Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

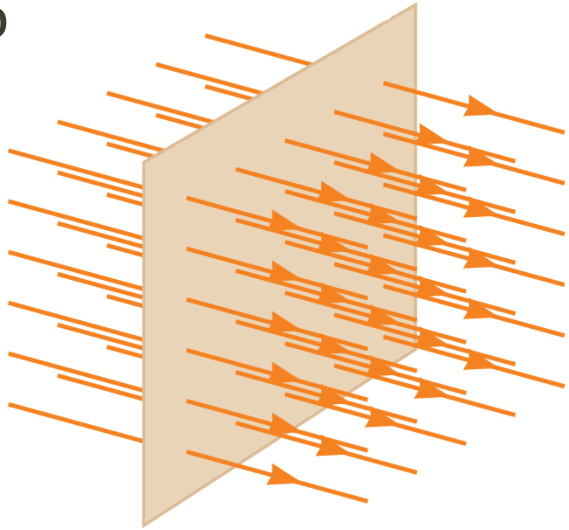
Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Ο νόμος του Gauss

- Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών ποιοτικά
- Τώρα, θα το μελετήσουμε πιο «ποσοτικά»
- Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
  - Οι δυναμικές γραμμές περνούν κάθετα την επιφάνεια εμβαδού A
  - Θυμηθείτε: πυκνότητα γραμμών ανάλογη του μέτρου του πεδίου
  - Ο αριθμός γραμμών είναι ανάλογος του γινομένου EA



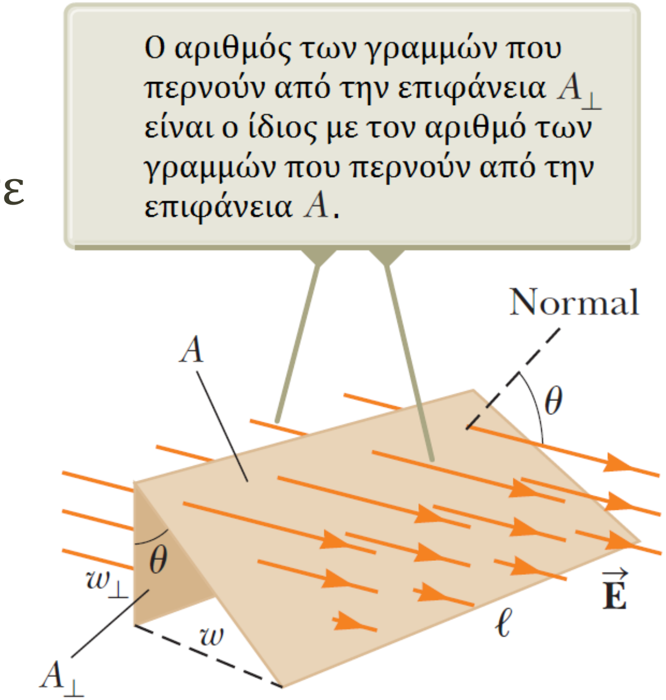
  - Αυτό το γινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** $\boldsymbol{\Phi_E}$

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Αν η επιφάνεια δεν είναι κάθετη τότε η ηλεκτρική ροή δίνεται ως

$$\boldsymbol{\Phi_E = EA_\perp = EA\cos(\theta)}$$

  - Επίσης, το πεδίο μπορεί να μην είναι ομογενές.
    - Μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με την επιφάνεια

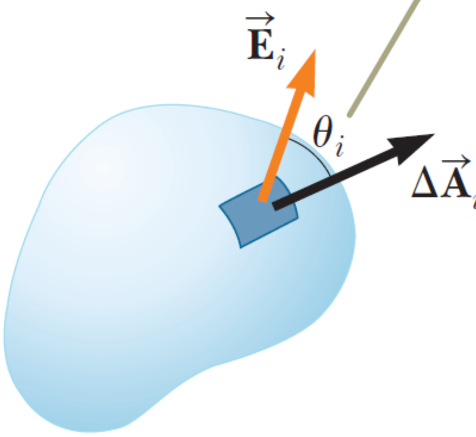


  - Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα για μικρές επιφάνειες με ***σταθερό ηλεκτρικό πεδίο***
  - Το $EA\cos(\theta)$ πρέπει να σας θυμίζει κάτι…
    - Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων!
    - Το E είναι διάνυσμα πράγματι…
    - Το A είναι εμβαδό (αριθμητική τιμή)!!

Ο νόμος του Gauss

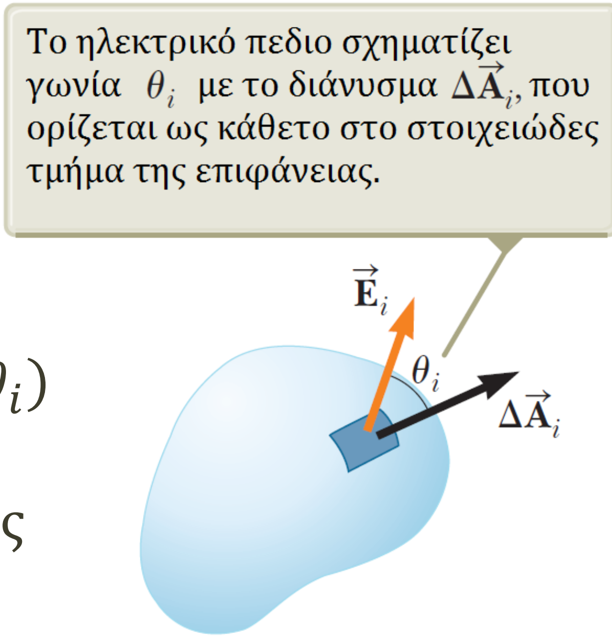
- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας καθένα με εμβαδό ΔΑ
  - Ας ορίσουμε το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$ του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του i-οστού στοιχείου
    - Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού ΔA_i της επιφάνειας
    - Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}_i$ στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$, που ορίζεται ως κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας.



Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια αυτή είναι



$$\Phi_{E_i} = E_i(\Delta A_i)\cos(\theta_i)$$

  - Το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi_{E_i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

    - που είναι το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο

  - Αθροίζοντας την ηλεκτρική ροή για κάθε μικρό στοιχείο

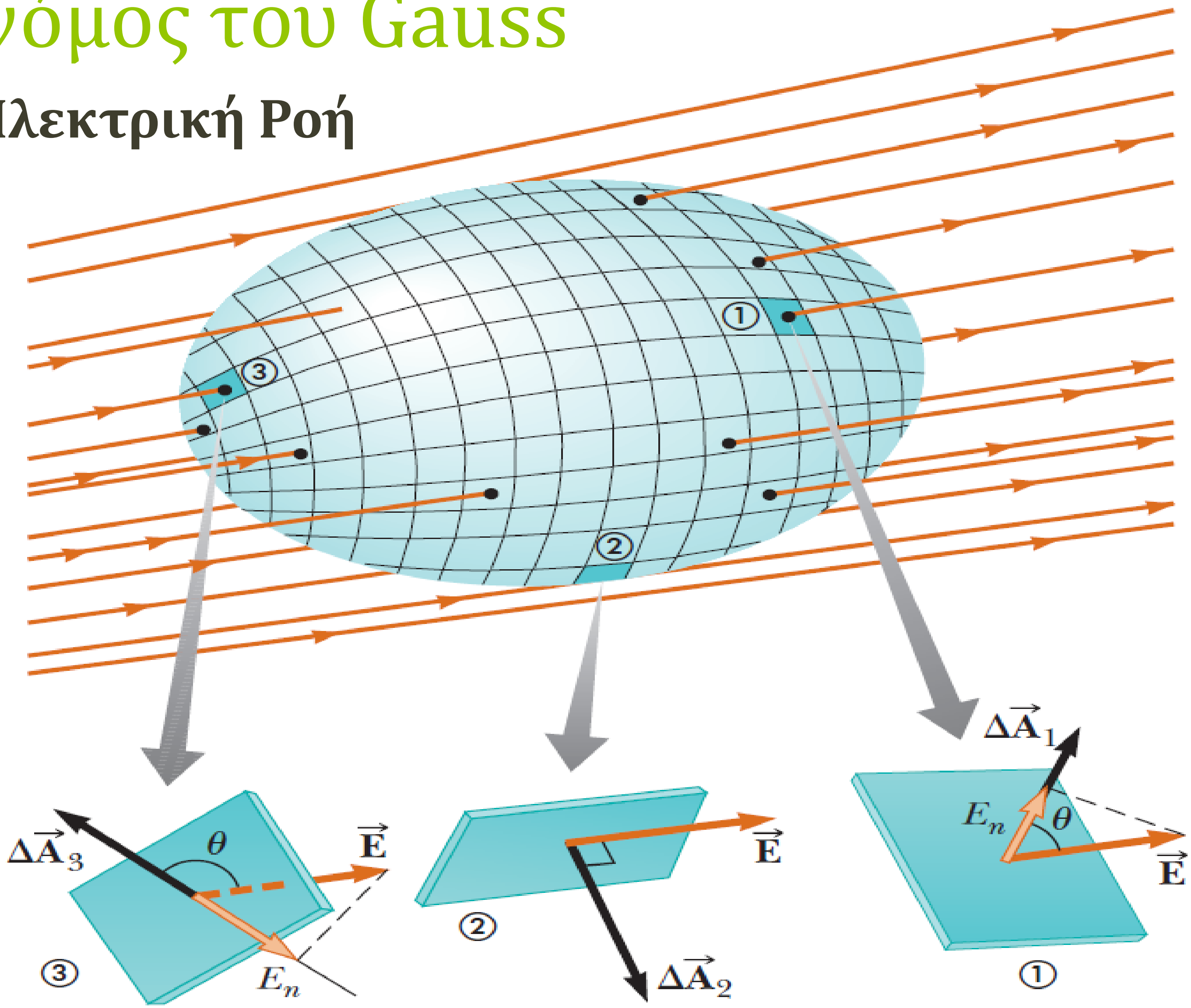
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to dA} \sum_i \Phi_{E_i} = \int_{\epsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\epsilon\iota\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Μας ενδιαφέρουν οι *κλειστές επιφάνειες* για τον υπολογισμό της ροής
    - Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου
      - Π.χ. η επιφάνεια μιας σφαίρας
  - Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**



Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**

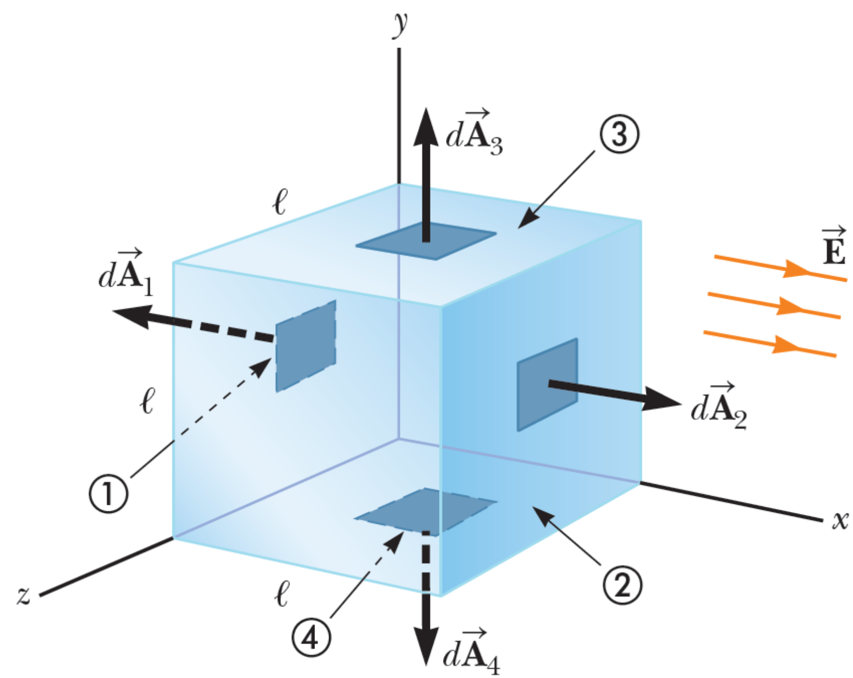
  - Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

με E_n τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
  - Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με προσανατολισμό στο x-άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής ℓ τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο σχήμα. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.



Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

$\vec{E} \perp \vec{A}_3$ $\quad$ $\vec{E} \perp \vec{A}_4$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2 + \overbrace{\int_3 \vec{E}\cdot d\vec{A}_3}^{0} + \overbrace{\int_4 \vec{E}\cdot d\vec{A}_4}^{0}$$

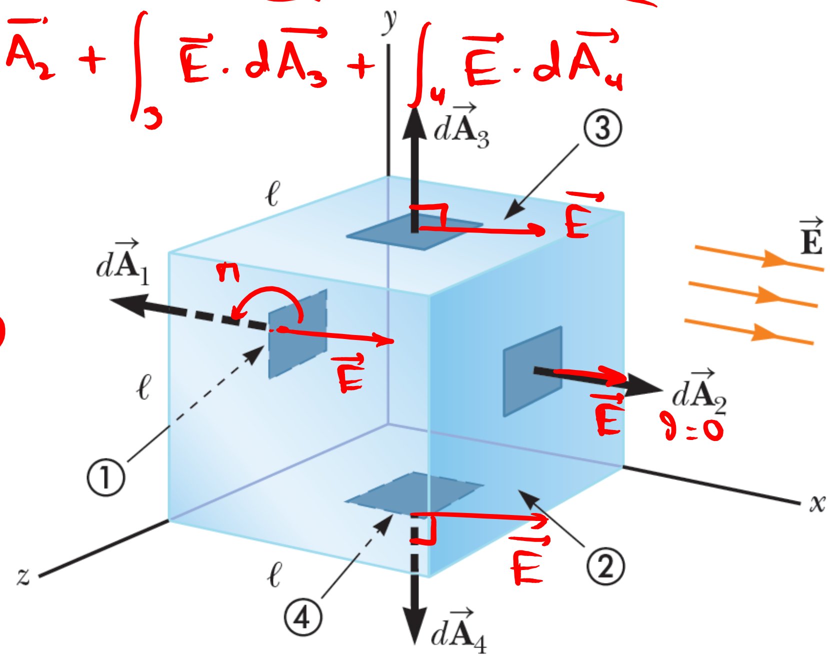
$$= \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2$$

$$= \int_1 E\,dA_1 \cos(\pi) + \int_2 E\,dA_2 \cos 0$$

$$= -E\int_1 dA_1 + E\int_2 dA_2$$

$$= -E\cdot \ell^2 + E\ell^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = 0$$



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και ενός φορτίου που περικλείεται σε αυτήν;
    - Η απάντηση είναι ΝΑΙ, και αυτή η σχέση ονομάζεται ***νόμος του Gauss***
    - Είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη ηλεκτρικών πεδίων
      - Είναι το ισοδύναμο του νόμου του Coulomb για ηλεκτρικά πεδία σημειακών φορτίων, αλλά εφαρμόζεται σε συνεχείς κατανομές φορτίων πολύ πιο εύκολα απ' ότι ο νόμος του Coulomb
      - Μπορεί να εφαρμοστεί σε ***κινούμενα*** φορτία κάθε ταχύτητας
    - Αποτελεί ένα περισσότερο θεμελιώδη νόμο για τα ηλεκτρικά πεδία από το νόμο του Coulomb
    - Η κλειστή επιφάνεια λέγεται πολλές φορές και *γκαουσιανή* (Gaussian)

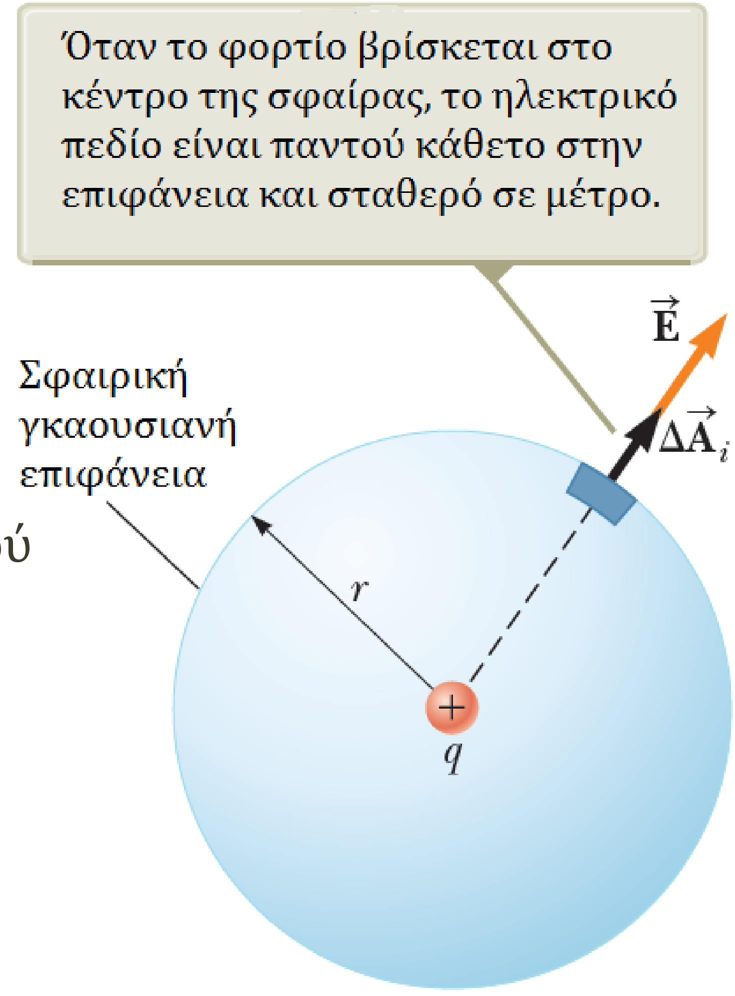
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
  - Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

  - Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας
    - Άρα το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}$
  - Άρα η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
- Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ ισούται με το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας

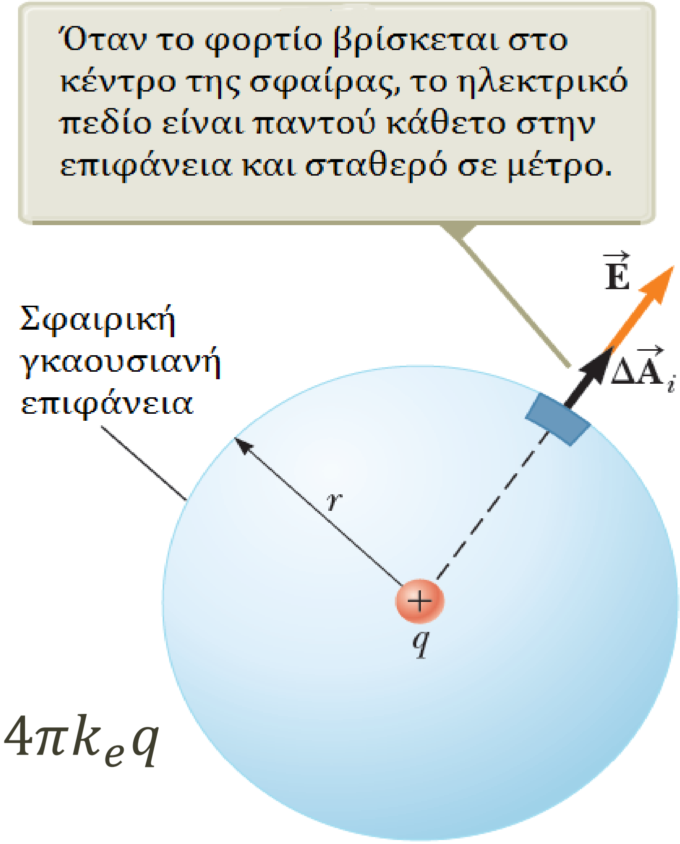
$$\oint dA = 4\pi r^2$$

- Άρα

$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

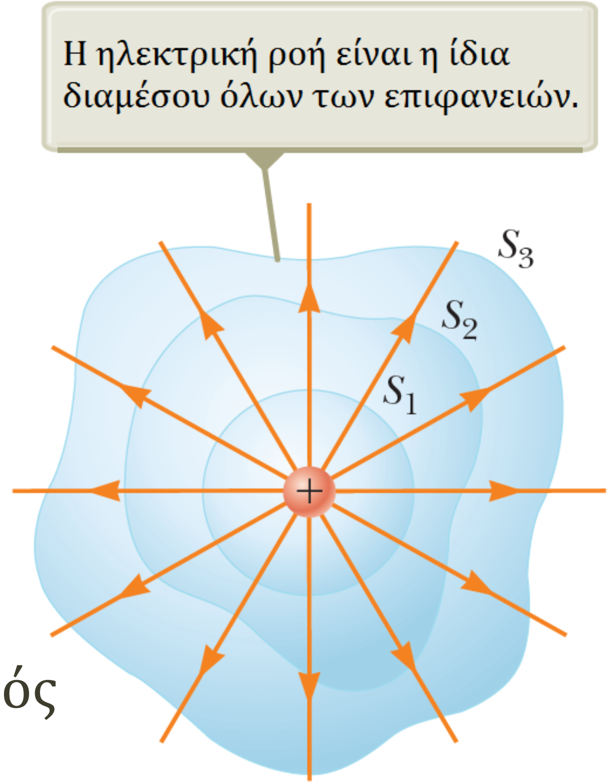
  - Όμως $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$
  - Άρα τελικά

$$\boldsymbol{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$



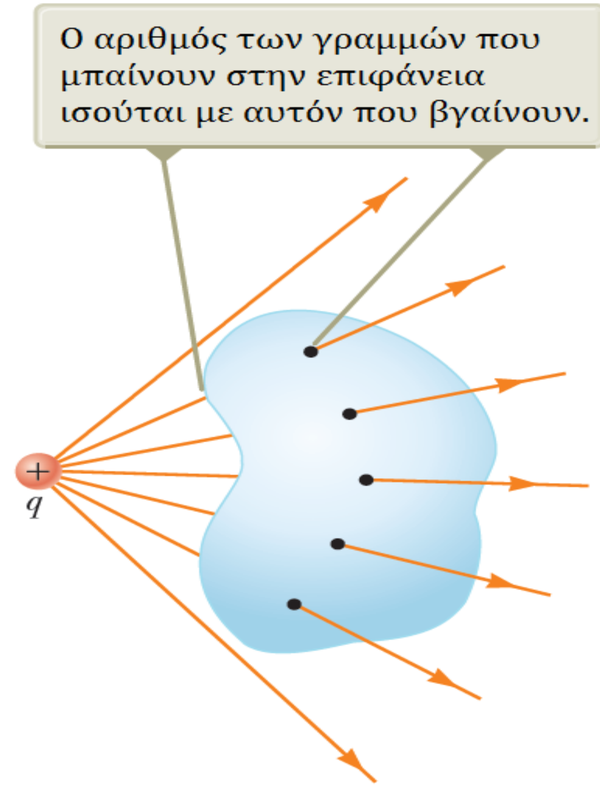
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;
  - Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια
  - Το σχήμα δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες!
  - Η S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$
  - Άρα ***η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\boldsymbol{\Phi_E = q/\epsilon_0}$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.***



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Και τι θα συμβεί το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;
  - Κάθε δυναμική γραμμή που εισέρ-χεται στην επιφάνεια βγαίνει από κάποιο άλλο μέρος της
  - Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν
  - Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας που ***δεν*** περιέχει φορτίο είναι ***μηδέν***!



Ο νόμος του Gauss

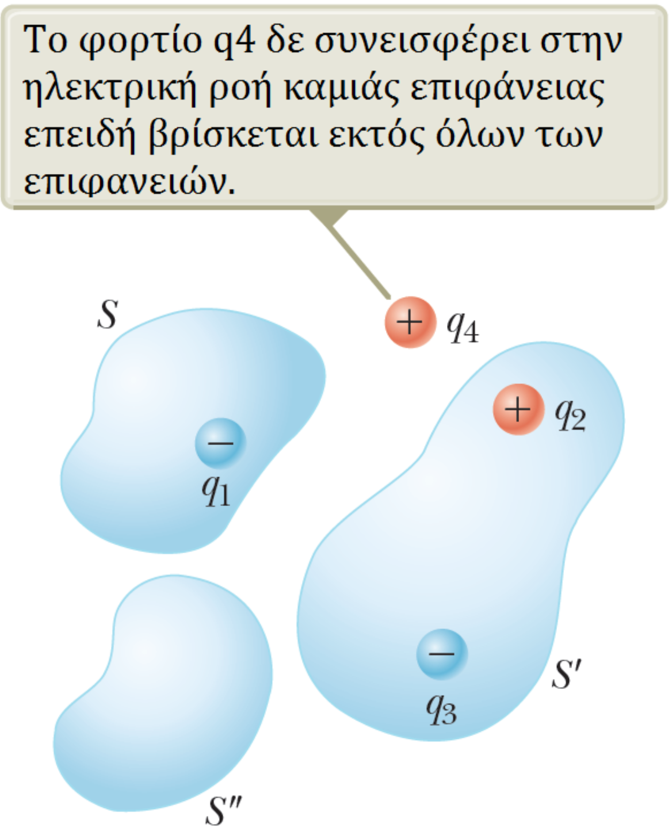
- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ας επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας σε δυο γενικές περιπτώσεις:
  - 1) Πολλά σημειακά φορτία
  - 2) Συνεχής κατανομή φορτίου

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Για πολλά (έστω Μ) σημειακά φορτία, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \oint \sum_{i=1}^{M} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}$$

  - Παράδειγμα:
    - $\Phi_E = q_1/\epsilon_0$ για την επιφάνεια S
    - $\Phi_E = (q_2+q_3)/\epsilon_0$ για την S'
    - $\Phi_E = 0$ για την S''
    - Το φορτίο q4 δε συνεισφέρει ηλεκτρική ροή σε καμιά επιφάνεια



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

όπου $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και q_{in} το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας

- <u>Προσοχή στο εξής</u>: το $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από συνεισφορές από φορτία **τόσο εντός όσο και εκτός** της επιφάνειας!

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί χρήσιμος για την εκτίμηση του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου είναι ***συμμετρική***
  - Αυτό συμβαίνει με κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα $d\vec{A}$ στο ολοκλήρωμα ορίζεται και υπολογίζεται απλά
  - Επιπλέον, πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ εκτός ολοκληρώματος
  - Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, ο νόμος του Gauss ισχύει ακόμα, αλλά δε μας είναι χρήσιμος στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου

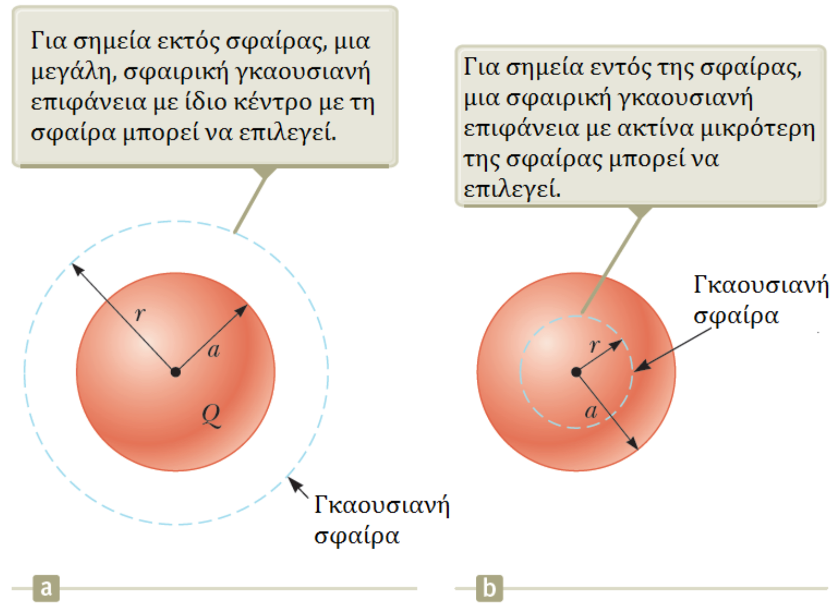
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε μια επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί μια ή περισσότερες από τις παρακάτω συνθήκες:

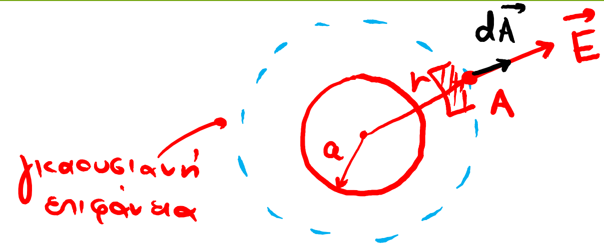
1. **Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω <u>σε όλη</u> την επιφάνεια**
2. **Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο EdA, δηλ. τα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα**
4. **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας *α* έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
  A) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εκτός* της σφαίρας
  B) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εντός* της σφαίρας



Ο νόμος του Gauss



- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
    A) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εκτός* της σφαίρας

Υπάρχει σφαιρική συμμετρία στο πρόβλημα. Επιλέγω σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r. Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1,2).

Άρα

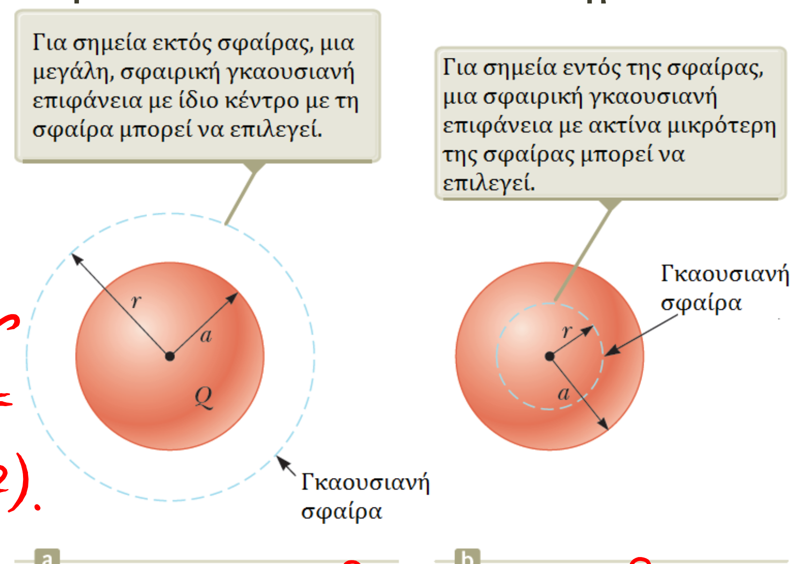
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} E = \dfrac{q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E = k_e \dfrac{q_{in}}{r^2} \\ q_{in} = Q \end{array}\right\} \Rightarrow E = k_e \frac{Q}{r^2}.$$

Ο νόμος του Gauss

$\rho = \dfrac{Q}{V}$: χωρική (1)

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
    B) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εντός* της σφαίρας



Από (1) $\Rightarrow \rho = \dfrac{Q}{V_{σφ.}} = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ (2)

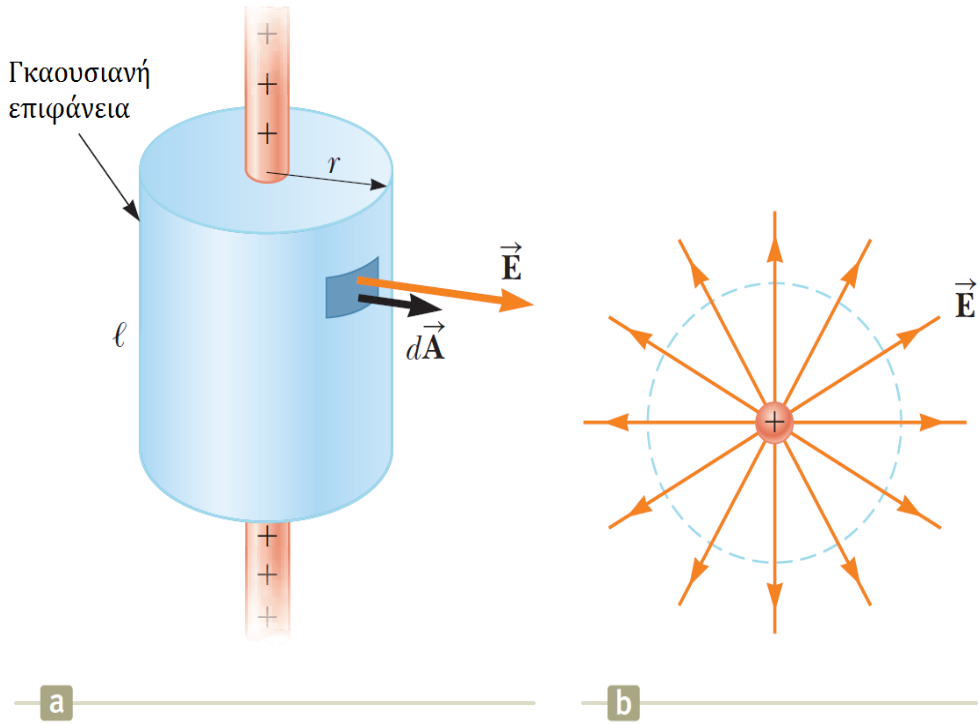
Επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r ($r<a$). Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας r είναι $V_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow q_r = \rho V_r = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$. Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1,2).

Άρα $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \dfrac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \dfrac{q_r}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

Όμως $E = \dfrac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Qr}{a^3}$.

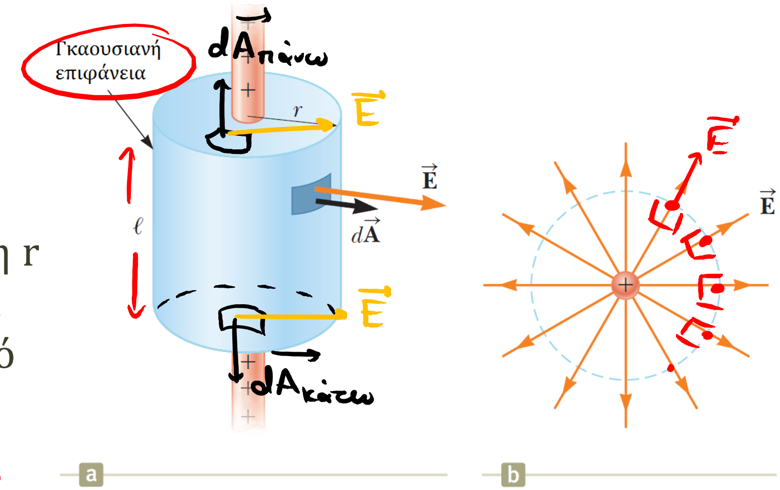
Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκους λ.



Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκος λ.



Επιλέξαμε κυλινδρική επιφάνεια γύρω από τη ράβδο. Μπορεί να δείξει κανείς ότι λόγω του άπειρου μήκους της φορτισμένης ράβδου, το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ είναι σταθερό σε ένα σημείο απόστασης r από αυτήν. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (1).

Στο "καπάκι" και στον "πάτο" της επιφάνειας, $\vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = 0$, άρα ικανοποιείται η συνθήκη (3). Στην πλευρά του κυλίνδρου, $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, άρα —"— —"— —— (2). Οπότε:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 2k_e\frac{\lambda}{r}.$$

Τέλος Διάλεξης