Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Υπέρθεση

- Μελέτη κυματικής
- Διαφορά κυμάτων από σωματίδια
  - Συνδυασμός σωματιδίων δίνει ένα σώμα
    - Για να συμβεί πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου
  - Συνδυασμός κυμάτων δίνει ένα κύμα
    - Για να συμβεί πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο!
- **Σημαντικό**: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην ***ίδια*** θέση του χώρου!
  - Για να αναλύσουμε τέτοιες συμπεριφορές, απαιτείται η ***αρχή της υπέρθεσης***

Υπέρθεση

- **Αρχή της υπέρθεσης**

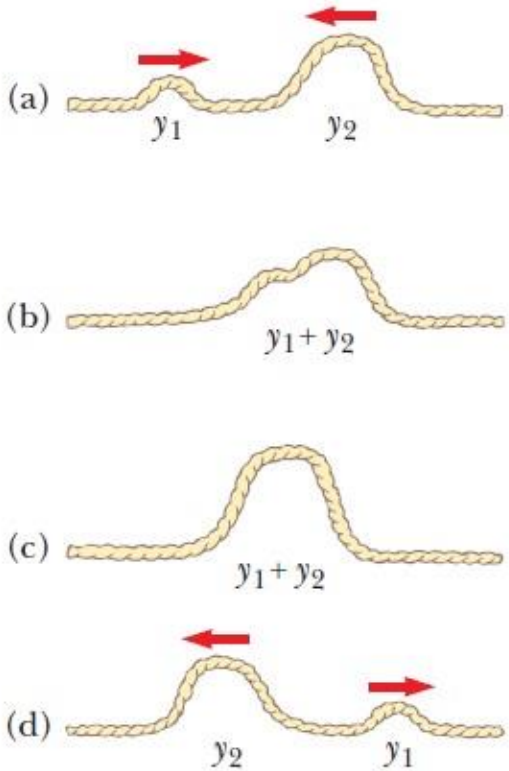
  - ***Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων***

    - Τέτοια κύματα λέγονται **γραμμικά**

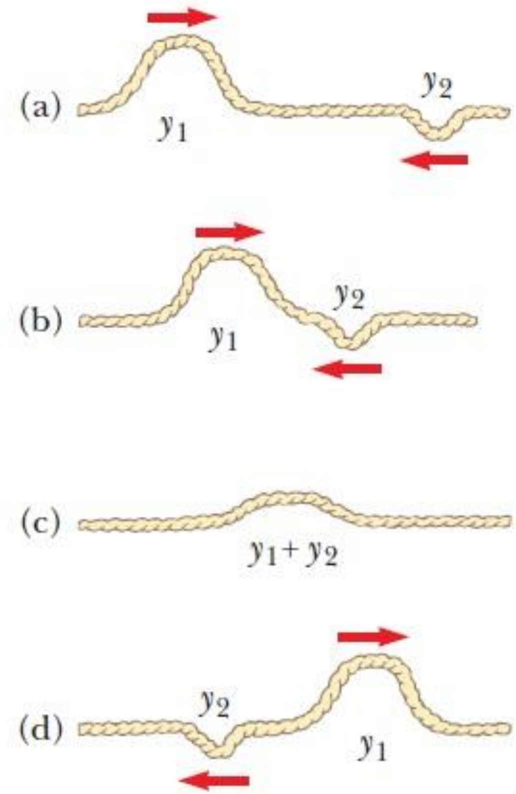
  - Ο συνδυασμός δυο διαφορετικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου λέγεται ***συμβολή***

Υπέρθεση

- **<u>Αρχή της υπέρθεσης</u>**



Ενισχυτική Συμβολή



Καταστρεπτική Συμβολή

Υπέρθεση

- **Αρχή της υπέρθεσης**

Υπέρθεση

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta \pm \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta \mp \varphi}{2}\right)$$

- ***Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων***

- Δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά
  - Ίδια συχνότητα ω, μήκος κύματος λ, και πλάτος A
  - Διαφορετική αρχική φάση φ

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)\,, \qquad y_2 = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

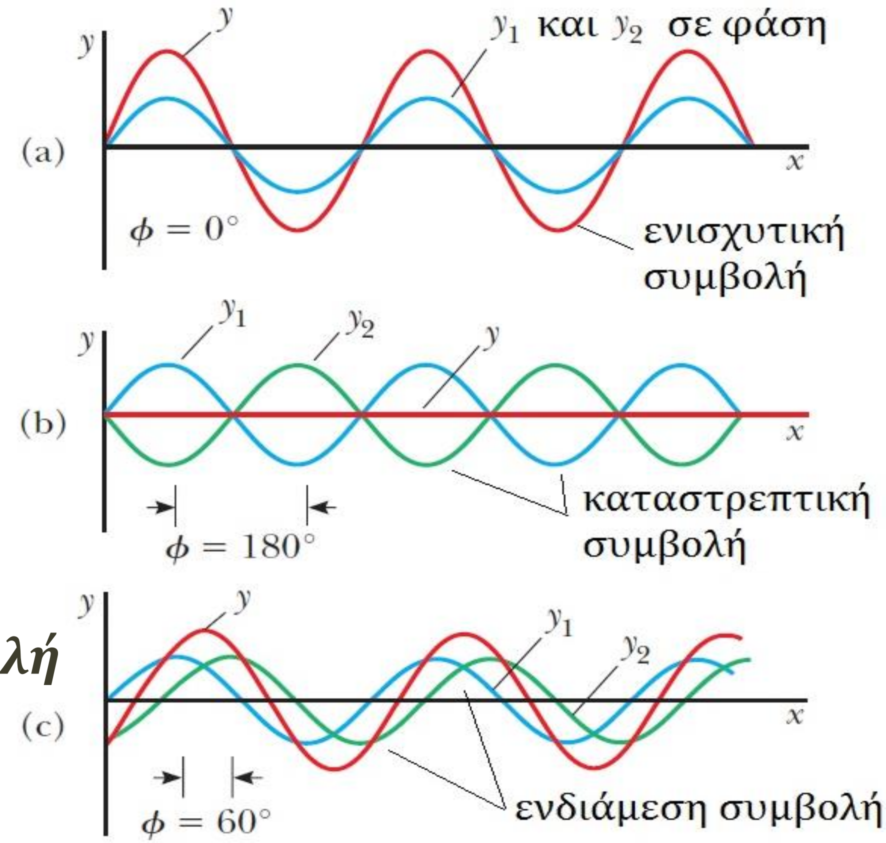
- $$y = y_1 + y_2$$

$$= A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

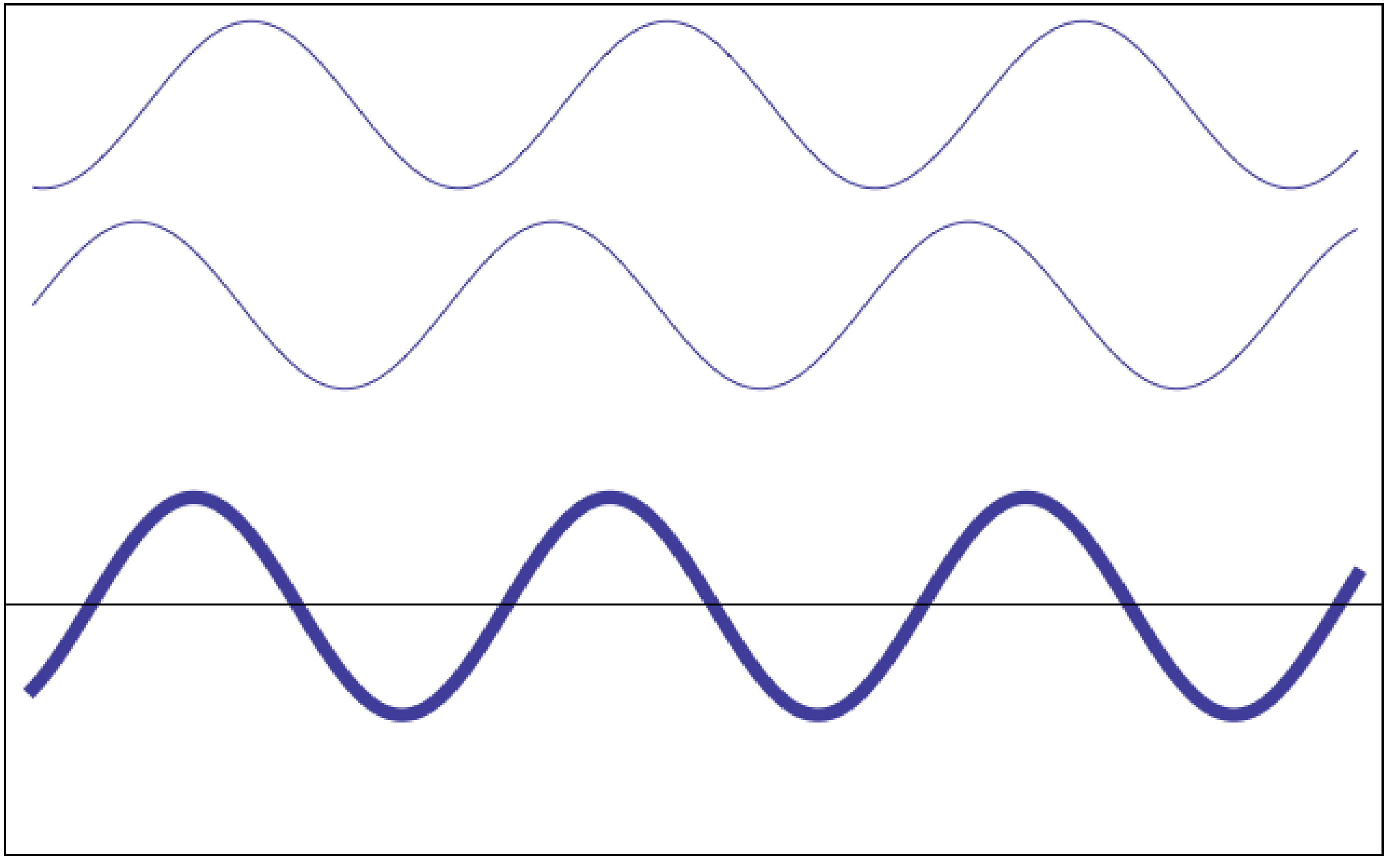
Υπέρθεση

- ***Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων***
  - $y = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$
    - Ίδια συχνότητα
    - Ίδιο μήκος κύματος
  - (α) φ=0, 2π, 4π, ...
    - Πλάτος 2Α
    - Κύματα ***σε φάση***
    - ***Ενισχυτική συμβολή***
  - (b) φ=π, 3π, 5π, ...
    - Πλάτος 0
    - Κύματα ***εκτός φάσης***
    - ***Καταστρεπτική συμβολή***
  - (c) 0 ≤ φ ≤ 2π
    - 0 ≤ Πλάτος ≤ 2Α



Υπέρθεση

- ***Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων***



Υπέρθεση

- ***Συμβολή ηχητικών κυμάτων***
  - Τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση
    - …ενώ μπορεί να διανύουν και διαφορετικές διαδρομές
  - Ηχητικά κύματα από το ηχείο ακολουθούν διαφορετική διαδρομή
    - Έχουν το ίδιο πλάτος Α και συχνότητα ω
    - Απόσταση ηχείου από δέκτη = **μήκος διαδρομής**
  - **Διαφορά διαδρομής**

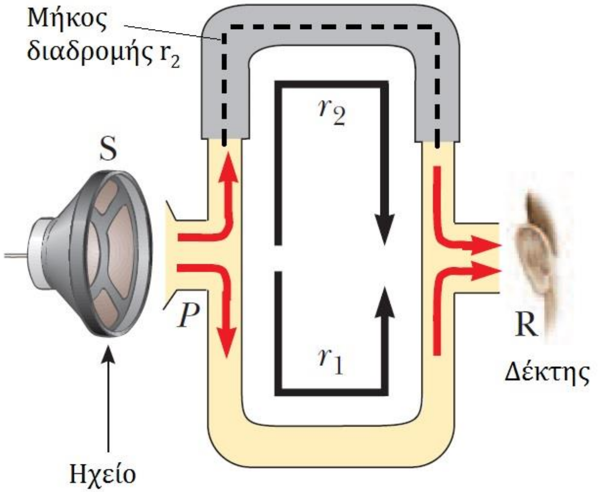
$$\mathbf{\Delta r} = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|$$

  - Φάση του καθενός κύματος

$$\Phi_{\mathrm{i}} = kr_i - \omega t + \varphi_i$$

  - Τότε

$$y = 2A\cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$



Υπέρθεση

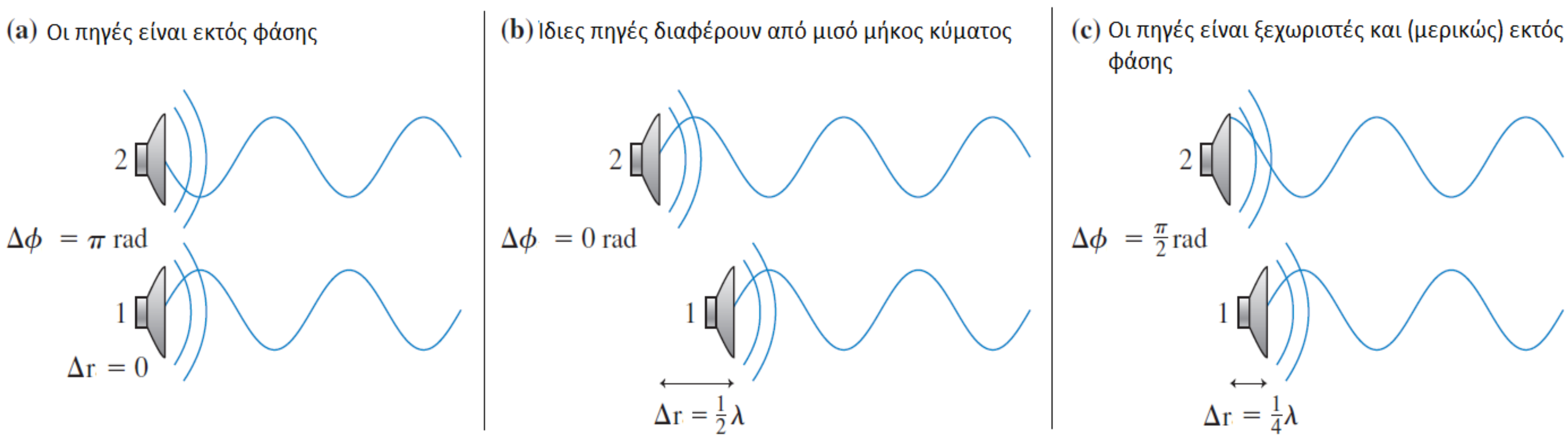
- ***Συμβολή ηχητικών κυμάτων*** $\Phi_{\mathrm{i}} = kr_i - \omega t + \varphi_i$
  - Είναι

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = \mathrm{k}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1) + \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta \mathrm{r}}{\lambda} + \Delta\varphi$$

  - Αν ΔΦ = 2mπ, m = 0,1,2,3, … τότε τα κύματα συμβάλλουν **ενισχυτικά**
    - Αφού $2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A\cos(m\pi) = \pm 2A$
  - Αν ΔΦ = (2m+1)π, m = 0,1,2,3, … τότε τα κύματα συμβάλλουν **καταστρεπτικά**
    - Αφού $2A\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = 2A\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - Αν η **αρχική φάση είναι ίδια** (π.χ. κοινή πηγή ήχου): **Δφ = 0**
    - **Ενισχυτική συμβολή**: $\Delta \mathrm{r} = \mathrm{m}\lambda, \quad \mathrm{m} = 0,1,2,3, \ldots$
    - **Καταστρεπτική συμβολή**: $\Delta \mathrm{r} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \mathrm{m} = 0,1,2,3 \ldots$

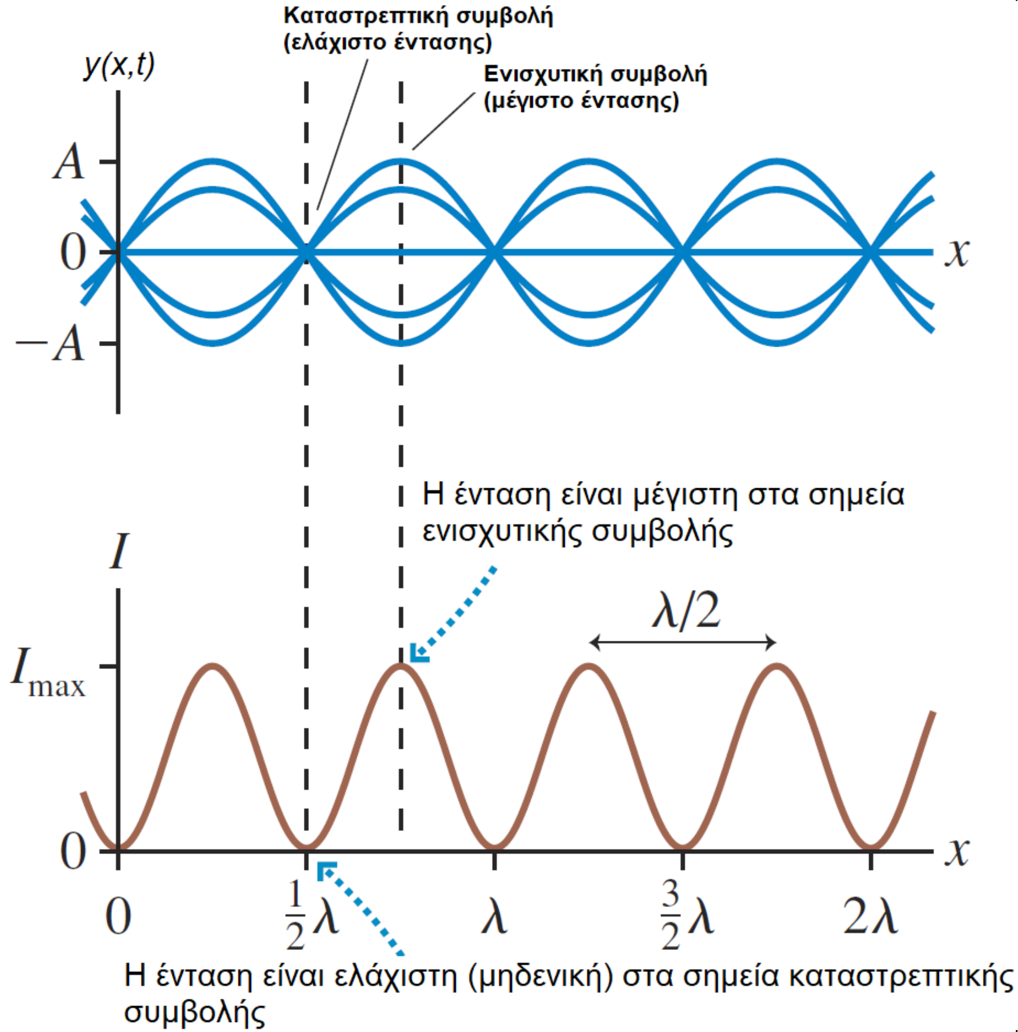
Υπέρθεση

- ***Συμβολή ηχητικών κυμάτων***
  - Καταστρεπτική συμβολή – πότε συμβαίνει?
    - Λόγω διαφοράς αρχικής φάσης Δφ - (a)
    - Λόγω διαφορετικής θέσης της πηγής - (b)
      - Διαφορετικό μήκος διαδρομής Δr
    - Λόγω και των δυο παραπάνω παραγόντων - (c)
  - Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε ΔΦ = π σε κάθε περίπτωση



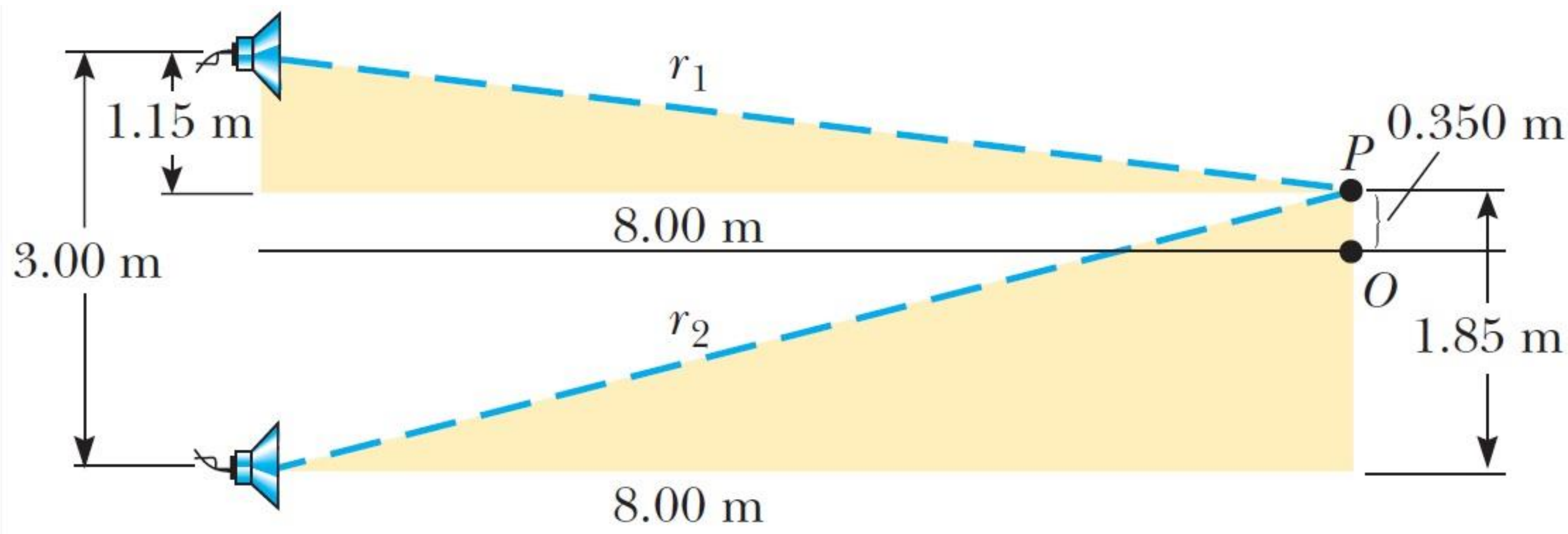
Υπέρθεση

- ***Συμβολή ηχητικών κυμάτων***
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος, A^2
  - Η ένταση I του ήχου είναι μέγιστη στα σημεία ενισχυτικής συμβολής και μηδενική (ελάχιστη) στα σημεία καταστρεπτικής συμβολής



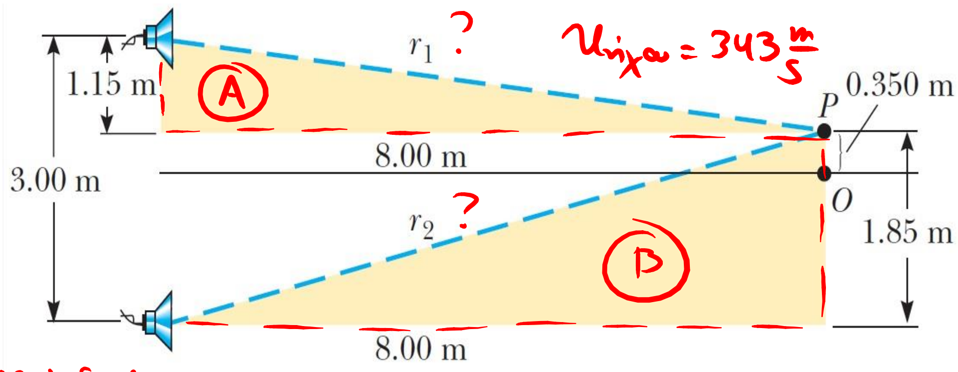
Υπέρθεση

- **Παράδειγμα:**
  - Δυο ηχεία απέχουν 3 m μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με το ίδιο στερεοφωνικό. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά στο σημείο O, που απέχει 8 m από το μέσον της ευθείας που ενώνει τα δυο ηχεία. Στη συνέχεια μετακινείται στο σημείο *P*, το οποίο έχει κάθετη απόσταση 0.35 m από το O και ακούει το πρώτο *ελάχιστο* της έντασης του ήχου. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου;



Υπέρθεση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Για τις διαδρομές r_1, r_2 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \sqrt{(1.15)^2+(8.00)^2} \simeq 8.08\ m \\ r_2 = \sqrt{(1.85)^2+(8.00)^2} \simeq 8.21\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta r = |r_2 - r_1| = 0.13\ m$$

$\Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

ακριβώς απαιτεί το 1ο ελάχιστο δηλ. $m=0$ $\Rightarrow \Delta r = (2\cdot 0+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 0.13 \Rightarrow \lambda = 0.26\ m$$

Από τη σχέση $\upsilon = \lambda f$

$$\Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{343}{0.26} = 1.3\ kHz$$

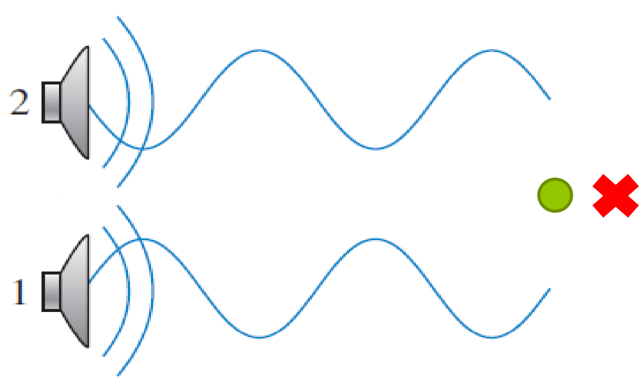
Υπέρθεση

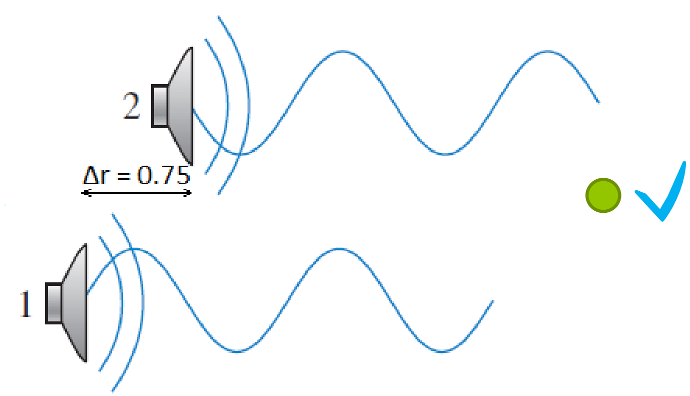
- **Παράδειγμα:**

Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο.

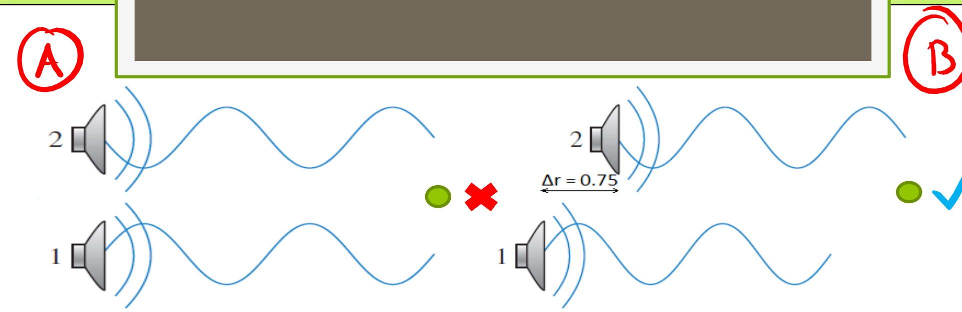
Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους.

Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?





Υπέρθεση



Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

Θέση (Α): $\left.\begin{array}{l}\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\varphi \\ \Delta r = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0 + \Delta\varphi \Rightarrow$

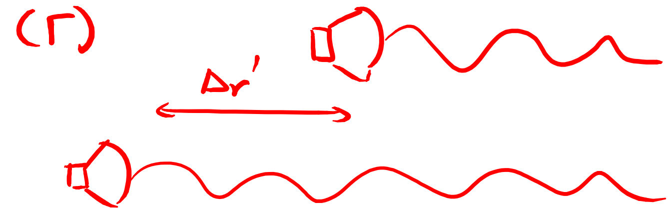
$\Rightarrow \Delta\phi = \Delta\varphi$ (1)

Δείξαμε ότι για καταστρεπτική συμβολή πρέπει $\left.\begin{array}{l}\Delta\phi = (2m+1)\pi \\ m=0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\phi = \pi \overset{(1)}{=} \Delta\varphi \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \pi}$

Θέση (Β): $\left.\begin{array}{l}\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \pi \\ \Delta r = 0.75\end{array}\right\} \Rightarrow$

Υπέρθεση



Παράδειγμα – Λύση:

- Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας δίπλα-δίπλα και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη?

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0.75 + \pi \\ \Delta\phi = 2m\pi \Big|_{m=1} = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0.75 + \pi = 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0.75 = \pi \Rightarrow \frac{2}{\lambda}\cdot 0.75 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{3}{2}\,m}$$

$$\text{Θέση (Γ)}: \left.\begin{array}{l} \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot \Delta r' + \pi \\ \Delta\phi = (2m+1)\pi \Big|_{m=1} = 3\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot \Delta r' + \pi = 3\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta r' = \lambda = \frac{3}{2}\,m}$$

Εικόνα: Ο Carlos Santana εκμεταλλεύεται τα στάσιμα κύματα στις χορδές του. Αλλάζει νότα στην κιθάρα του πιέζοντας τις χορδές σε διαφορετικά σημεία, μεγαλώνοντας ή μικραίνοντας το μήκος του τμήματος της χορδής που ταλαντώνεται.

Φυσική για Μηχανικούς

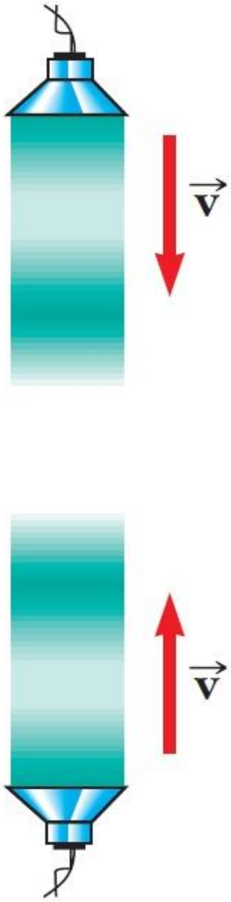
Υπέρθεση

Στάσιμα Κύματα

Στάσιμα Κύματα

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta \pm \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta \mp \varphi}{2}\right)$$

- ***Στάσιμα κύματα***
  - Ως τώρα βλέπαμε ηχητικά κύματα που συνέβαλαν σε κάποιο σημείο μπροστά τους
  - Τι θα γίνει αν τα βάλουμε αντικρυστά;
    - Ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, πλάτος
    - Αντίθετη ταχύτητα
  - $y = y_1 + y_2$
    $= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$
    $= (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$
  - Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα ***στάσιμο κύμα***
    - Γενικότερα, ***στάσιμη λέγεται μια ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις***

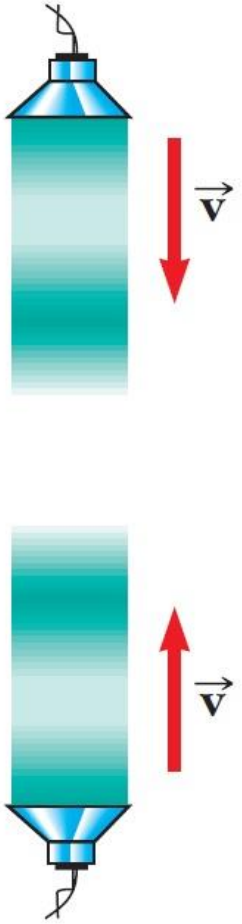


Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***

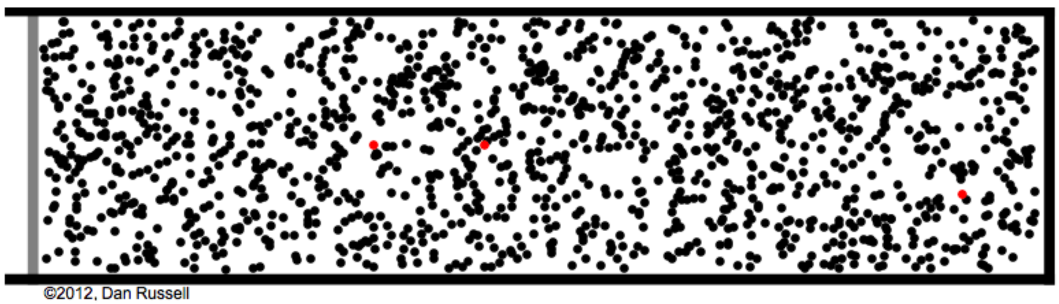
$$y = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από την έκφραση $kx - \omega t$
  - Άρα **δεν** είναι οδεύον κύμα
  - Δεν υπάρχει η έννοια της διάδοσης της κίνησης σε ένα στάσιμο κύμα

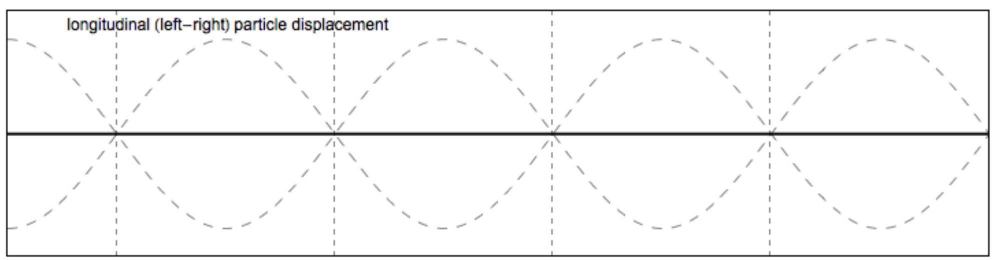


Στάσιμα Κύματα

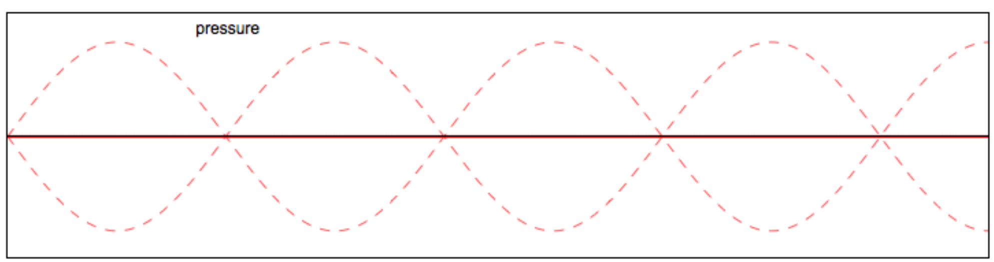
- ***Στάσιμα κύματα***



Μετατόπιση



Πίεση



Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***
- Ας συγκρίνουμε:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

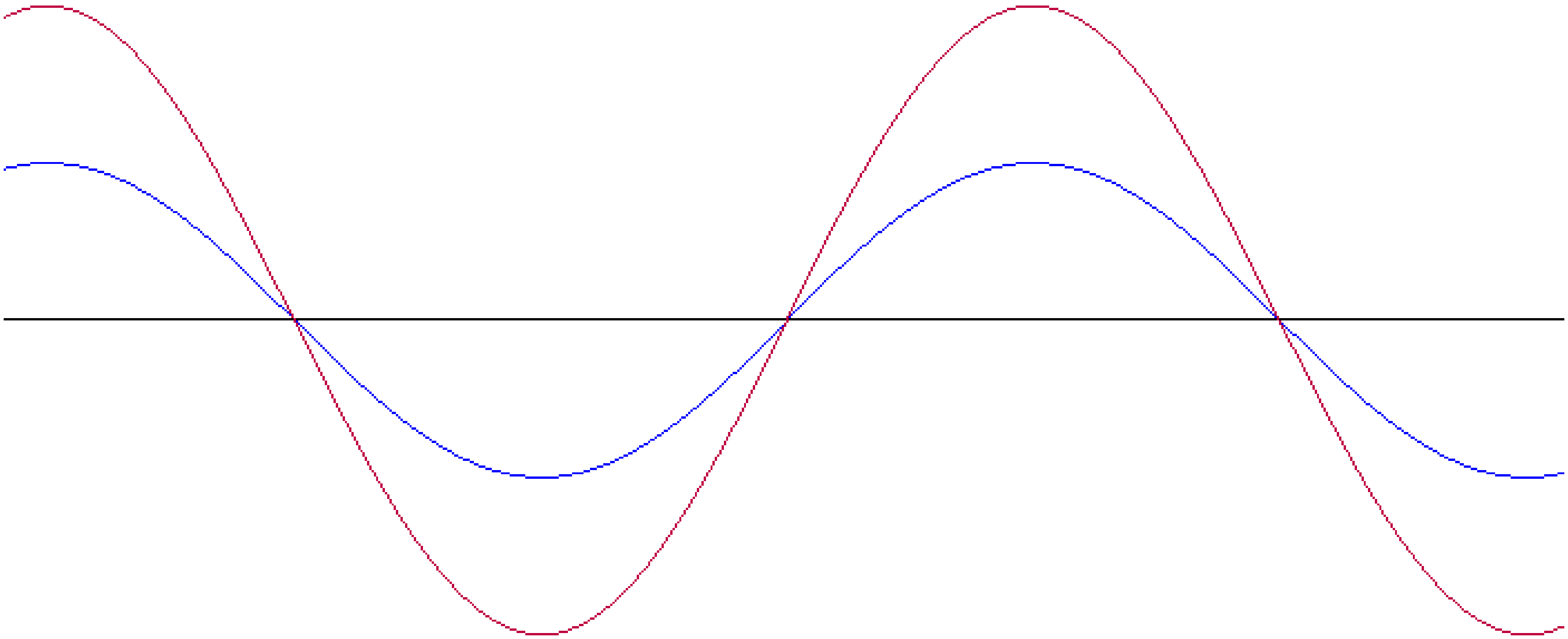
και

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Τι παρατηρείτε;
  - Η δεύτερη περιγράφει μια ειδική μορφή της πρώτης
    - $\varphi = 0$
    - Κάθε στοιχείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση
    - Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης, $2A\sin(kx)$, ενός στοιχείου εξαρτάται από τη **θέση** του στοιχείου, x, στο μέσο

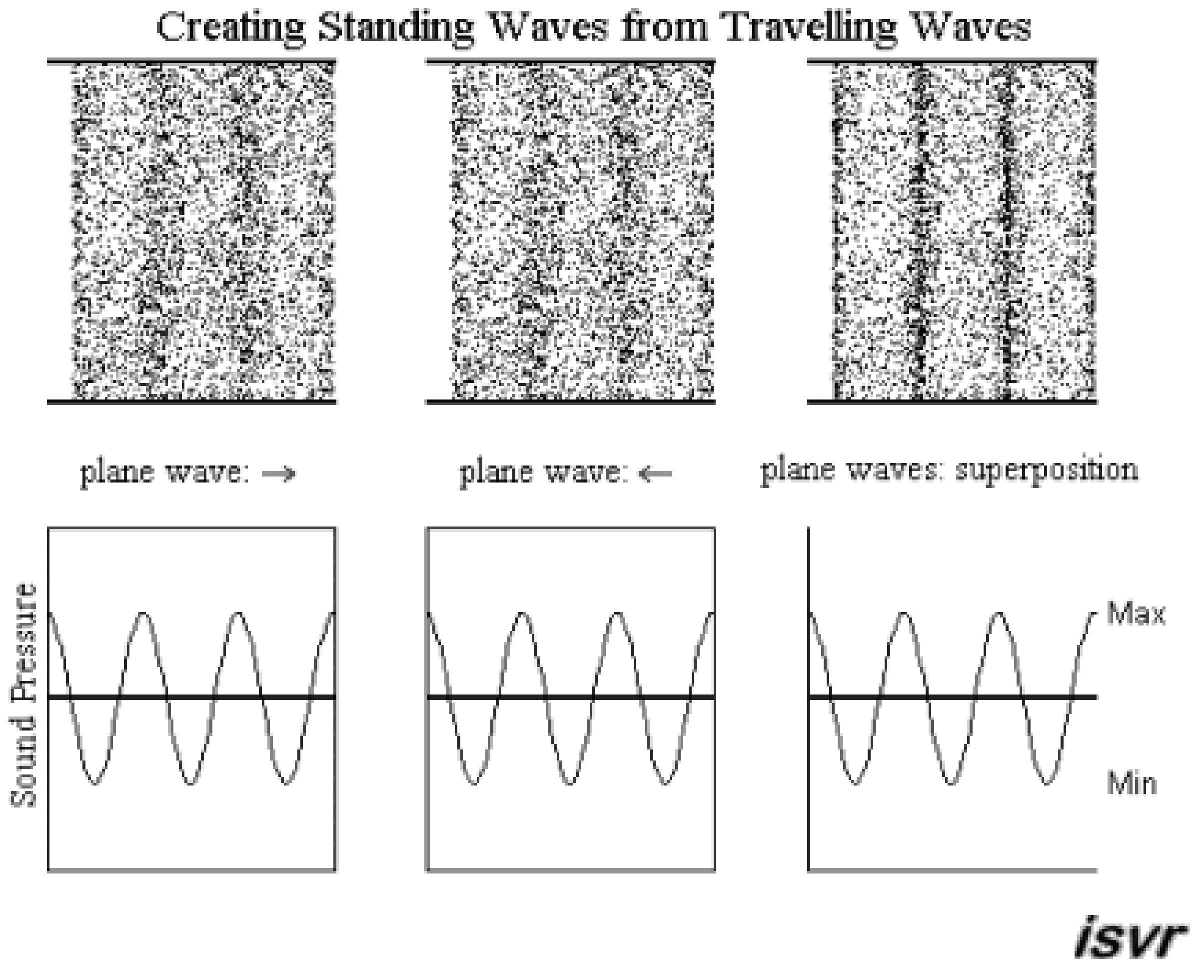
Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***



Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***



Στάσιμα Κύματα

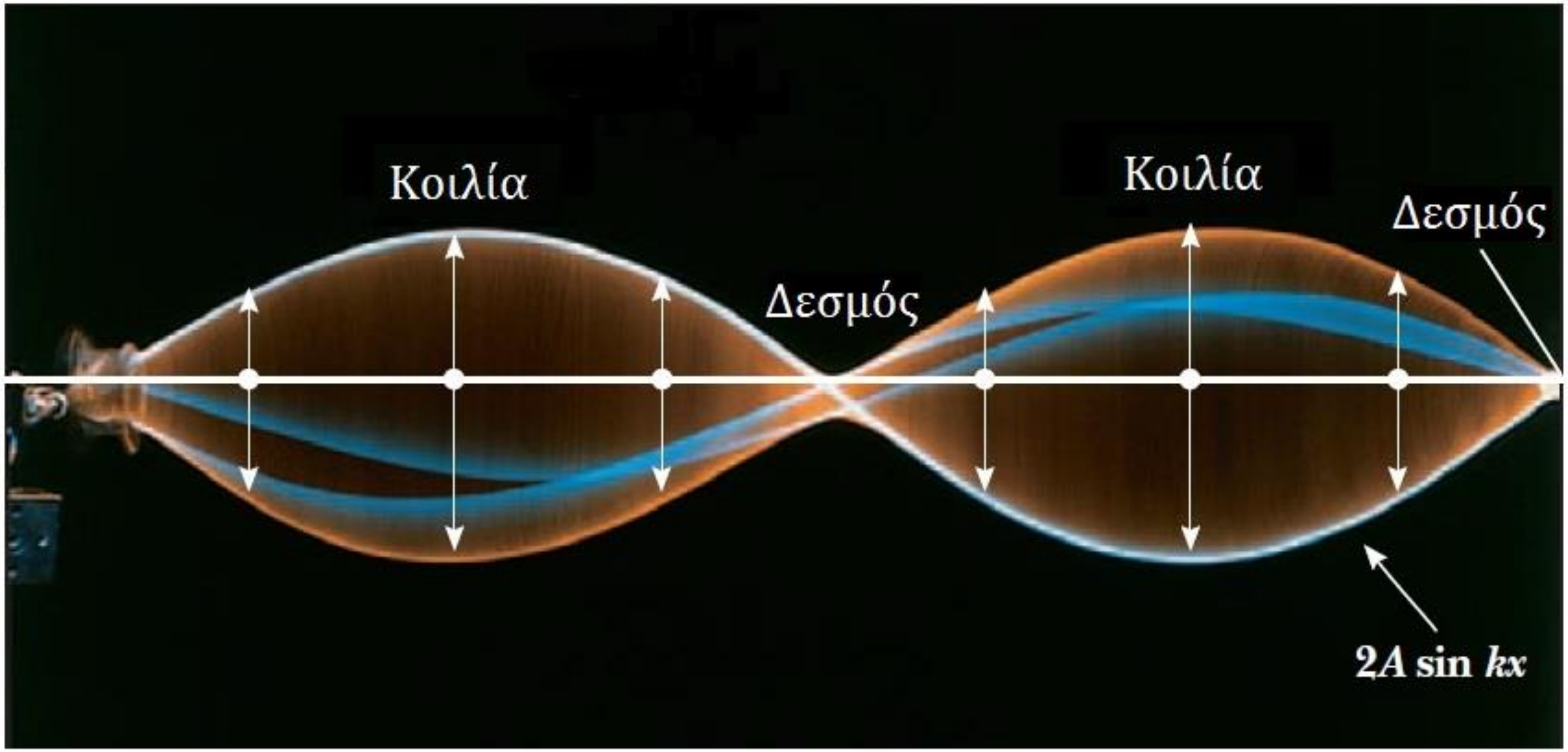
- ***Στάσιμα κύματα***

$$y(x,t) = (2A\sin(kx))\cos(\omega t)$$

- Πότε μηδενίζεται το πλάτος;
  - $kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$
  - Τα σημεία αυτά λέγονται **δεσμοί**
- Πότε μεγιστοποιείται το πλάτος;
  - $kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \; n = 0,1,2,3,\ldots$
  - Τα σημεία αυτά λέγονται **κοιλίες (ή αντιδεσμοί)**

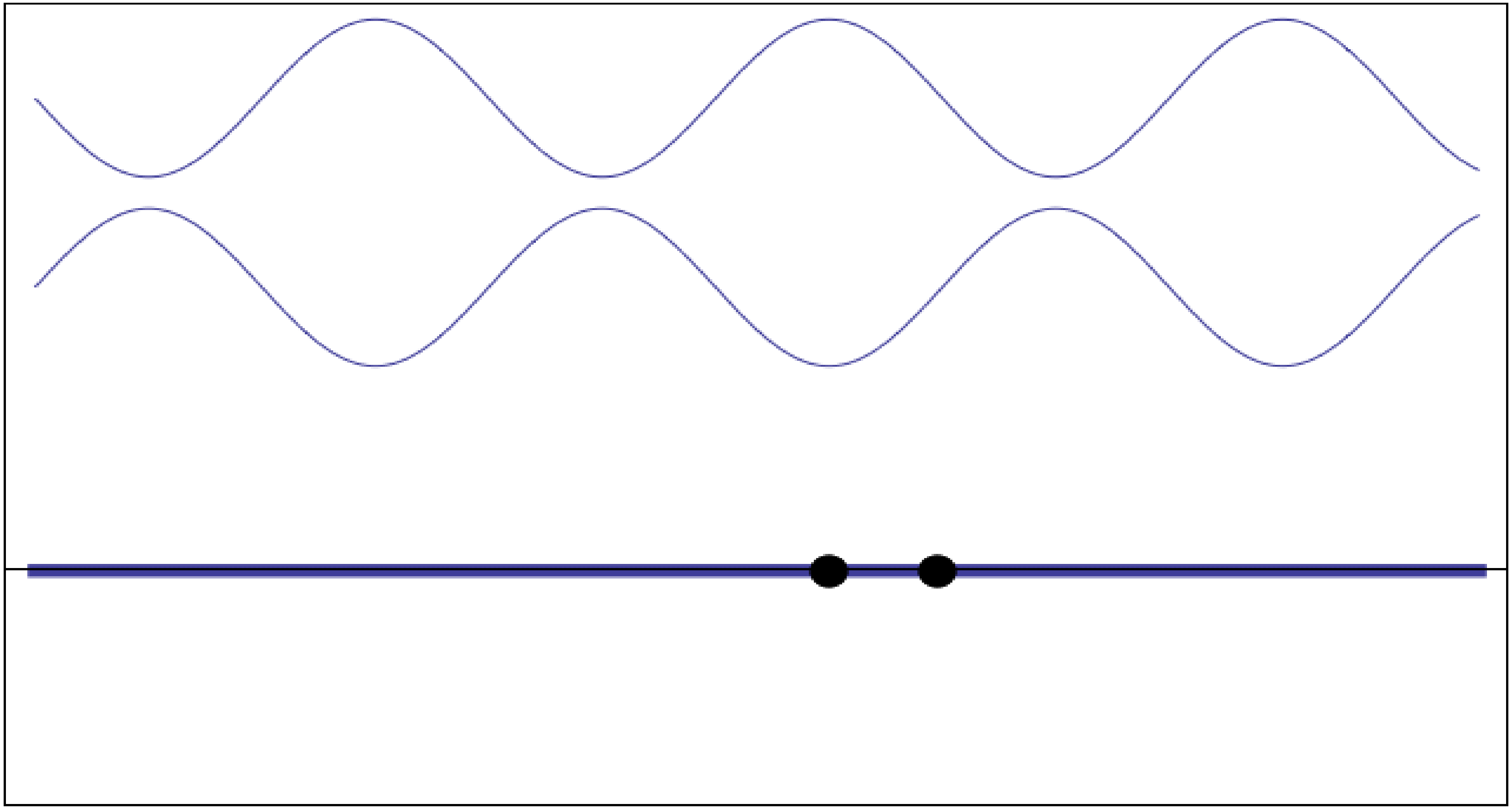
Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***



Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***



Στάσιμα Κύματα

- ***Στάσιμα κύματα***

  - Άρα εύκολα συμπεραίνει κανείς από τα προηγούμενα:

  - Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών = $\frac{\lambda}{2}$
  - Απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών = $\frac{\lambda}{2}$
  - Απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας = $\frac{\lambda}{4}$

Τέλος Διάλεξης