



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

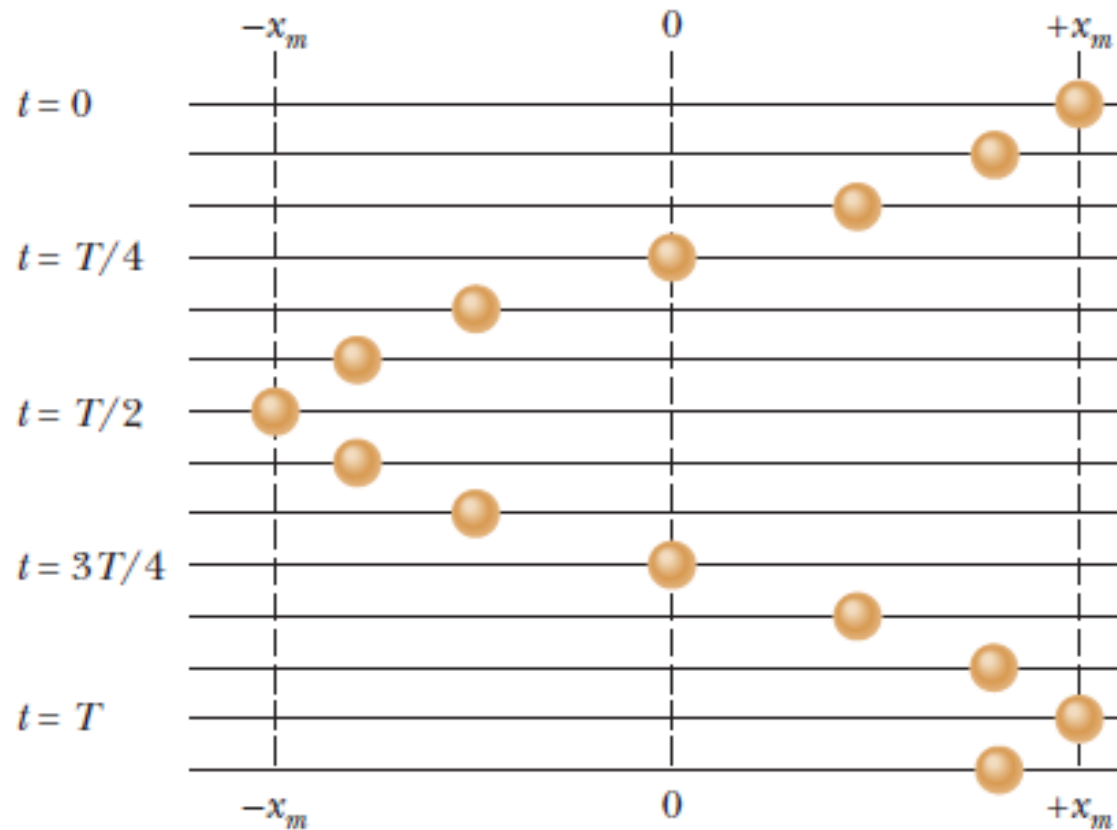
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

- **Περιοδική κίνηση:** ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει σε μια αρχική θέση ανά τακτά σταθερά χρονικά διαστήματα
- Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t + T)$, $T > 0, \forall t > 0$
- **Ορισμός:** Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση λέγεται **Απλή Αρμονική Κίνηση**

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

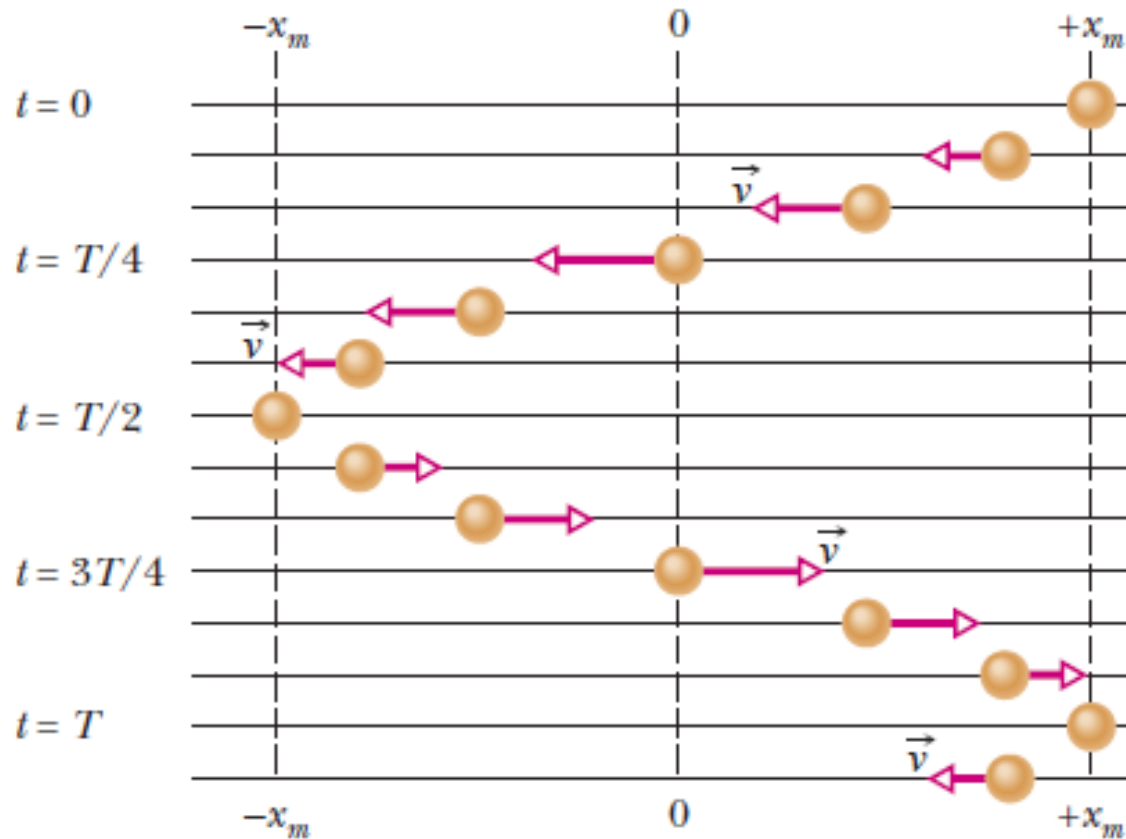
Ένα σώμα ταλαντώνεται
δεξιά κι αριστερά ακολου-
θώντας απλή αρμονική
ταλάντωση.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

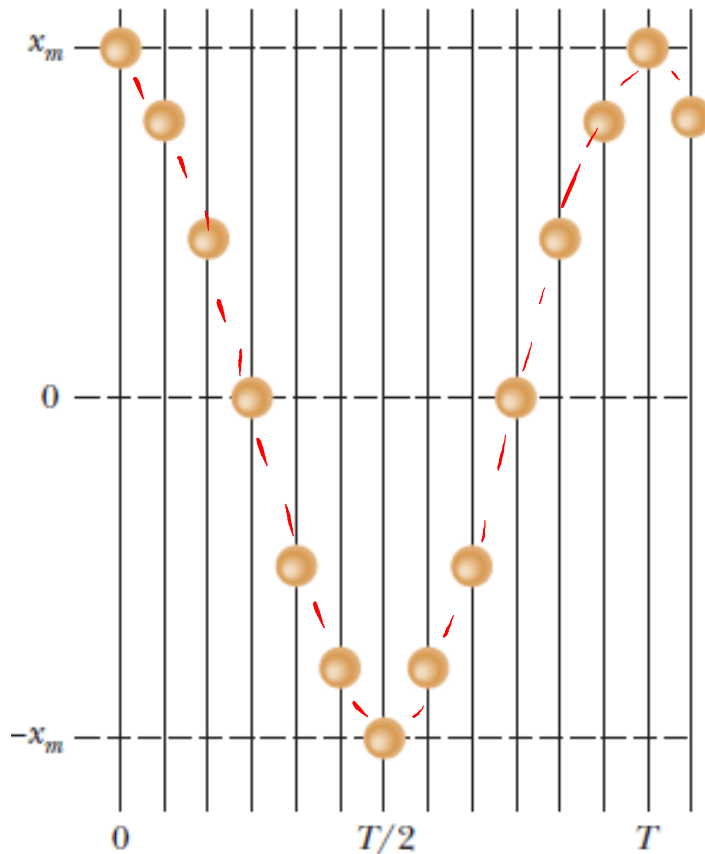
Η ταχύτητά του είναι μηδενική στις ακραίες θέσεις της κίνησης.

Η ταχύτητα είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας $x=0$

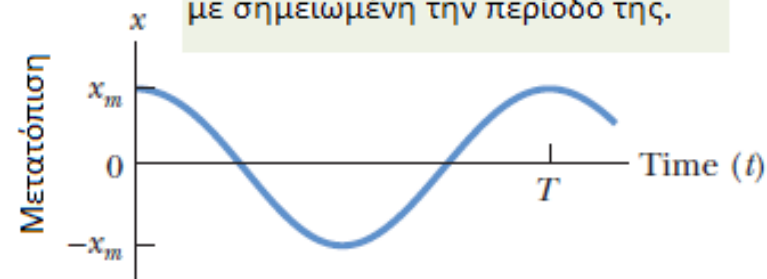


Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

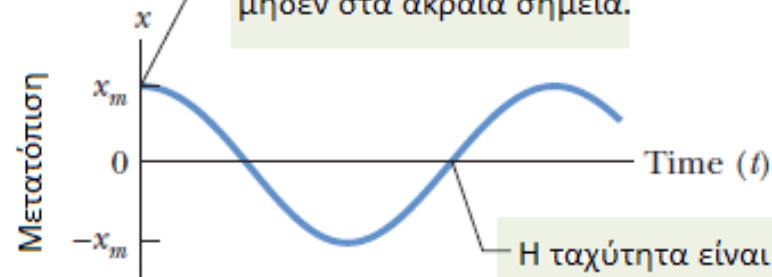
Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!



Η γραφική παράσταση της κίνησης, με σημειωμένη την περίοδο της.



Η ταχύτητα ισουται με μηδέν στα ακραία σημεία.

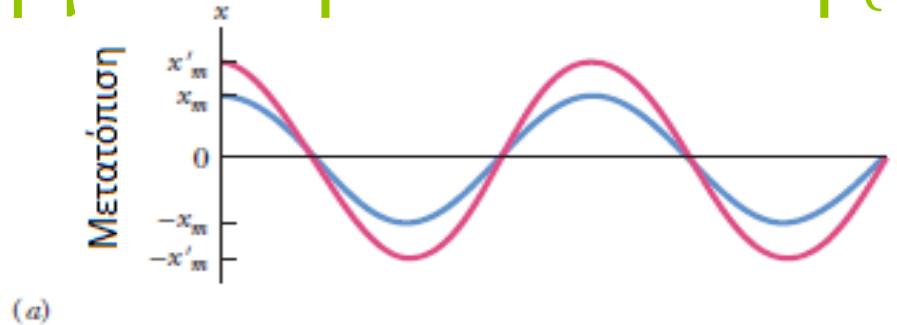


Η ταχύτητα είναι μέγιστη όταν $x=0$.

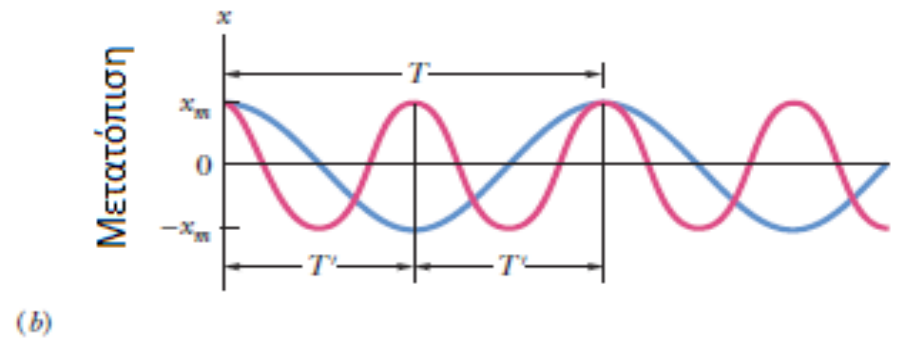
Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)

- 1. $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- 2. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- 3. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
- 4. $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$
- 5. $u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$
- 6. $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

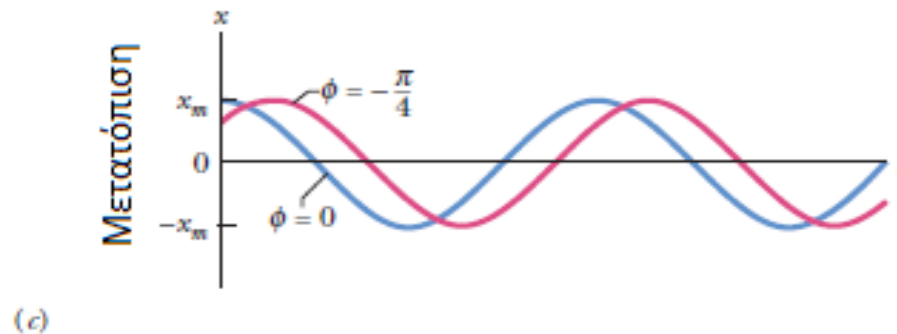
Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Επανάληψη...)



Διαφορετικό
πλάτος A



Διαφορετική
συχνότητα
 ω (και f)

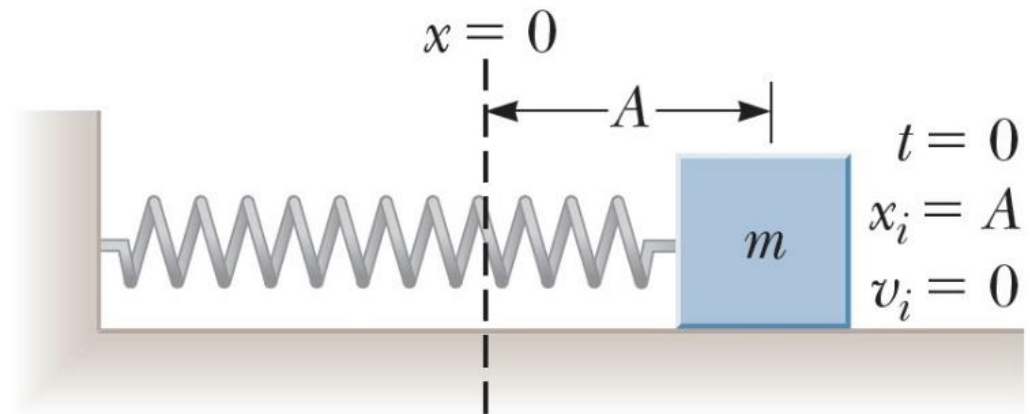


Διαφορετική
φάση ϕ

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
 - ◉ Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
 - ◉ Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
 - ◉ Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
 - ◉ Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

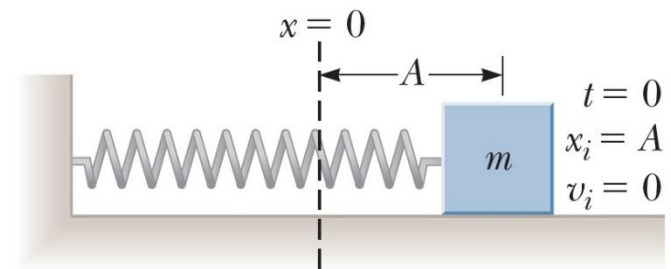
- ◉ Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

- ◉ Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
- ◉ Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- ◉ Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$\text{Α)} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.2}{5}} = \frac{2\pi}{5} \text{ sec} \approx 1.26 \text{ s}$$

$$\text{Β)} \quad v_{\max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Γ)} \quad a_{\max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.05 = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

- Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

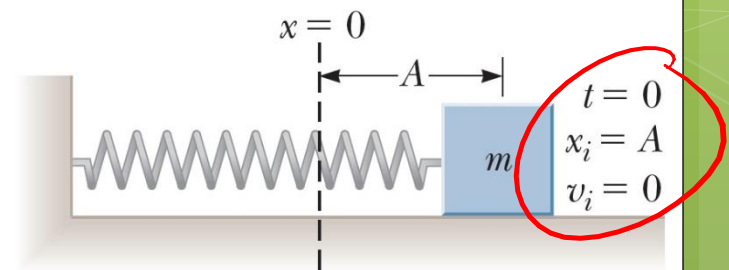
Είναι $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Για $t = 0$, $x(0) = A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \cos \varphi$

Ξέρω ότι $x_i = A = x(0) \Leftrightarrow A \cos \varphi = A \Rightarrow \varphi = 0$.

Οότε $x(t) = 0.05 \cos(5t)$.

Ξέρω $v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -0.25 \sin(5t)$.

— $a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -1.25 \cos(5t)$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

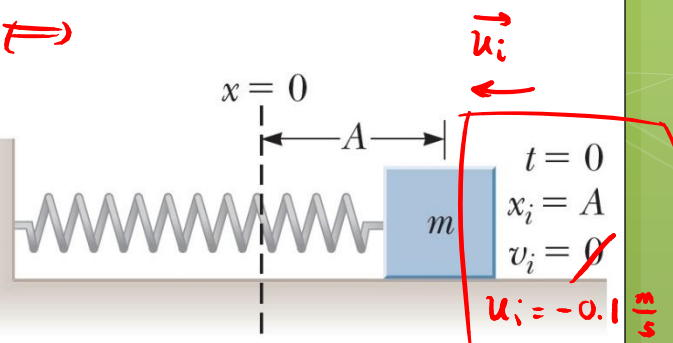
- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$

- Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

Το (Α) ερώτημα δεν αλλάζει ($\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $T \approx 1.26 \text{ s}$)

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } x(0) &= A \cos(5 \cdot 0 + \varphi) = A \cos(\varphi) = x_i \quad (1) \\ u(0) &= -\omega A \sin(5 \cdot 0 + \varphi) = -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x(0) &= A \cos(\varphi) = x_i \\ u(0) &= -\omega A \sin(\varphi) = -0.1 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} & \text{(:)} \\ & \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(:)} \Rightarrow \frac{-\cancel{\omega A} \sin \varphi}{\cancel{A} \cos \varphi} &= \frac{-0.1}{x_i} \Leftrightarrow -\omega \tan \varphi = \frac{-0.1}{x_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tan \varphi &= \frac{0.1}{x_i \cdot \omega} = 0.4 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(0.4) \approx 0.12 \pi \end{aligned}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1 \text{ m/s}$
 - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

$$\text{Ξέρω ότι } u_{\max} = \omega A$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow A = \frac{x_i}{\cos(\varphi)} = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \approx 0.054 \text{ m} \quad \left. \vphantom{\frac{0.05}{\cos(0.12\pi)}} \right\} \Rightarrow u_{\max} = 5 \cdot 0.054 \approx 0.27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

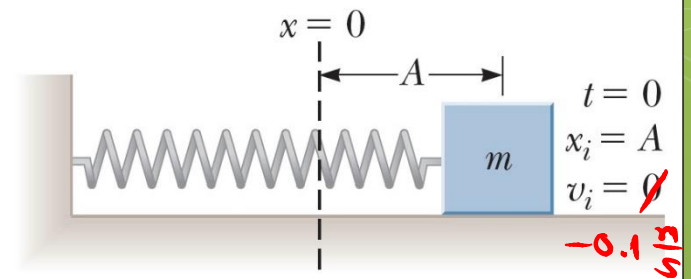
$$\text{Αντίστοιχα, } a_{\max} = \omega^2 A = 5^2 \cdot 0.054 \approx 1.35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Οι εξισώσεις κίνησης:

$$x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi)$$

$$u(t) = -0.27 \sin(5t + 0.12\pi)$$

$$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

- Κινητική Ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

- Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

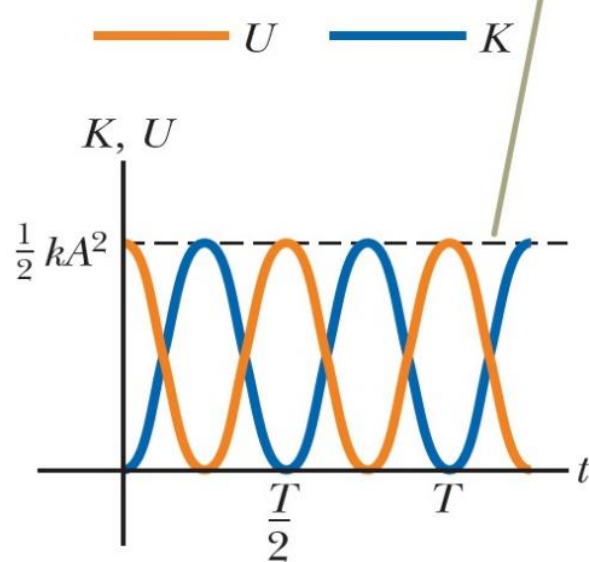
- Παρατηρήστε ότι είναι πάντα θετικές!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή
 - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

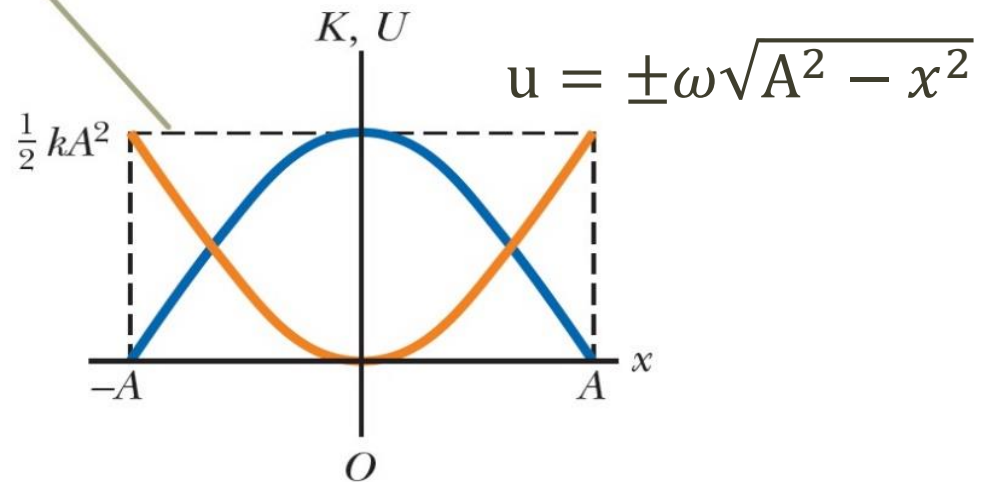
Το άθροισμα $K + U$ είναι σταθερό και στα δυο γραφήματα

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



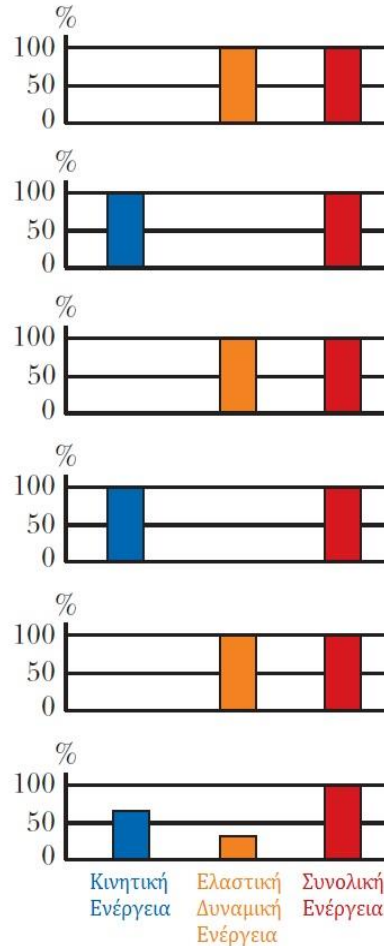
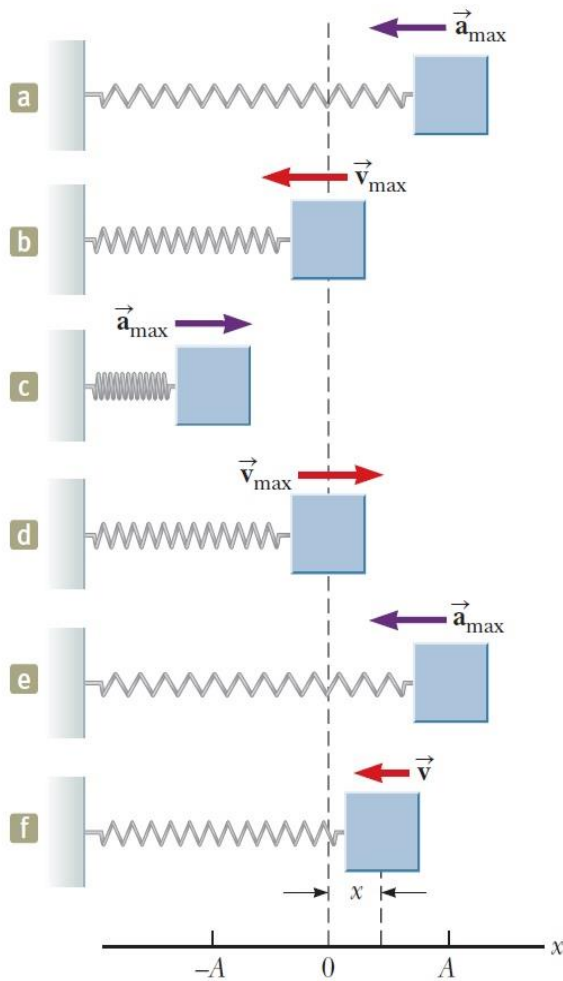
a

— $U = \frac{1}{2}kx^2$ — $K = \frac{1}{2}mv^2$



b

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

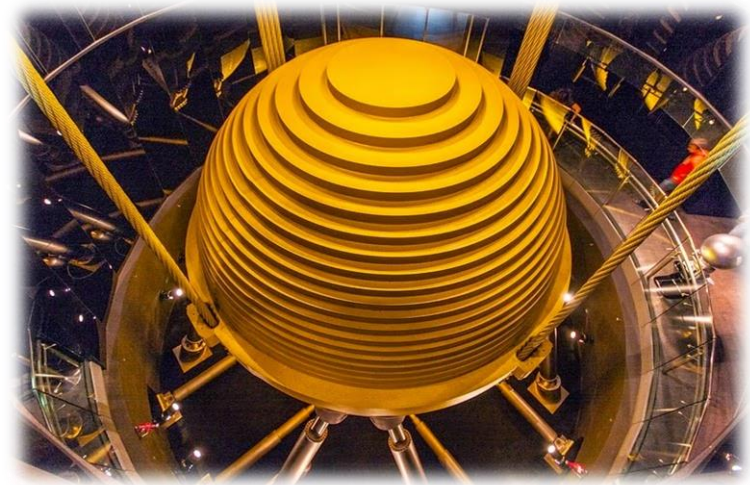


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - ◉ A) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - ◉ B) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Παράδειγμα – Λύση:

- Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
- Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
- Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισοροπίας?

$$A) E_{\text{μηχ}} = K + U_{\text{ελ.}} = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \left. \vphantom{E_{\text{μηχ}}} \right\} \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = 0 + \frac{1}{2} k A^2 \quad ①$$

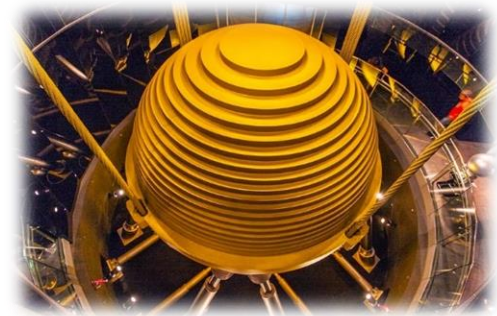
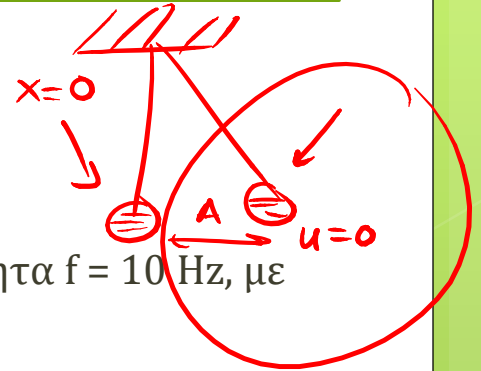
Όταν $x = A$, τότε $u_{x=A} = 0$

$$\equiv \text{εράυε ότι } f = 10 \text{ Hz, άρα } \omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow (2\pi f)^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow k = m(2\pi f)^2 \quad ②$$
$$= 1.07 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Άρα $① \stackrel{②}{\Rightarrow} E_{\text{μηχ}} = 2.15 \cdot 10^7 \text{ J}$

Β) Όταν $x = 0$, τότε $u = u_{\text{max}}$ και $U_{\text{ελ.}} = 0$

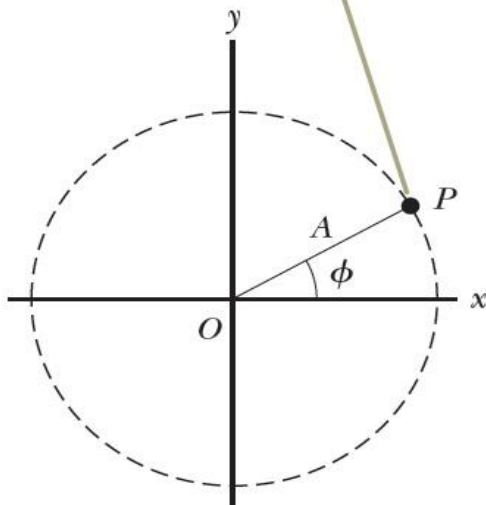
$$\text{Άρα } E_{\text{μηχ}} = K = \frac{1}{2} m u^2 = 2.15 \cdot 10^7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \approx 12.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

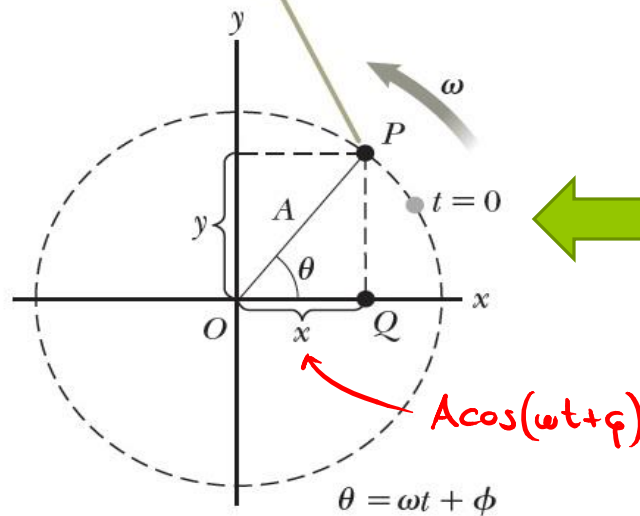
- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



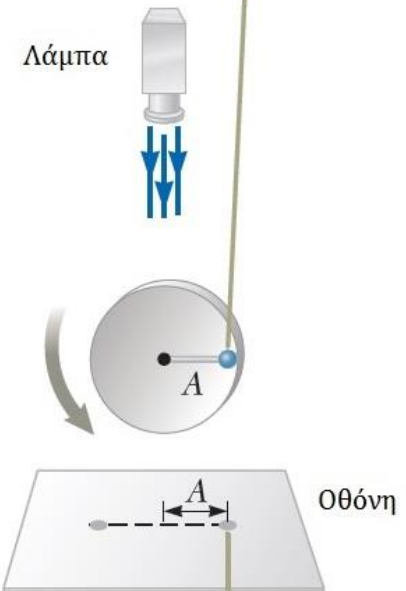
a

Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t , οι x -συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



b

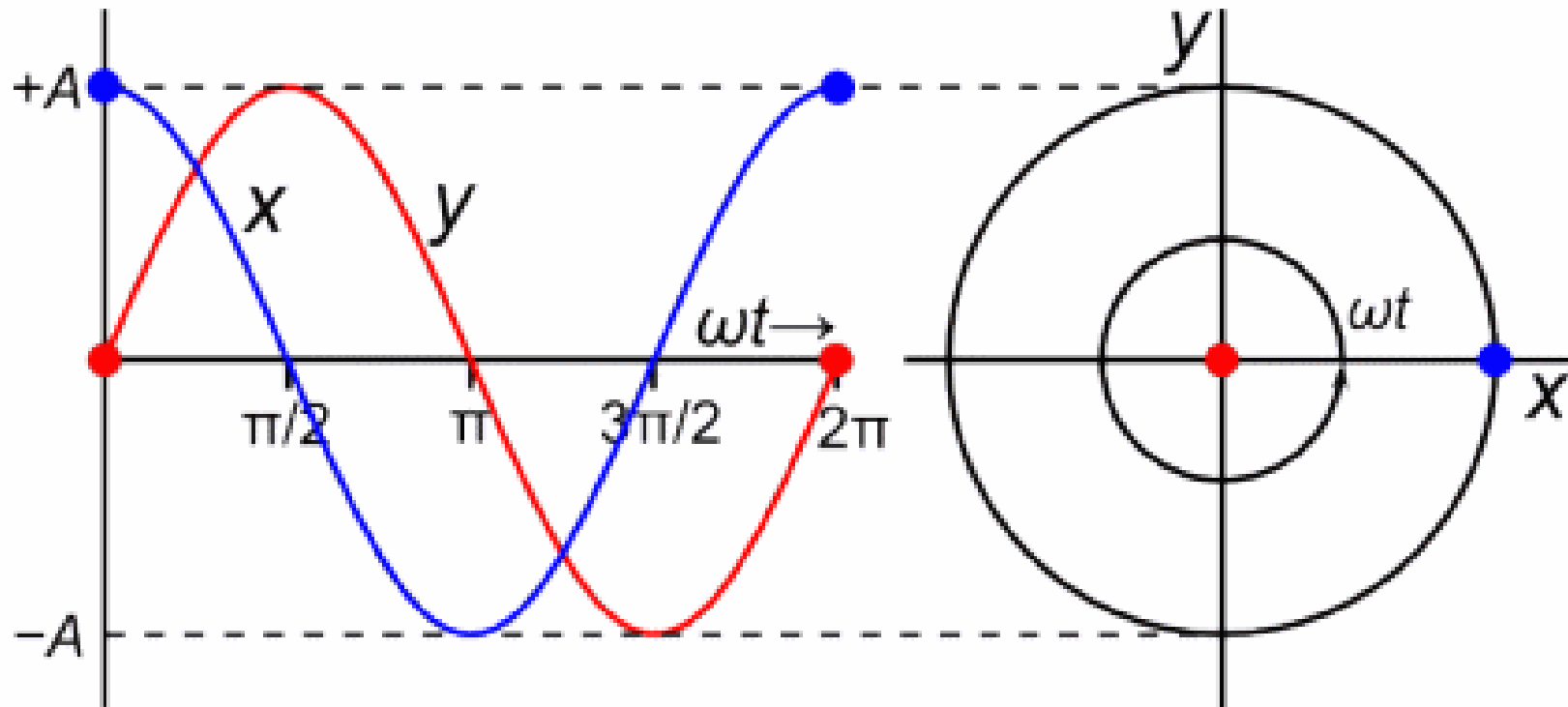
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$F_{\varepsilon\pi} = ma \leftrightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

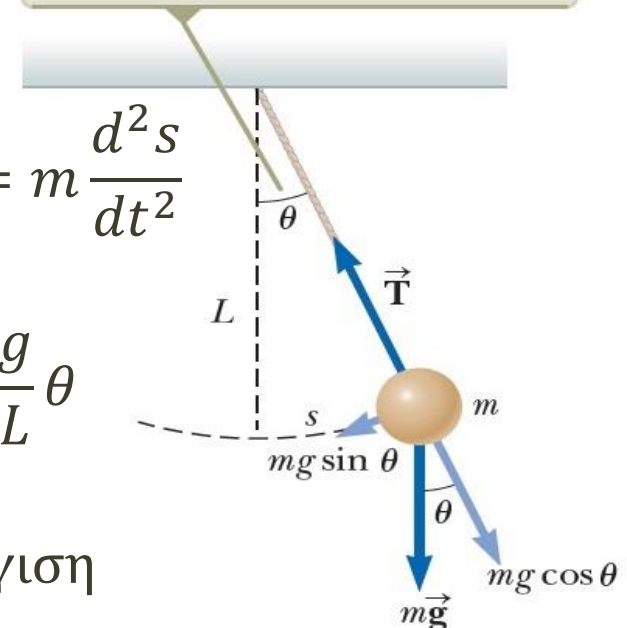
- Επειδή $s = L\theta$,
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \approx -\frac{g}{L} \theta$$

όταν θ μικρό.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση
$$\sin(\theta) \approx \theta$$

για μικρές τιμές του θ (σε rad)

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!! ☺
 - Άρα το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρό θ !

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

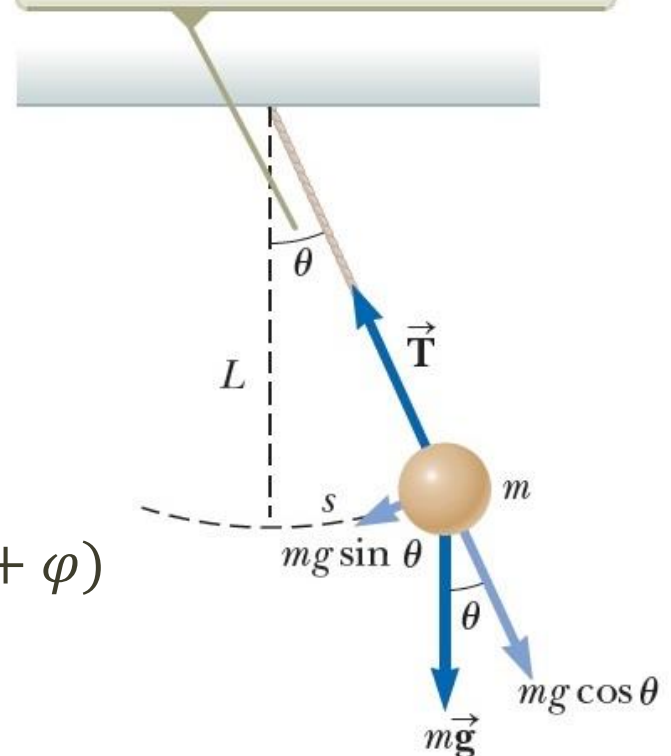
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

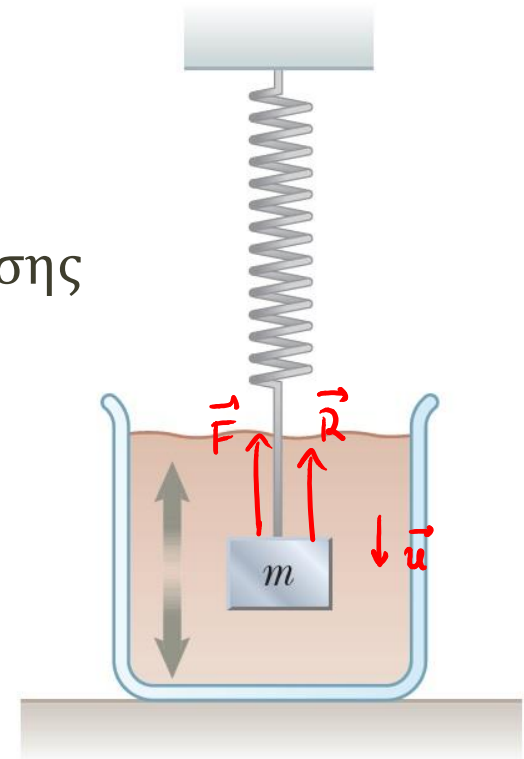
- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι φθίνουσα ταλάντωση

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
 - τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b
- Δρα αντίθετα στην ταχύτητα του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

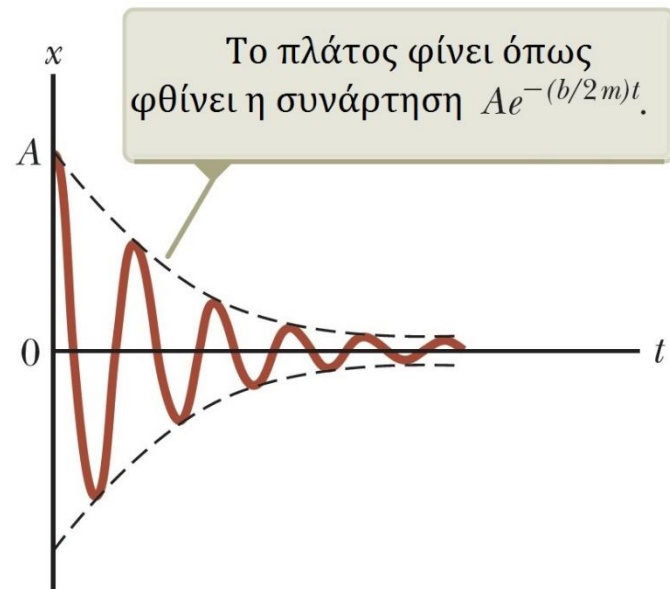
- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (b μικρό):

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

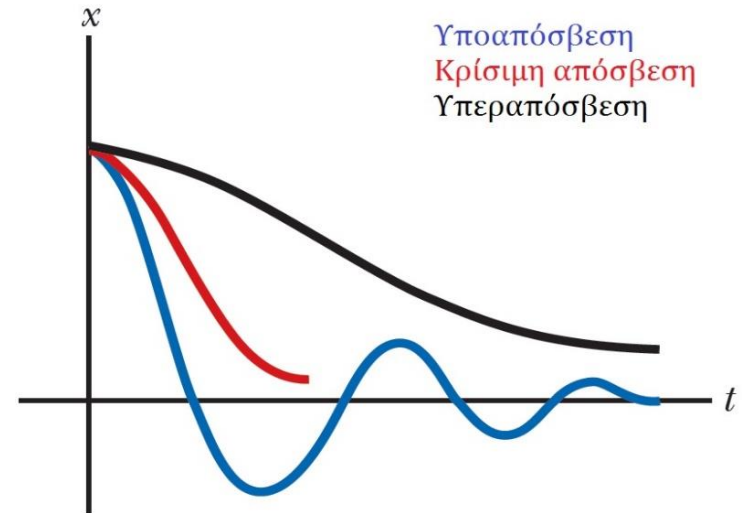
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

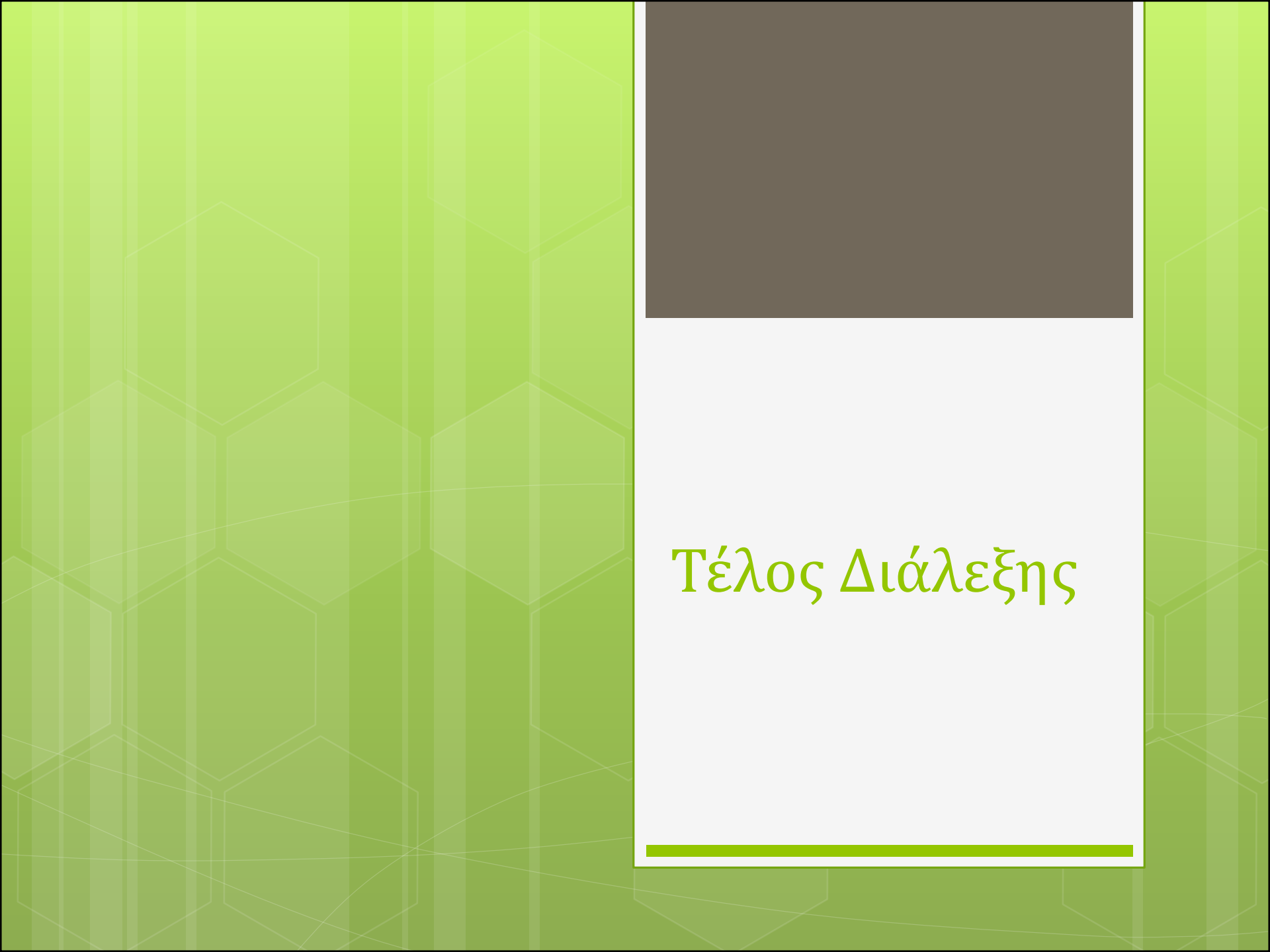
• Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

• Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t)$ δεν ισχύει.





Τέλος Διάλεξης