



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση
 - ...όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση
- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
 - Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:
 - Τον άξονα των x
 - Τον άξονα των y
- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

○ A) $x_f = x_i + u_{xi}t$

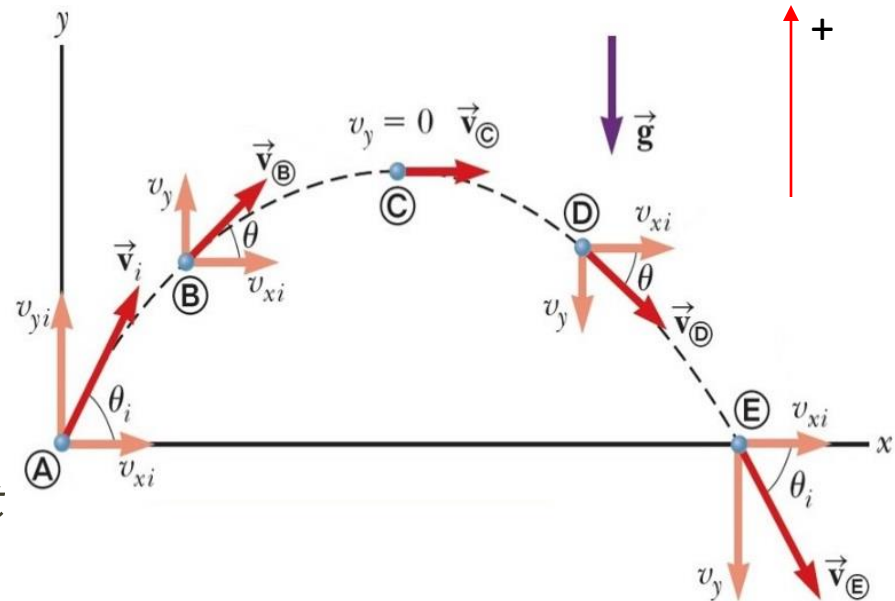
○ B) $u_{yf} = u_{yi} - gt$
 $u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$
 $y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

με $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

○ Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

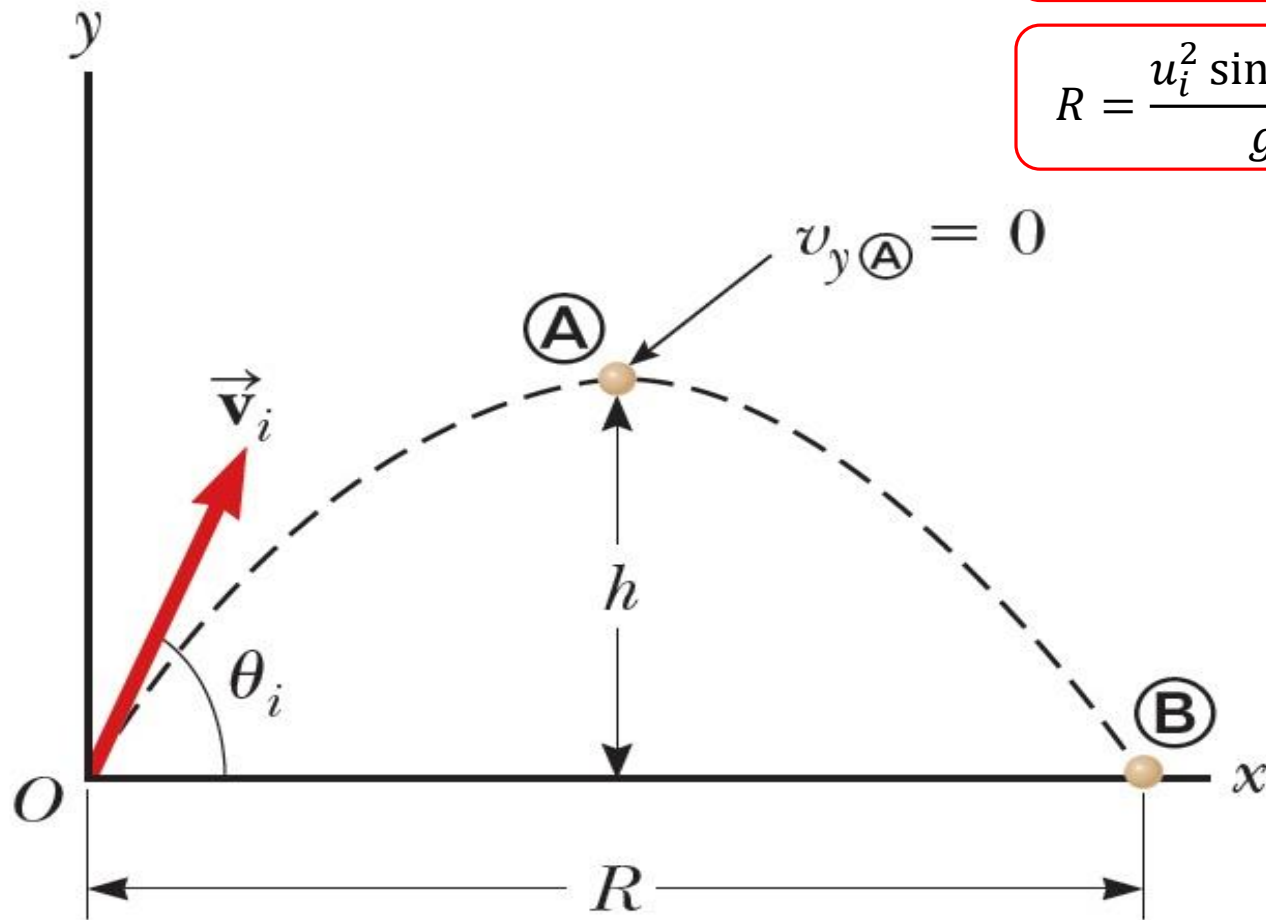


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Εύρος R και Μέγιστο Ύψος h βολής

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$



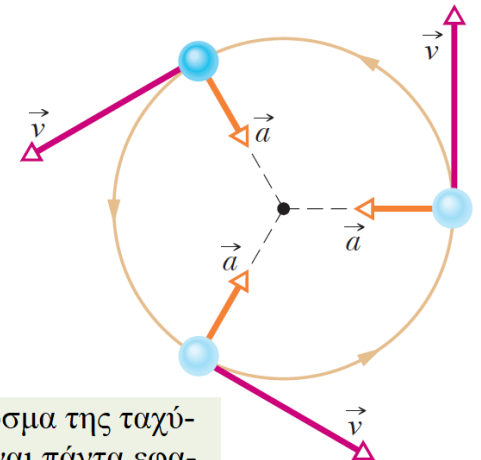
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα σε απόσταση r
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
 - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

- Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
 - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
 - Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

Ταχύτητα

- Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
- Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης

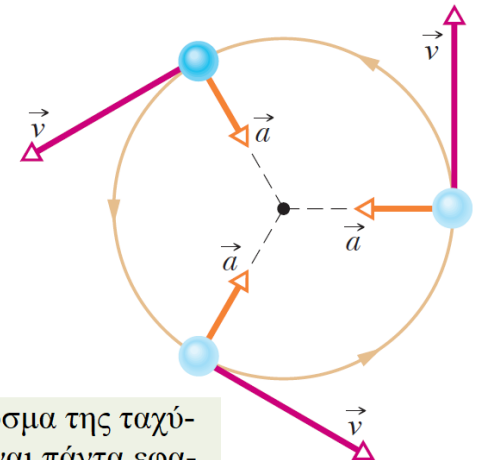
Επιτάχυνση

- Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

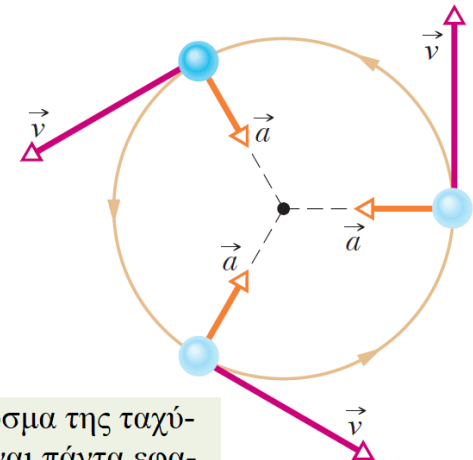
$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

- Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**

- Από την ίδια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
- Ο λόγος

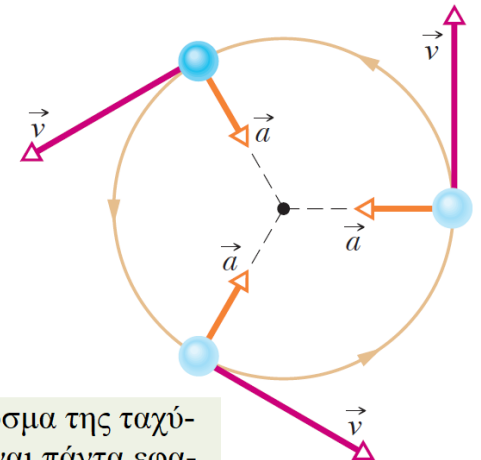
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

- Ισούνται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση
- Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad a = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



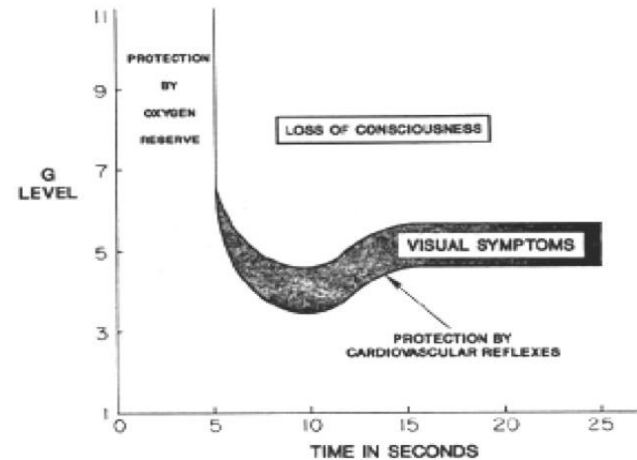
Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC.

Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s ?



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση :

- ◉ Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s ?

Ξέρουμε ότι:

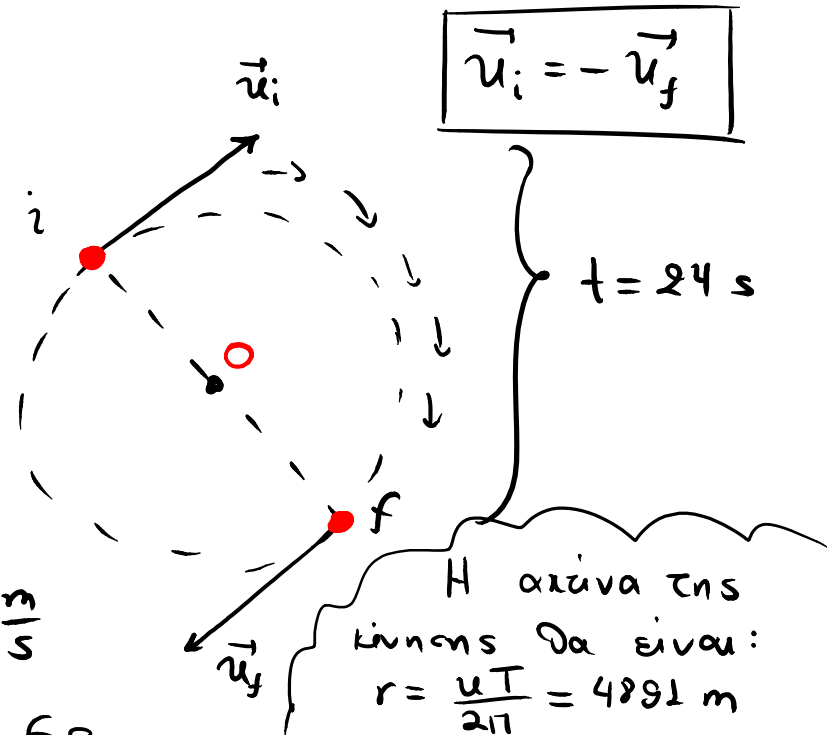
$$a = \frac{2\pi u}{T}$$

Από τα δεδομένα, $t = 24 = \frac{T}{2}$.

Επίσης,

$$u = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.31 \frac{m}{s}$$

$$\text{Άρα } a = \frac{2\pi u}{T} = 83.81 \frac{m}{s^2} \approx 8.6g$$





Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης



Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ως τώρα, μελετήσαμε κινήσεις σωματιδίων
 - Ορίσαμε θέση, κατεύθυνση, ταχύτητες, επιταχύνσεις...
 - Δεν μας ενδιέφερε η **αιτία** της κίνησης
- Καιρός να τη μελετήσουμε κι αυτή! 😊

Οι Νόμοι της Κίνησης

○ Ερωτήματα

- Γιατί αλλάζει η κίνηση ενός αντικειμένου;
 - Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
 - Γιατί είναι πιο εύκολο να κινήσουμε ένα μικρό από ένα μεγάλο αντικείμενο;
-
- «Κλειδιά» για τις απαντήσεις
 - **Δύναμη (Force – F)** που ασκείται στο αντικείμενο
 - **Μάζα (Mass – m)** του αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

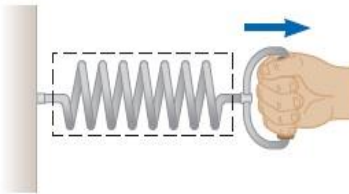
○ Δύναμη

- Καθημερινή εμπειρία
 - Πέταγμα μπάλας
 - Σπρώξιμο ντουλάπας
 - Τράβηγμα συρταριού
- Αλληλεπίδραση με αντικείμενα μέσω μυικής δράσης, με αποτέλεσμα την αλλαγή της ταχύτητάς τους
- Δεν είναι όμως πάντα απαραίτητη η πρόκληση κίνησης
 - Βαριά μπάλα
 - Μεγάλη ντουλάπα
 - Κλειδωμένο συρτάρι

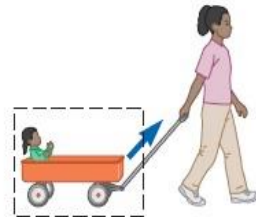
Οι Νόμοι της Κίνησης

- “Οι Δυνάμεις είναι αυτές που αλλάζουν την ταχύτητα ενός αντικειμένου” (I. Newton)
- Δυο κατηγορίες δυνάμεων
 - Δυνάμεις Επαφής
 - Δυνάμεις Πεδίου

Δυνάμεις Επαφής



a

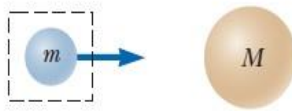


b

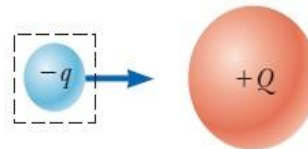


c

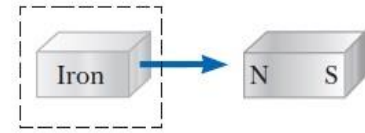
Δυνάμεις Πεδίου



d



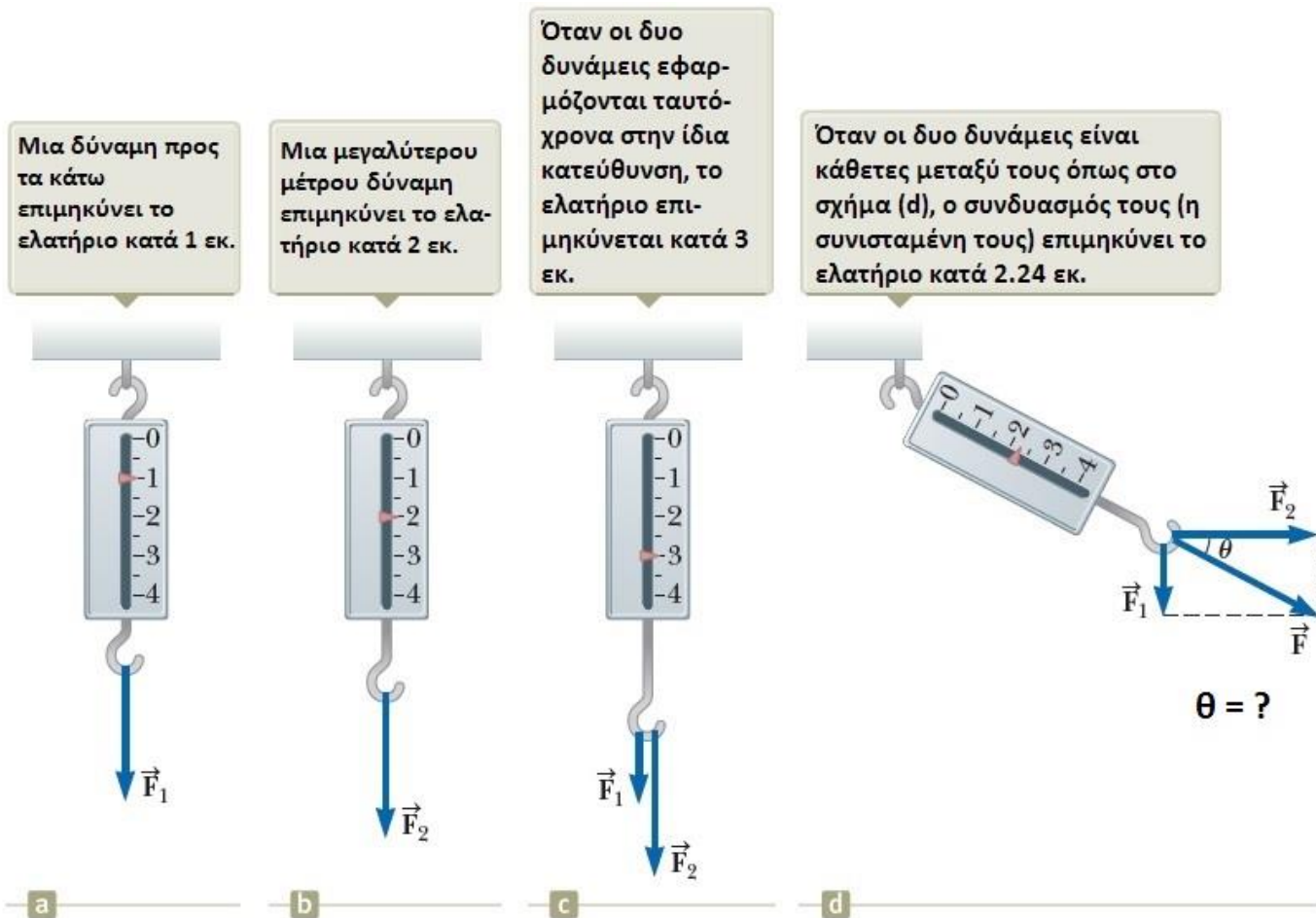
e



f

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Η διανυσματική φύση της Δύναμης



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Πρώτος Νόμος του Newton (Νόμος Αδράνειας)

- Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα αντικείμενο **δεν αλληλεπιδρά** με άλλα αντικείμενα και έχει **μηδενική επιτάχυνση** λέγεται Αδρανειακό σύστημα αναφοράς

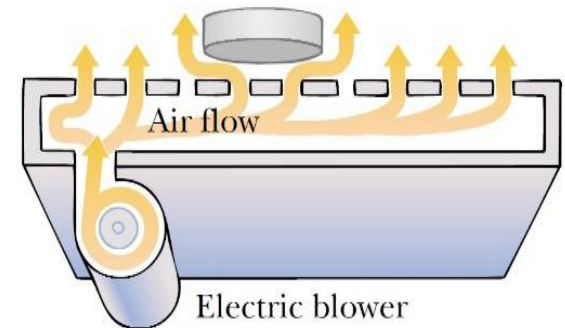
- Παράδειγμα

- Έστω μια αεροτράπεζα και ένας δίσκος

- Η αεροτράπεζα προσομοιώνει επιφάνεια απουσία τριβών, δηλ. δεν ασκείται κάποια δύναμη στο δίσκο – αυτός μπορεί να κινηθεί ελεύθερα

- Ας εξετάσουμε τα συστήματα αναφοράς ως προς την κίνηση ή ακινησία τους

- Τοποθετούμε το δίσκο απαλά στην αεροτράπεζα κι αυτός μένει ακίνητος



Αεροτράπεζα και δίσκος

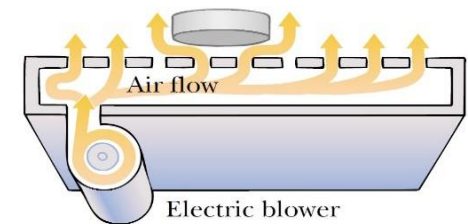
Οι Νόμοι της Κίνησης

ο Πρώτος Νόμος του Newton (Νόμος Αδράνειας)

ο Παράδειγμα

- ο 1) Αεροτράπεζα + δίσκος βρίσκονται στο έδαφος, το ίδιο και εμείς (παρατηρητές) → αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - ο Γιατί? Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση με άλλα αντικείμενα και η επιτάχυνση του δίσκου είναι μηδενική
- ο 2) Αεροτράπεζα + δίσκος σε ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα, το ίδιο κι εμείς (επιβάτες μέσα στο τρένο) → αδρανειακό σύστημα αναφοράς
 - ο Γιατί? Ίδιοι λόγοι με πριν!
- ο Οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς που κινείται με **σταθερή ταχύτητα** σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι κι αυτό αδρανειακό

Αεροτράπεζα και δίσκος



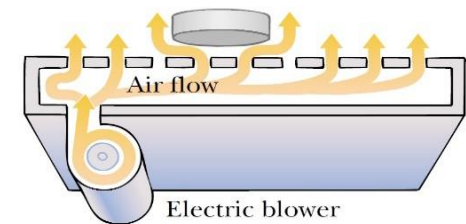
Οι Νόμοι της Κίνησης

● Πρώτος Νόμος του Newton (Νόμος Αδράνειας)

● Παράδειγμα

- 3) Αεροτράπεζα + δίσκος σε τρένο υπό επιτάχυνση, το ίδιο κι εμείς → μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Αεροτράπεζα και δίσκος



- Γιατί? Το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης
- Ένας παρατηρητής στο έδαφος θα σας πει ότι – παρ'όλο που για σας μέσα στο τρένο ο δίσκος φαίνεται να επιταχύνει – βλέπει το δίσκο να ολισθαίνει ως προς το τραπέζι αλλά να κινείται πάντα με την ίδια ταχύτητα ως προς το έδαφος
- Έτσι, ο 1^{ος} νόμος του Newton εξακολουθεί να ισχύει παρά το ότι εμείς – ως επιβάτες – παρατηρούμε μια φαινομενική επιτάχυνση του δίσκου ως προς εμάς.

Οι Νόμοι της Κίνησης

● Πρώτος Νόμος του Newton (2^η έκδοση ☺)

- *Απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς*

- *ένα αντικείμενο σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία και*

- *ένα αντικείμενο σε κίνηση παραμένει σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα*

- *Με άλλα λόγια*

- *Όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα αντικείμενο, η επιτάχυνση του αντικειμένου είναι μηδενική*

- *Η τάση ενός αντικειμένου να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης λέγεται **αδράνεια***

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Από τα προηγούμενα, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:
- Ένα αντικείμενο που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια δύναμη
- Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Διαφορετικά αντικείμενα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησής τους
 - Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησής τους
- Γιατί???
- Γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**
- Η **μάζα** είναι μια ιδιότητα ενός αντικειμένου που **ορίζει «πόση» αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητάς του**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ο 1^{ος} Νόμος του Newton μας εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα αντικείμενο όταν δεν ασκούνται δυνάμεις επάνω του
- Ο 2^{ος} Νόμος του Newton (που θα δούμε αμέσως) μας εξηγεί τι συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται επάνω του

Οι Νόμοι της Κίνησης

• Δεύτερος Νόμος του Newton

- Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση ενός αντικειμένου είναι
 - ευθέως ανάλογη στη συνολική δύναμη, $\sum \vec{F}$, που ασκείται επάνω του και
 - αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του, m

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

- και έτσι έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Φυσικά, μπορούμε – και σε πολλές περιπτώσεις **επιβάλλεται** - να αναλύσουμε το 2^ο νόμο σε *συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες του συστήματος αναφοράς* μας

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x, \quad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \quad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

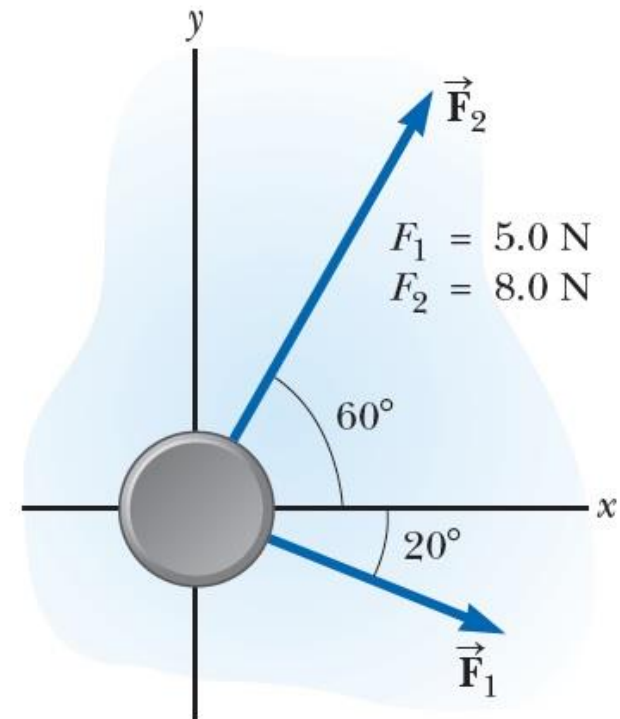
- Μονάδα μέτρησης στο S.I.
 - Newton (N) $\Leftrightarrow 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Παράδειγμα:

- Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου.

Δυο μπαστούνια τη χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



Οι Νόμοι της Κίνησης

Παράδειγμα – Λύση:

- Δίσκος μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

Αναλύουμε σε άξονες, όπως στο σχήμα.

• x-άξονας: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{1x} + F_{2x} = ma_x \Rightarrow F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ = \overset{F_{2y}}{m a_x} \\ = 0.3 a_x \Leftrightarrow a_x = \frac{F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ}{m} = 29 \frac{m}{s^2}$$

• y-άξονας: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \Rightarrow$

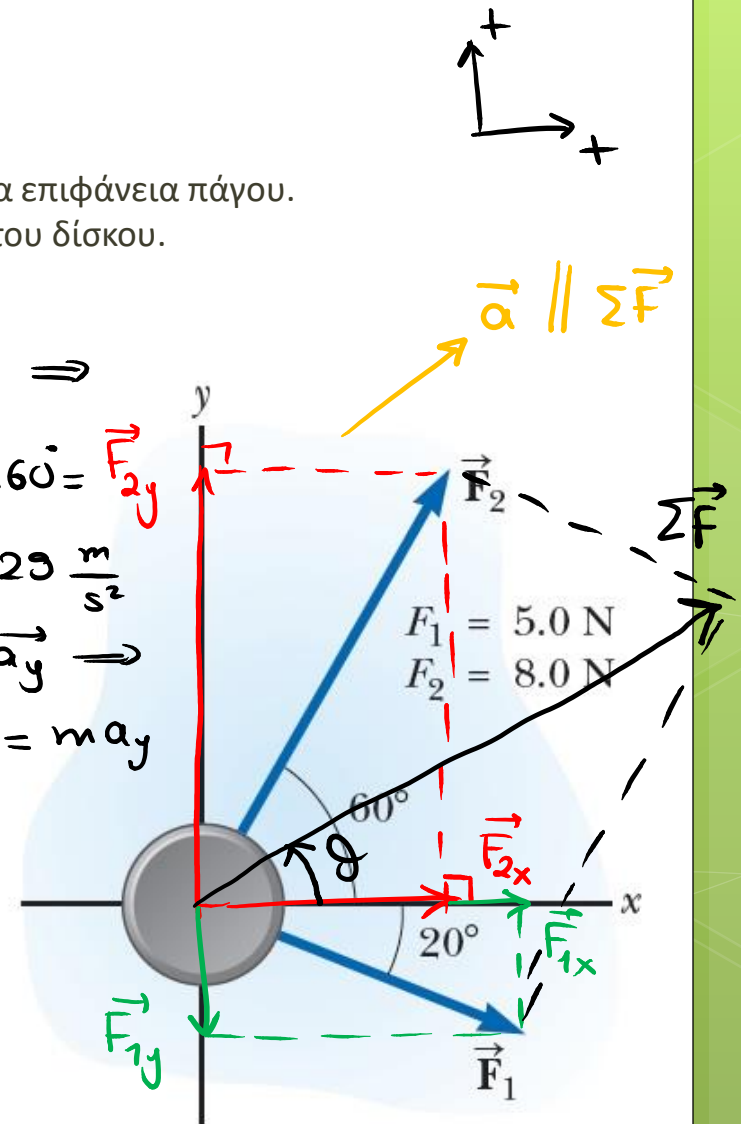
$$\Rightarrow F_{2y} - F_{1y} = ma_y \Leftrightarrow F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 20^\circ = ma_y$$

$$\Rightarrow a_y = \frac{F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 20^\circ}{m} = 17 \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = 29 \vec{i} + 17 \vec{j} \frac{m}{s^2}$

Είναι $|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \simeq 33.6 \frac{m}{s^2}$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{17}{29} \simeq 30.3^\circ$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Όλα τα αντικείμενα έλκονται από τη Γη
 - Με άλλα λόγια, η Γη ασκεί δύναμη επάνω τους
 - Άρα, τα επιταχύνει!
- Βαρυτική επιτάχυνση $\vec{g}$
- 2^{ος} Νόμος του Newton για αντικείμενο που πέφτει ελεύθερα

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} \leftrightarrow \vec{F}_g = m\vec{g}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

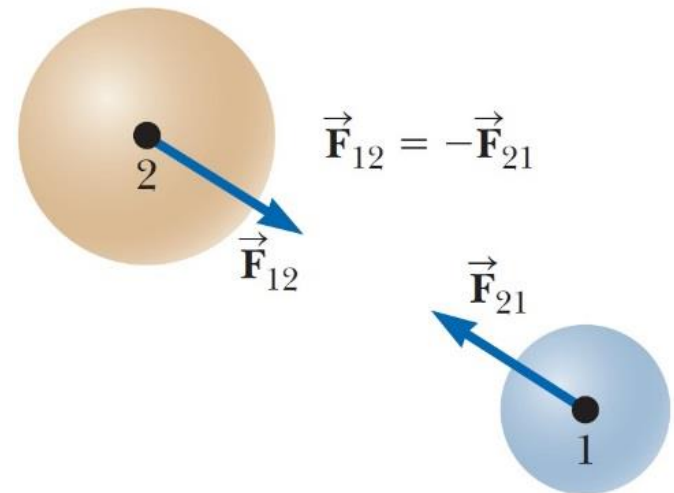
● Τρίτος Νόμος του Newton

● Σε κάθε δράση, υπάρχει μια αντίδραση!

● Πιο τυπικά... ☺

● Αν δυο αντικείμενα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το αντικείμενο 1 στο αντικείμενο 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το αντικείμενο 2 στο αντικείμενο 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ανάλυση** με βάση τους Τρεις Νόμους

- Δυο μοντέλα

- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία** ($\vec{a} = 0$)
- Β) Όταν επιταχύνουν από την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων ($\vec{a} \neq 0$)

Θυμηθείτε τα μοντέλα της Κινητικής!!

Α. Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα

Β. Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Οι Νόμοι της Κίνησης

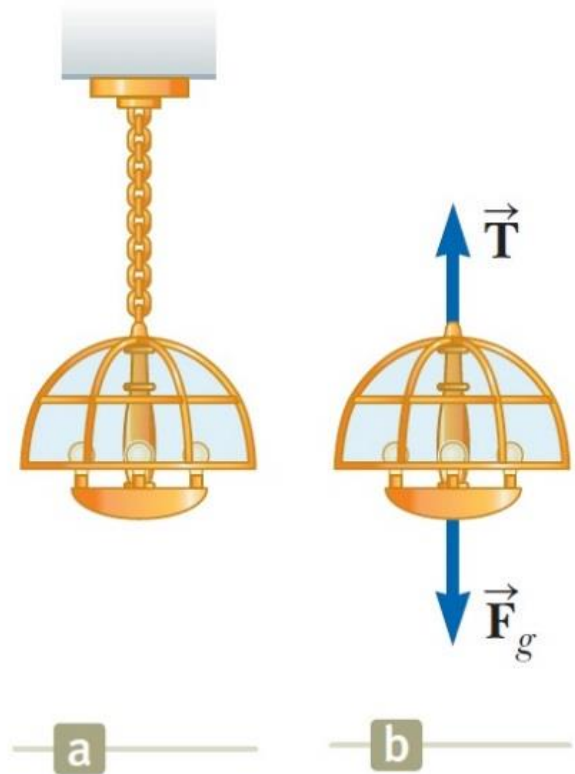
- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**

$$(\vec{a} = 0)$$

- η συνισταμένη των δυνάμεων

$$\Sigma \vec{F} = 0 !$$

- Παράδειγμα

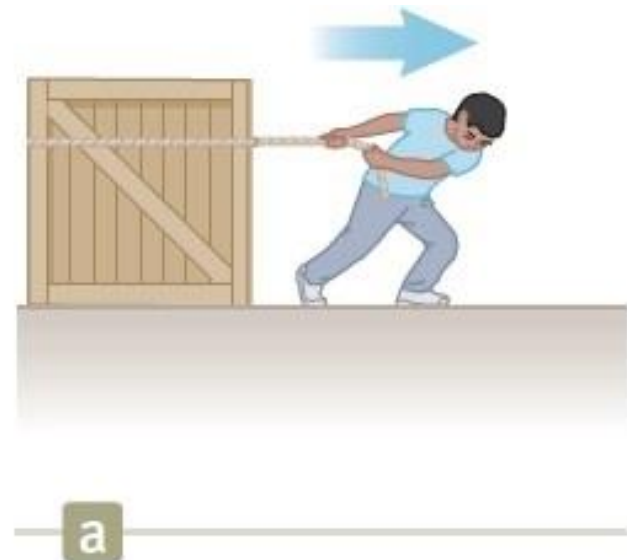


Οι Νόμοι της Κίνησης

- Β) Όταν τα σώματα επιταχύνουν υπό την επίδραση δύναμης ($\vec{a} \neq 0$)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Παράδειγμα
 - Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
 - Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο



Οι Νόμοι της Κίνησης

● Παράδειγμα

- α) ● Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο
- β) ● Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

α) Στον x -άξονα, το σώμα επιταχύνει.

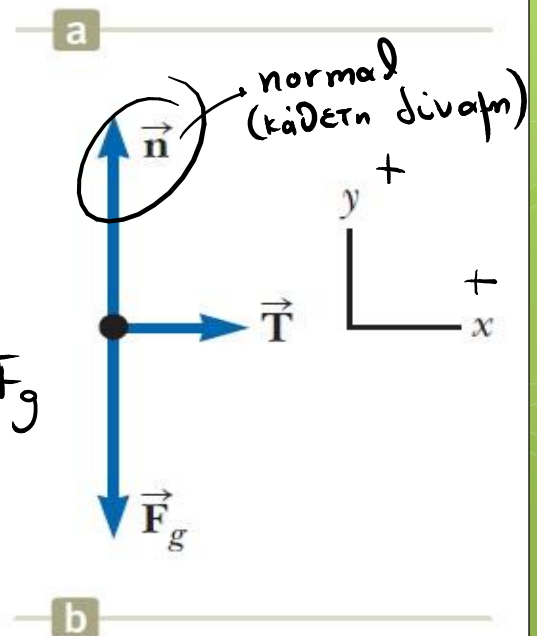
$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_x \Rightarrow \Sigma F_x = m a_x \Rightarrow a_x = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{T}{m}.$$

Στον y -άξονα το σώμα ισορροπεί, άρα $a_y = 0$.

β) Στον y -άξονα, το σώμα ισορροπεί.

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow n - F_g = 0 \Rightarrow n = F_g$$

$$\text{δηλ. } n = mg.$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο σημεία** που πρέπει να προσέξετε
- 1) Σε ένα πρόβλημα, είναι δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις (άξονες)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Ισορροπία στον άξονα y
 - Επιτάχυνση στον άξονα x
- 2) Είναι δυνατόν να περιγραφεί ένα αντικείμενο από πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης (την ίδια στιγμή!)
 - Προηγούμενο παράδειγμα
 - Σώμα υπό επίδραση δύναμης στον άξονα x
 - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x



Τέλος Διάλεξης

