Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss (επανάληψη...)

- **Ηλεκτρική Ροή**

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A}$$

- **Η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\boldsymbol{\Phi_E = q/\epsilon_0}$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.**
- Για πολλά (έστω M) σημειακά φορτία, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \oint \sum_{i=1}^{M} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}$$

- Για κατανομή φορτίου (**νόμος του Gauss**)

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

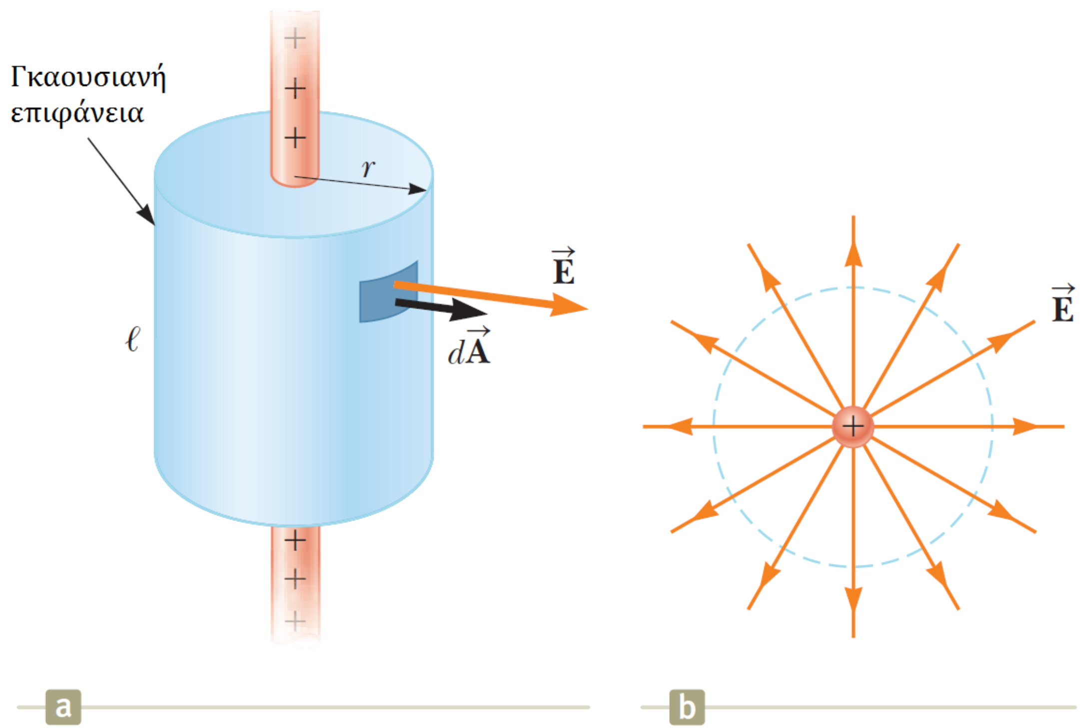
Ο νόμος του Gauss (επανάληψη…)

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Συνθήκες Εφαρμογής

1. **Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω <u>σε όλη</u> την επιφάνεια**
2. **Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο EdA, δηλ. τα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα**
4. **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφανείας**

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

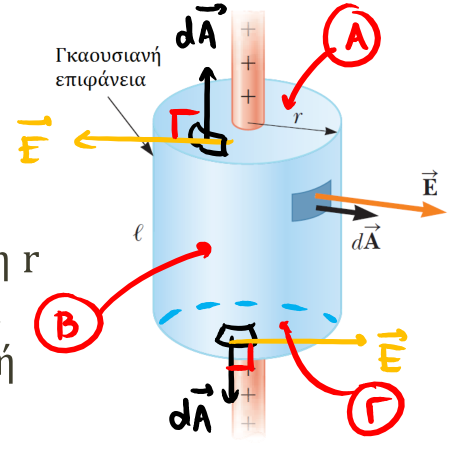


$$* \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}}$$

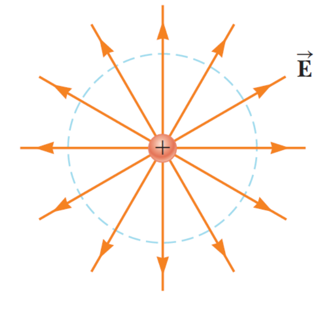
Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

$$\lambda = \frac{q}{\ell}$$



a



b

Επιλέξαμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r, όπως στο σχήμα. Το μήκος της ράβδου είναι άπειρο, άρα μπορούμε να δείξουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό για κάθε σημείο του χώρου που απέχει απόσταση r από τη ράβδο, δηλ. το ηλ. πεδίο είναι σταθερό σε όλη την "πλευρική" επιφάνεια του κυλίνδρου: Ικανοποιείται η συνθήκη (1). Ικανοποιείται η συνθήκη (3) στις επιφάνειες Α, Γ. Στην επιφάνεια Β ικανοποιείται η συνθήκη (2). Άρα:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\oint_{A} \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{0} + \oint_{B} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{0}$$

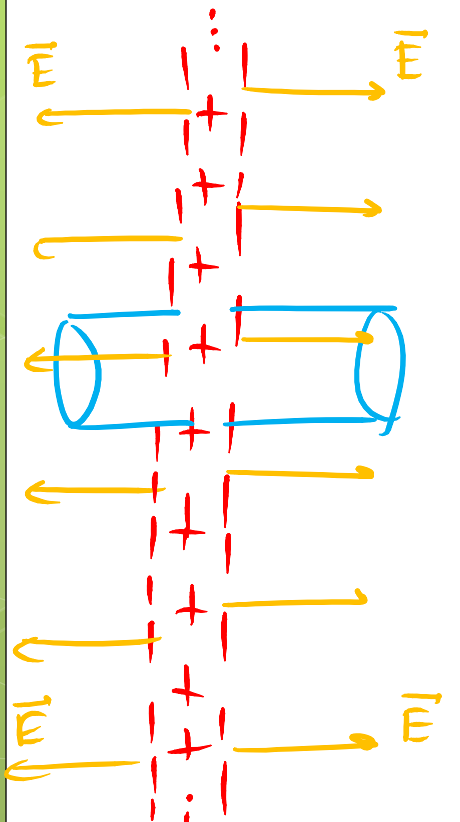
$$= \oint_{B} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \Longleftrightarrow E\oint dA = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \Longleftrightarrow E\cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \Longrightarrow *$$

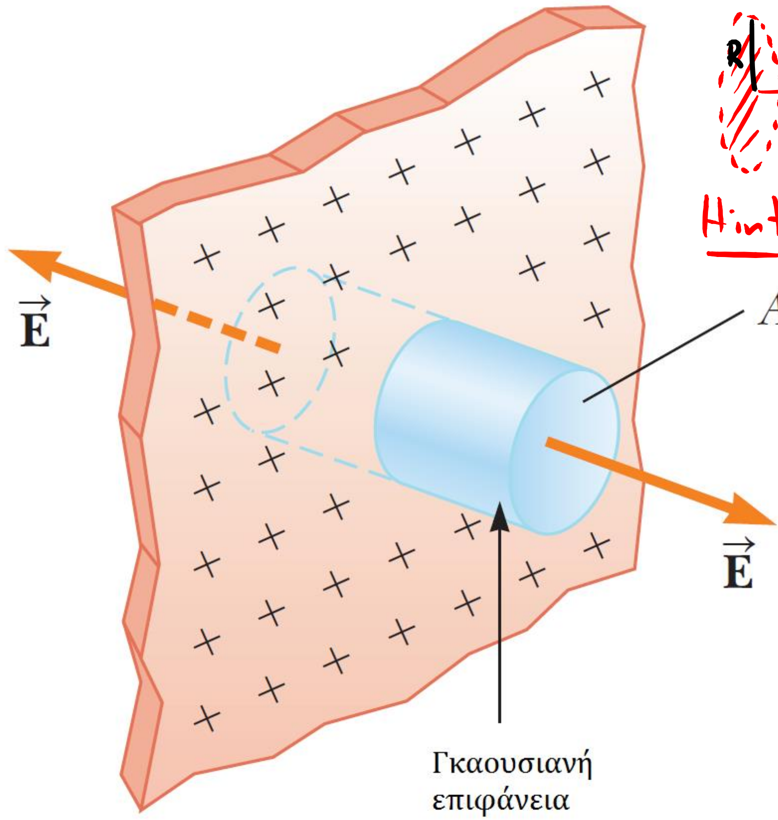
Ο νόμος του Gauss

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Άσκηση Ηλ. Πεδίου Διάλεξη 19

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.





Hint: $E = 2k_e\pi\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

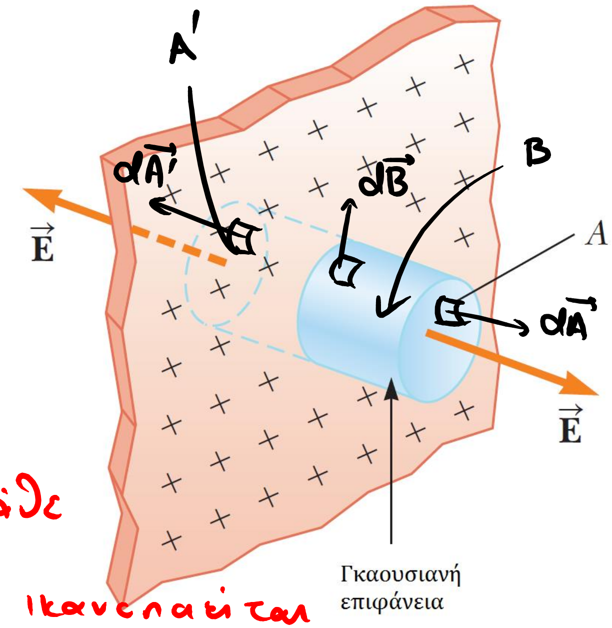
Αν $R \to +\infty$, τότε

$$E = 2k_e\pi\sigma = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\pi\sigma = \frac{\pi\sigma}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

σταθερό!

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.



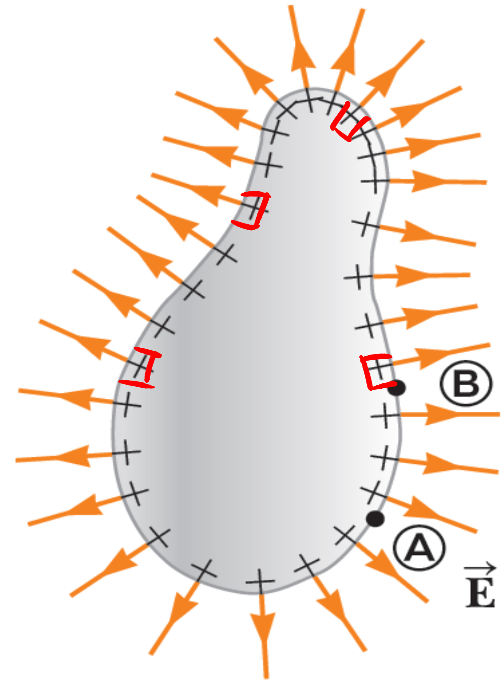
Η φορτισμένη επιφάνεια άπειρων διαστάσεων έχει τιμή ηλεκτρικού πεδίου σταθερή σε κάθε σημείο του χώρου (βλέπε προηγ. slide). Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (1). Επιλέγουμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια όπως στο σχήμα. Ικανοποιείται η συνθήκη (2) στις επιφάνειες A, A'. Τέλος, ικανοποιείται η συνθήκη (3) στην επιφάνεια B. Έχουμε:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\cdot 2\cancel{A} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$, σταθερό σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

Ο νόμος του Gauss

- **Αγωγοί – Ηλεκτρικό Πεδίο**
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι ένας στέρεος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία (τα φορτία δεν κινούνται) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
    - Το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς **έξω** από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνειά του και έχει μέτρο $\mathrm{E} = \sigma/\epsilon_0$
    - Το ηλεκτρικό πεδίο **εντός** του αγωγού είναι μηδέν
      - …είτε ο αγωγός είναι συμπαγής είτε «κούφιος»
    - Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνειά του
    - Σε έναν αγωγό ακαθόριστου σχήματος, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη εκεί που η κυρτότητά του είναι μεγαλύτερη



Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Εισαγωγή**
  - Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής *δύναμης*
  - Τώρα, θα συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της ***ενέργειας***
  - Θα ορίσουμε την έννοια του **ηλεκτρικού δυναμικού**
  - Θα περιγράψουμε φαινόμενα με μεγαλύτερη ευκολία απ' ότι με χρήση πεδίων και δυνάμεων
    - Όπως περιγράψαμε πιο εύκολα τα φαινόμενα της Κινητικής με ενεργειακά θεωρήματα σε σχέση με την περιγραφή μέσω δυνάμεων και διανυσμάτων
  - Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει μεγάλη εφαρμογή στη λειτουργία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συσκευών

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Έστω ένα φορτίο q τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
  - Έστω το φορτίο και το πεδίο ως ένα ***σύστημα***
  - Δύναμη $F_e = qE$ ασκείται στο φορτίο
    - Η δύναμη οφείλεται στο πεδίο
    - Το φορτίο κινείται λόγω της ηλεκτρικής δύναμης
    - Η δύναμη είναι ***συντηρητική*** και ***εσωτερική*** δύναμη του συστήματος
    - Άρα το έργο της είναι **εσωτερικό** στο σύστημα
  - Άρα το **πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα**
    - Όπως ακριβώς η βαρύτητα (βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα Γης-βιβλίου, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Για μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{s}$ ενός σημειακού φορτίου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο…
    - Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι
$$dW_{int} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$
    - Θυμηθείτε: το έργο μιας εσωτερικής δύναμης σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας (εδώ: **ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας**)
$$dW_{int} = -dU_e$$
    - Άρα
$$dU_e = -dW_{int} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$
    - Για πεπερασμένη μετατόπιση από το σημείο (A) στο (B) είναι
$$\Delta U_e = -\mathrm{q}\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Η qE δεν εξαρτάται από το μονοπάτι (συντηρητική δύναμη)!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Για μια συγκεκριμένη θέση του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια U_e, σε σχέση με μια θέση όπου έχει δυναμική ενέργεια $U_e = 0$
  - Διαιρώντας τη U_e με το φορτίο

$$V = \frac{U_e}{q}$$

    το οποίο ονομάζεται ***ηλεκτρικό δυναμικό*** V
  - Η ***διαφορά δυναμικού*** ορίζεται ως η **μεταβολή** στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (A) και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\Delta \mathrm{V}_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} = -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

  - Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρά δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου: J/C = Volt (V)

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

  - Δεν εξαρτάται από το φορτίο q, παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο!
  - Παρατηρήστε ότι Volt = $\frac{Nm}{C}$
  - Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο <u>*διαφορές*</u> δυναμικού έχουν νόημα
  - Πολλές φορές ορίζουμε εμείς ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου ως μηδενικού δυναμικού

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Προσοχή: η διαφορά δυναμικού δεν είναι το ίδιο με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας
    - Η διαφορά δυναμικού μεταξύ (Α) και (Β) υπάρχει αποκλειστικά λόγω **μιας πηγής φορτίου** και εξαρτάται από την κατανομή αυτής
    - Για να υπάρχει διαφορά δυναμικής ενέργειας, πρέπει να υπάρχει ένα σύστημα με τουλάχιστον **δυο** φορτία!
      - Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και αλλάζει μόνον αν ένα φορτίο μετακινηθεί σε σχέση με τη θέση ηρεμίας του συστήματος!
  - Σκεφτείτε το όμοια με το ηλεκτρικό πεδίο…
    - Το πεδίο υπάρχει λόγω μιας πηγής φορτίου
    - Η ηλ. δύναμη εγείρεται σε άλλο φορτίο στο χώρο του πεδίου
      - Απαιτούνται δηλαδή τουλάχιστον δυο φορτία για τη δύναμη!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

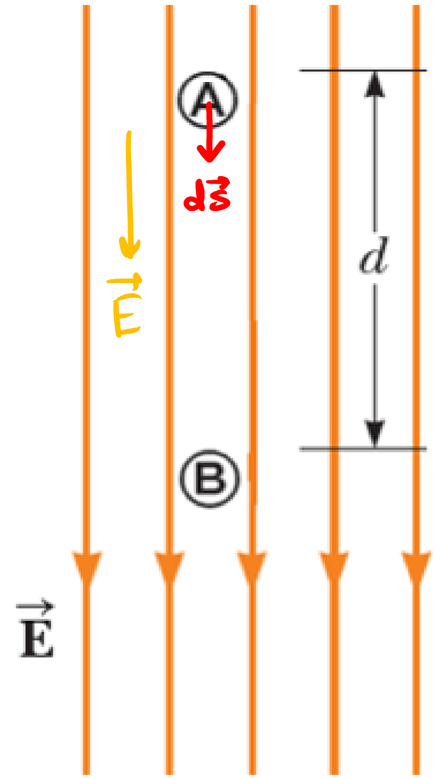
  - Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου κάποια **εξωτερική** δύναμη μετακινεί ένα φορτίο στο πεδίο
    - Από ένα σημείο (Α) σε ένα (Β)
    - Χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια
    - Αλλάζει όμως η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια!

  - Το έργο αυτής της δύναμης θα είναι:

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U_e = 0 + q\Delta \mathrm{V} = q\Delta V$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα ☺
  - Έστω ένα **ομογενές** ηλεκτρικό πεδίο
  - Ας υπολογίσουμε τη ΔV ανάμεσα στα σημεία (A), (B), απόστασης *d*



- Η μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές

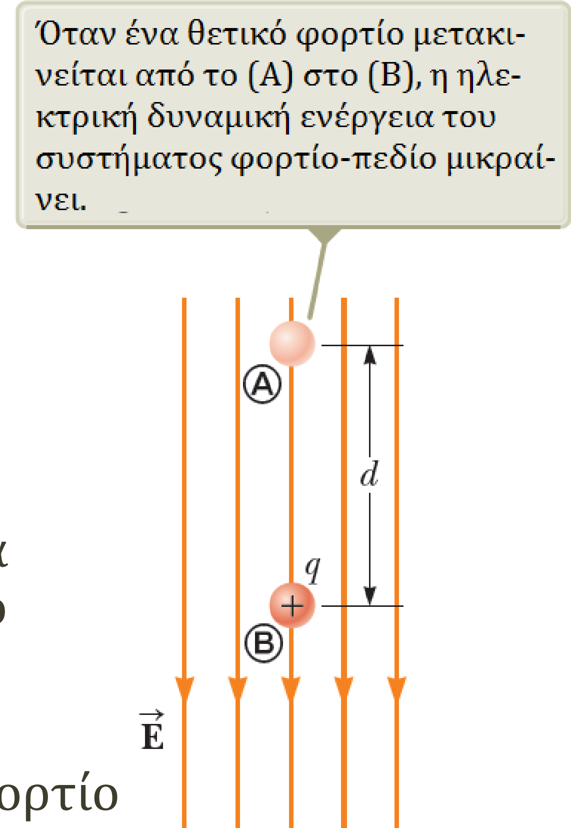
$$V_B - V_A = \Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B E ds = -E\int_A^B ds = -Ed$$

- Άρα

$$\Delta V_{A\to B} = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φορτίο $+q$ που κινείται από το (A) στο (B)
  - Τότε $\Delta U_e = q\Delta V_{A\to B} = -qEd$
  - Βλέπουμε ότι $\Delta U_e < 0$
    - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όταν το θετικό φορτίο κατευθύνεται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
    - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (A) ένα φορτίο $q > 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «κάτω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
      - Άρα επιταχύνεται → αποκτά κινητική ενέργεια
      - Όσο προχωρά προς τα κάτω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου με την αύξηση της κιν. ενέργειας!
        - Σας εκπλήσσει αυτό; ☺ Γιατί συμβαίνει;



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας θεωρήσουμε – στην ίδια διάταξη – τώρα ένα φορτίο – q που κινείται από το (Β) στο (Α) (δε γίνεται να κινηθεί $A \rightarrow B$)
  - Τότε $\Delta U_e = -q\Delta V_{B\rightarrow A} = -q(Ed) = -qEd$
    - …αφού τώρα μετράμε $\Delta V_{B\rightarrow A}$ και όχι $\Delta V_{A\rightarrow B}$
  - Βλέπουμε ότι πάλι $\Delta U_e < 0$!
    - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει ξανά όταν το αρνητικό φορτίο κατευθύνεται προς αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
    - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (Β) ένα φορτίο $q < 0$, αυτό θα κινηθεί προς τα «πάνω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
      - Άρα επιταχύνεται → αποκτά κινητική ενέργεια
      - Όσο προχωρά προς τα πάνω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου.

Τέλος Διάλεξης