρα η ΔU είναι αρνητική όταν η $\vec{F}_x$ και η μετατόπιση $\vec{\Delta x}$ είναι προς την **ίδια** κατεύθυνση

- $F_x \Delta x > 0 \Rightarrow -F_x \Delta x = \Delta U < 0$

- Αντίστοιχα, θα είναι θετική όταν η $\vec{F}_x$ και η μετατόπιση $\vec{\Delta x}$ είναι προς **αντίθετες** κατευθύνσεις

- $F_x \Delta x < 0 \Rightarrow -F_x \Delta x = \Delta U > 0$

- Όταν ένα σώμα μετακινείται σε ένα βαρυτικό πεδίο
 - Σύστημα Γη-σώμα: εσωτερική δύναμη == δύναμη βαρύτητας
- Όταν ένα ελατήριο σπρώχνει ένα σώμα προς τη θέση ισορροπίας του
 - Σύστημα ελατήριο-σώμα: εσωτ. δύναμη == δύναμη ελατηρίου

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρώντας ότι η μετατόπιση του σώματος Δx είναι απειροστά μικρή, μπορούμε να πούμε ότι και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ΔU είναι απειροστά μικρή

$$\Delta U = -F_x \Delta x \Rightarrow dU = -F_x dx$$

- Έτσι

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**

Ενέργεια Συστήματος

◉ Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)

- ◉ Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
 - ◉ Παραδείγματα:
 - ◉ Σύστημα σώματος-ελατηρίου
 - ◉ Σύστημα μπίλιας-κυρτού μπώλ-Γης

◉ Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)

- ◉ Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια μια δύναμη που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
 - ◉ Παραδείγματα:
 - ◉ Σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια
 - ◉ Σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου

◉ Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)

- ◉ Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
 - ◉ Παράδειγμα:
 - ◉ Σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους
 - ◉ Σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

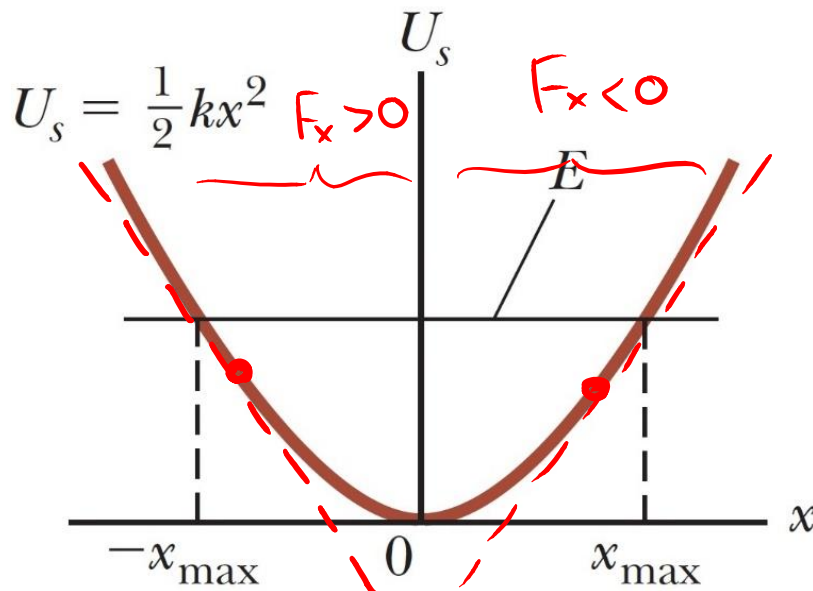
Ενέργεια Συστήματος

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

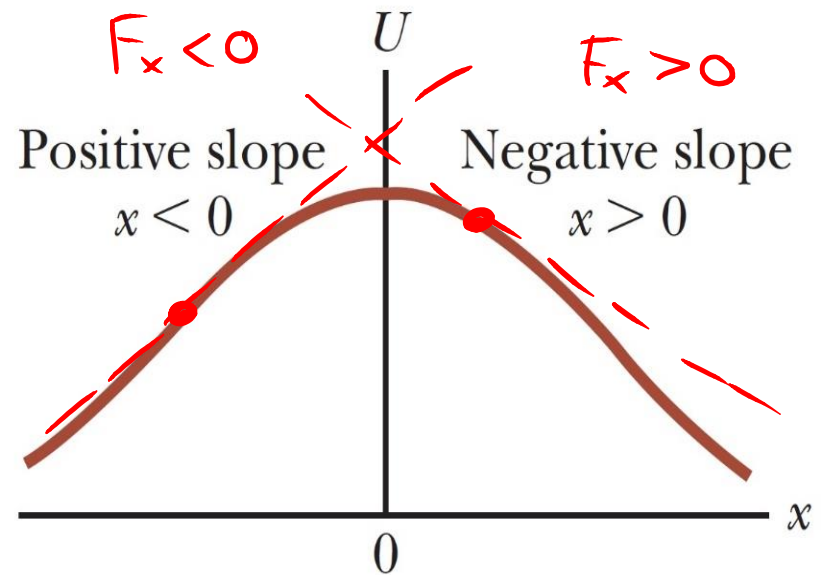
- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος

- Παραδείγματα:

Ευσταθής ισορροπία.

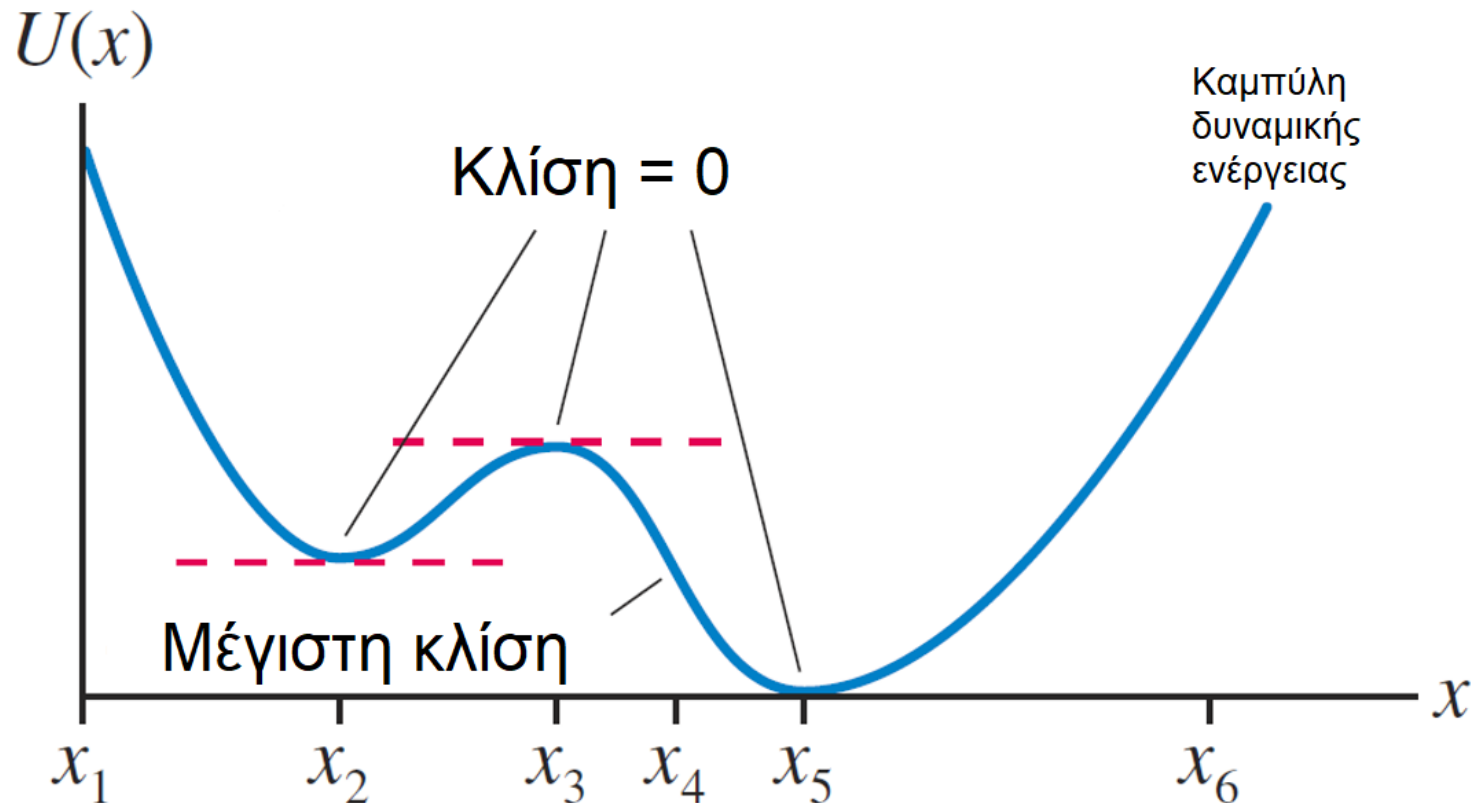


Αστάθης ισορροπίας



Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές** ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης ισορροπίας



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**

- Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(\lambda x)$ με $\lambda = 2 \text{ rad/m}$ και x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
 - α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.
 - β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα:

- Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(\lambda x)$ με $\lambda = 2 \text{ rad/m}$ και x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

Γνωρίζω ότι οι θέσεις ισορροπίας είναι για $F_x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{— " —} \quad F_x &= -\frac{dU}{dx} = -(x + \sin(2x))' = -(1 + 2x)' \cos 2x \\ &= -1 - 2\cos(2x). \end{aligned}$$

$$\text{Λέω} \quad F_x = 0 \Leftrightarrow -1 - 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{Οπότε} \quad 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Στο διάστημα } [0, \pi] : x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Ενέργεια Συστήματος

● Παράδειγμα:

- Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(\lambda x)$ με $\lambda = 2 \text{ rad/m}$ και x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Μια ρύση είναι η φερόμενη συνάρτηση της $U(x)$, μέσω της $U'(x)$.

Ένας άλλος τρόπος εφελόκευ της $\frac{d^2 U(x)}{dx^2}$. Υπολογίζουμε τις ποσότητες :

$$\frac{d^2 U\left(\frac{n}{3}\right)}{dx^2} \quad \text{και} \quad \frac{d^2 U\left(\frac{2n}{3}\right)}{dx^2} \quad \text{έχουμε} \quad U''(x) = (1 + 2\cos(2x))'$$

$$= -4\sin(2x). \quad \text{Άρα} \quad U''\left(\frac{n}{3}\right) = -4\sin\left(\frac{2n}{3}\right) < 0 \sim \text{τοπικό μέγιστο ασταθές}$$

$$U''\left(\frac{2n}{3}\right) = -4\sin\left(\frac{4n}{3}\right) > 0 \sim \text{τοπικό ελάχιστο ευσταθές}$$



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας



Εικόνα: Η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική κατά την ολίσθηση ενός παιχνιδιού σε μια πλατφόρμα. Μπορούμε να αναλύσουμε τέτοιες καταστάσεις με τις τεχνικές που θα δούμε σε αυτή τη διάλεξη.

Φυσική για Μηχανικούς

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε τρεις μεθόδους αποθήκευσης ενέργειας σε ένα σύστημα
 - **Κινητική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με την κίνηση των μελών του συστήματος
 - **Δυναμική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με τη διάταξη του συστήματος
 - **Εσωτερική ενέργεια**
 - Σχετίζεται με τη θερμοκρασία του συστήματος

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**

- Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
 - Εξωτερική δύναμη αλλάζει μέσω έργου την κινητική ενέργεια ενός σώματος
- Προς το παρόν, έχουμε δει μόνο το έργο ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
- Φυσικά, υπάρχουν κι άλλοι τρόποι...

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενέργεια μεταφέρεται
στο σώμα μέσω
έργου.

© Cengage Learning/George Sample



a

Ενέργεια μεταφέρεται
εκτός του ραδιοφώνου
από το μεγάφωνο ως
μηχανικά κύματα.

© Cengage Learning/George Sample



b

Ενέργεια μεταφέρεται
στη λαβή του
κουταλιού μέσω
θερμότητας.

© Cengage Learning/George Sample



c

Ενέργεια εισάγεται
στο ρεζερβουάρ του
αυτοκινήτου μέσω
μεταφοράς ύλης.

Cocoon/Photodisc/Getty Images



d

Ενέργεια εισάγεται
στο σεσουάρ μέσω
ηλεκτρισμού.

© Cengage Learning/George Sample



e

Ενέργεια εξάγεται από
τη λάμπα με τη μορφή
ηλεκτρομαγνητικής
ακτινοβολίας.

© Cengage Learning/George Sample



f

Διατήρηση της Ενέργειας

- Αν η **συνολική** ενέργεια σε ένα σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει **ΜΟΝΟΝ** αν ενέργεια έχει μεταφερθεί στο περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον από τους προαναφερθέντες μηχανισμούς.

- Διατήρηση της Ενέργειας

$$\Delta E_{system} = \sum T$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και T είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται εκτός συστήματος με κάποιο μηχανισμό

Διατήρηση της Ενέργειας

- Συμβολίζοντας κάθε είδους μηχανισμό

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q + T_{Μηχ.Κυμ.} + T_{Μετ.Υλης} + T_{Ηλ.Μετ.} + T_{Ηλ/Μη.Ακτ.}$$

- Αν

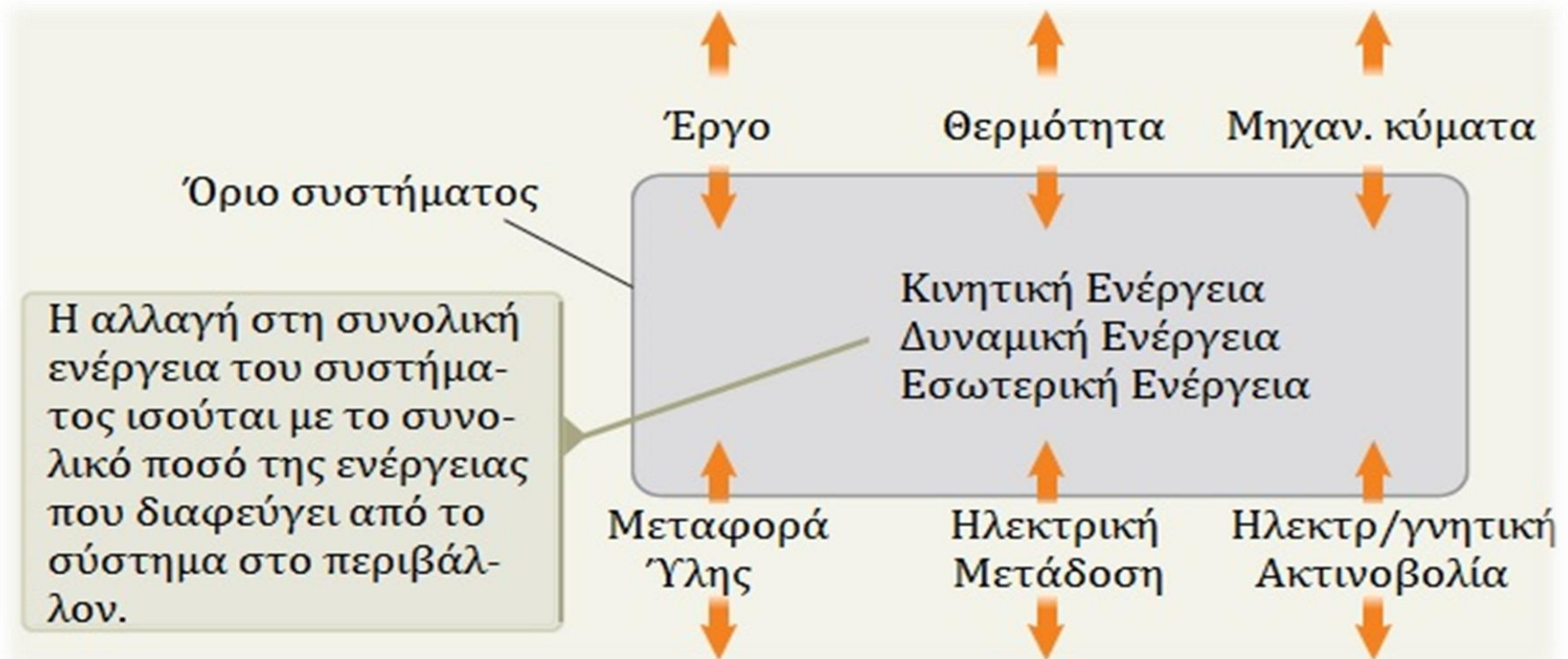
$$W = Q = T_{Μηχ.Κυμ.} = T_{Μετ.Υλης} = T_{Ηλ.Μετ.} = T_{ΗλΜη.Ακτ.} = 0$$

τότε το σύστημα είναι απομονωμένο

- Περισσότερα γι' αυτό, λίγο αργότερα...
- Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας-Έργου

$$\Delta U = \Delta E_{int} = Q = T_{Μηχ.Κυμ.} = T_{Μετ.Υλης} = T_{Ηλ.Μετ.} = T_{Ηλ/Μη.Ακτ.} = 0$$

Διατήρηση της Ενέργειας



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**

- Δεν υπάρχει «διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ**

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνον όταν ασκούνται αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις!

- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

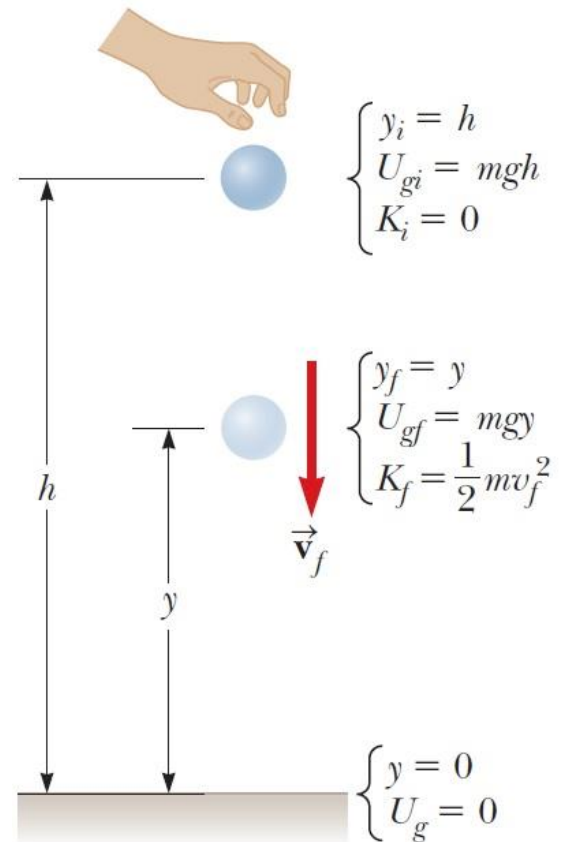
$$\Delta E_{system} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

αν ασκούνται και μη συντηρητικές δυνάμεις, δηλ. σε κάθε περίπτωση!

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
 - ◉ Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y . Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.
 - ◉ Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
- Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y .
Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

Αφού το σύστημα είναι $\{ \text{μπάλα} - \text{Γη} \}$, τότε
το σύστημα είναι ανεξωτερικό. Η δύναμη
 $\vec{B}$ του βόρας είναι εσωτερική και συντηρητική.

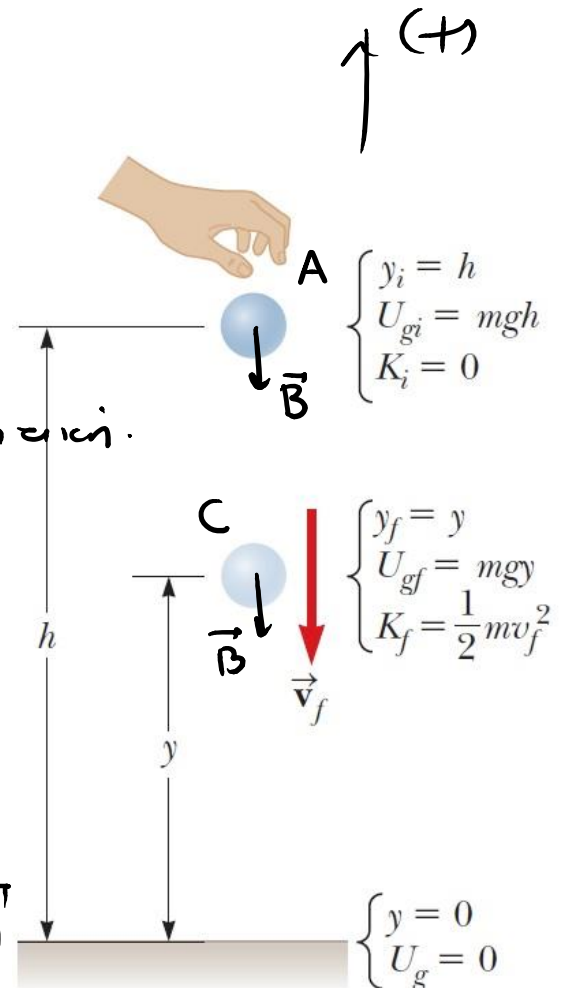
$$\text{ΑΔΜΕ: } K^A + U_g^A = K^C + U_g^C$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgy$$

$$\cancel{mgh} - \cancel{mgy} = \frac{1}{2}\cancel{mv_c^2}$$

$$v_c^2 = 2g(h-y)$$

$$v_c = \pm \sqrt{2g(h-y)} \rightarrow v_c = -\sqrt{2g(h-y)}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα - Λύση:

- Μπάλας μάζας m πέφτει από ύψος h .
- Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

Θεωρείται ως σύστημα την $\mu\alpha\lambda\alpha$. Το σύστημα είναι η-ανοικτοσύστημα, λόγω της $\overline{B}$ η οποία είναι εξωτερική στο σύστημα.

OMKE-E : $\Delta K = W_B \leftarrow (A.D.E.)$

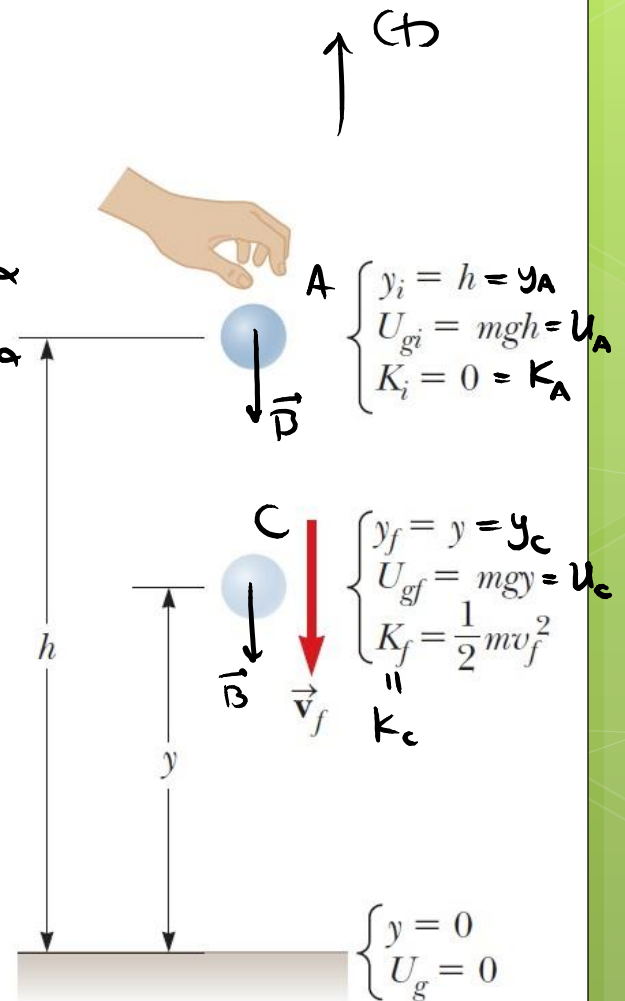
$$K_C - K_A = \vec{B} \cdot \Delta \vec{r}$$

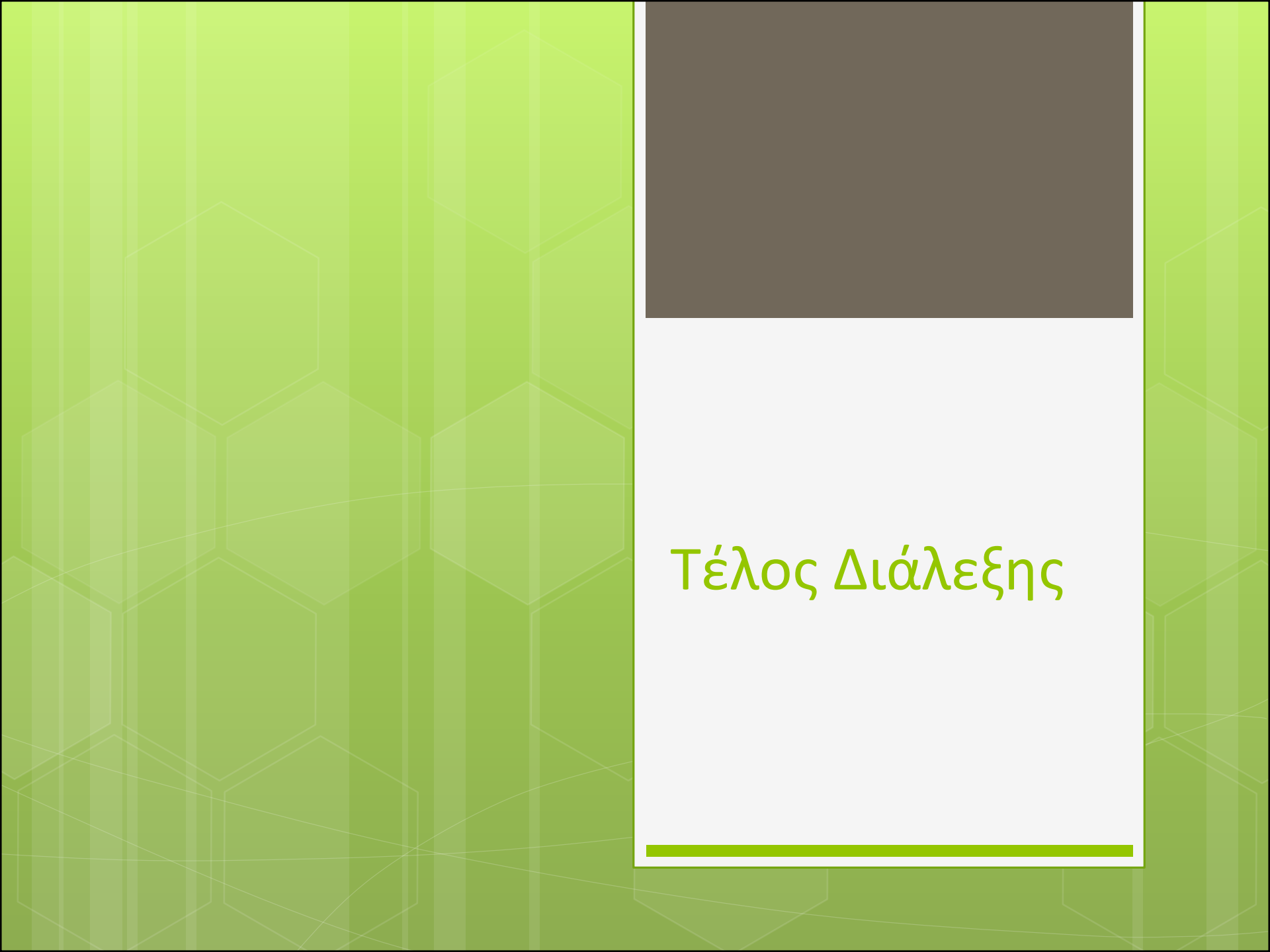
$$\frac{1}{2} m u_c^2 - 0 = -mg(y_c - y_A)$$

$$\frac{1}{2} m u_c^2 = -mg(y-h)$$

$$u_c^2 = 2g(h-y)$$

$$u_c = -\sqrt{2g(h-y)}$$





Τέλος Διάλεξης