



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

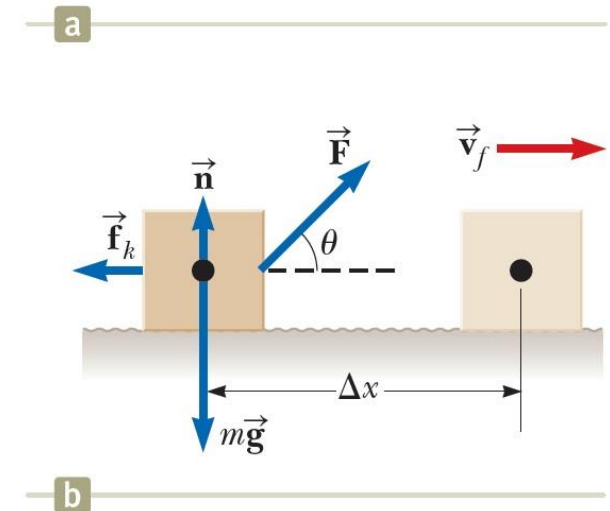
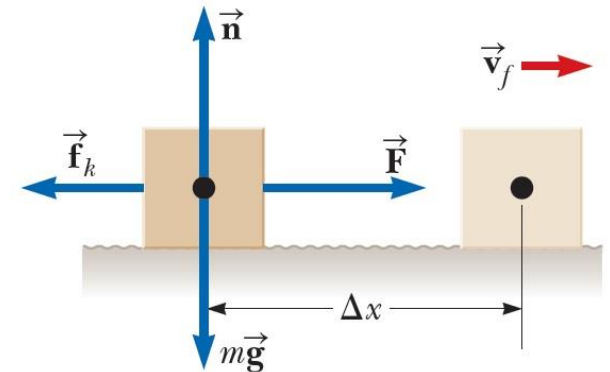
Ενέργεια Συστήματος

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

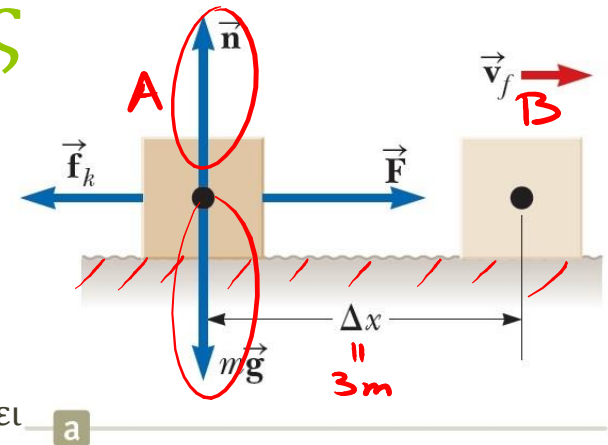
- ◉ Α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15
- ◉ Β) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- Α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $0.15 = \mu_k$



Σύστημα : σώμα + επιφάνεια $\Rightarrow \mu$ - απομονωμένο

$$\Sigma W_{\text{other}} = W_g = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} \Leftrightarrow W_g = K_B - K_A + \Delta E_{\text{int}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_g = \underbrace{K_B - K_A}_0 + f_k \cdot d \quad (1)$$

λοχύει $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n = mg \quad (2)$

$\equiv$ έραφε οα $f_k = \mu_k \cdot n \stackrel{(2)}{=} \mu_k \cdot mg \quad (3)$

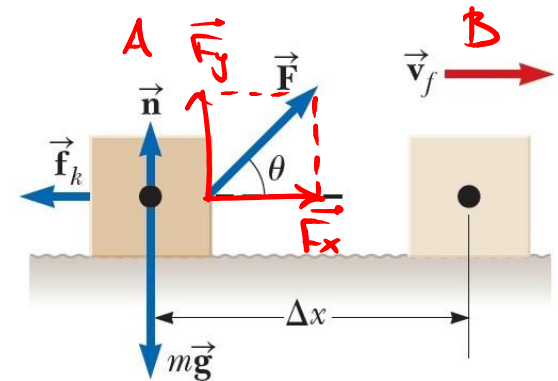
$$\textcircled{1} \stackrel{(3)}{=} W_g = K_B + m\mu_k \cdot g \cdot d = \frac{1}{2} m u_B^2 + \mu_k m g d = W_F = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} =$$

$$= 12 \cdot 3 = 36 \text{ J} \Leftrightarrow 36 = \frac{1}{2} 6 \cdot u_B^2 + 0.15 \cdot 6 \cdot 9.8 \cdot 3 \Rightarrow u_B = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- B) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



$$\text{Ισχύει: } W_a = \Delta K + \Delta E_{int} = W_F \Leftrightarrow F \cdot \cos \theta \cdot \Delta x = K_B - \cancel{K_A} + \Delta E_{int} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F \cos \theta \cdot \Delta x = K_D + \Delta E_{int} \quad (1)$$

$$\Xi \text{ έραφε ότι } \Delta E_{int} = f_k \cdot \Delta x \text{ και } \Xi \text{ έραφε ότι } \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_y + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n + F_y - mg = 0 \Rightarrow n = mg - F_y \quad (2)$$

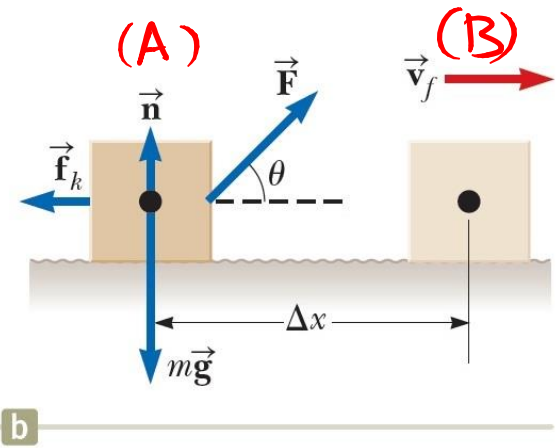
$$\Xi \text{ έραφε ότι } f_k = \mu_k \cdot n \stackrel{(2)}{=} \mu_k (mg - F \sin \theta) \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} F \cos \theta \cdot \Delta x = K_B + \mu_k (mg - F \sin \theta) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα - Λύση:

- ◉ Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.
- ◉ Β) Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποια θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;



$$\Rightarrow K_B = F \cos \theta \cdot \Delta x - \mu_k m g \cdot \Delta x + \mu_k F \sin \theta \cdot \Delta x = K_B(\theta)$$

Για να βρούμε το βέλτιστο θ , πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{d\theta} K_B(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta} (F \cos \theta \cdot \Delta x - \mu_k m g \Delta x + \mu_k F \sin \theta \cdot \Delta x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -F \sin \theta \cdot \Delta x + \mu_k F \cos \theta \cdot \Delta x = 0$$

$$\Leftrightarrow F \sin \theta \cancel{\Delta x} = \mu_k F \cos \theta \cancel{\Delta x} \Leftrightarrow \sin \theta = \mu_k \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \mu_k \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) \approx 8.5^\circ$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Αν μια μη-συντηρητική δύναμη δρα σε ένα απομονωμένο σύστημα, τότε

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$$

$$\Delta E_{mech} = -\Delta E_{int}$$

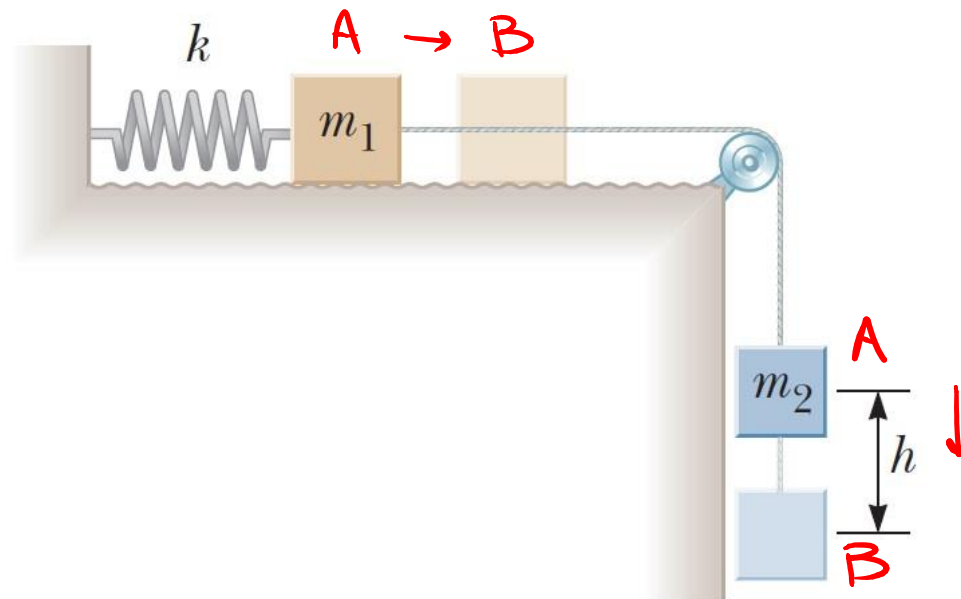
- Για ένα μη-απομονωμένο σύστημα,

$$\sum W_{other\ forces} = W = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Παράδειγμα:

- Δυο σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και ανελαστικό σχοινί που περνά από τροχαλία χωρίς τριβές. Το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές και συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k . Το σύστημα θεωρείται αρχικά σε ηρεμία. Αν το σώμα μάζας m_2 πέφτει κατά απόσταση h πριν έρθει σε ηρεμία, υπολογίστε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας m_1 και της επιφάνειας.



Διατήρηση της Ενέργειας

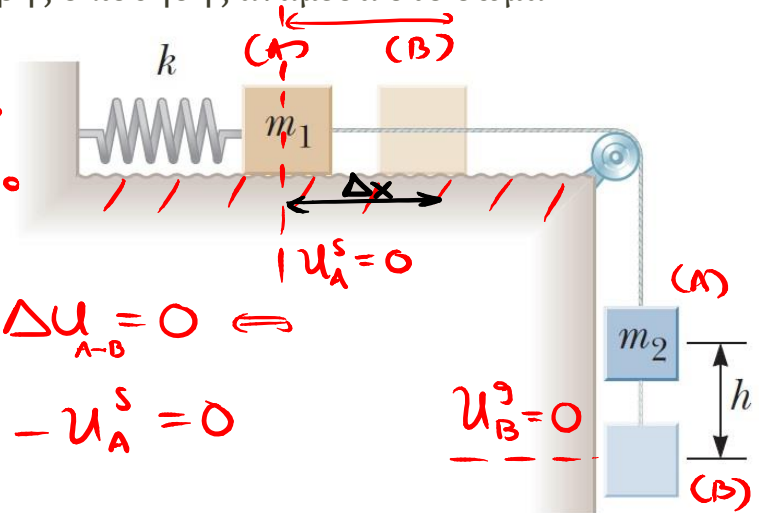
• Παράδειγμα – Λύση:

- σώμα μάζας m_1 σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές και συνδέεται με ελατήριο, το σύστημα θεωρείται αρχικά σε ηρεμία, σώμα μάζας m_2 πέφτει κατά απόσταση h πριν έρθει σε ηρεμία, υπολογίστε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας m_1 και της επιφάνειας.

$$• U = mgy$$

$$• f_k = \mu_k \cdot n$$

Σύστημα: σώμα m_1 , σώμα m_2 , Γη, ελατήριο
και η επιφάνεια που καίεται το
σώμα m_1 : απομονωμένο!



$$\Delta E : \Delta E_{\Sigma \gamma \Sigma}^{A-B} = 0 \Leftrightarrow \Delta K_{A-B} + \Delta E_{int}^{A-B} + \Delta U_{A-B} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{K_B} - \cancel{K_A} + \Delta E_{int} + U_D^g - U_A^g + U_B^s - U_A^s = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{int} + \cancel{U_B^g} - \cancel{U_A^g} + U_B^s - \cancel{U_A^s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{int} - \cancel{U_A^g} + U_B^s = 0 \Leftrightarrow f_k \cdot \Delta x - U_A^g + U_D^s = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_k \underbrace{\Delta x}_h - m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2 = 0 \Leftrightarrow f_k \cdot h - m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 g \underbrace{\mu_k}_h \cdot h - m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g}}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

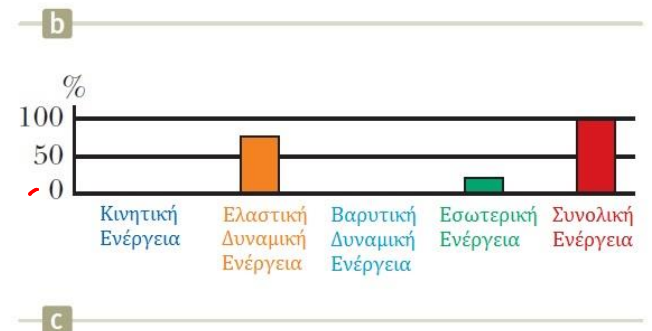
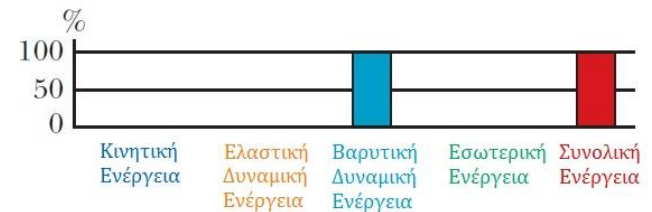
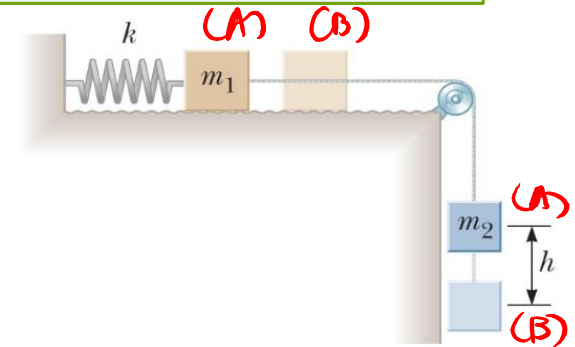
Παράδειγμα:

- Αναγνωρίστε τη διάταξη του προηγούμενου συστήματος που ανταποκρίνεται σε κάθε γράφημα ενέργειας

a → αρχική θέση ηρεμίας (A)

b → ενδιαφέρουσα κατάσταση (με κίνηση)

c → τελική θέση ηρεμίας (B)



Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίζουμε ότι **έργο == μεταφορά ενέργειας**
- Ερώτημα: Πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια?
 - Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να κινεί ένα ασανσέρ μάζας 1500 kg για 5 ορόφους, έχει μεγάλη σημασία αν ο κινητήρας το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! ☺
- Το «πόσο γρήγορα» υποδηλώνει ένα ρυθμό
 - Ρυθμό μεταφοράς ενέργειας == **ισχύς P (Power)**

$$P = \frac{dE}{dt}$$

- Μονάδα μέτρησης: 1 Watt = 1 J/s

Διατήρηση της Ενέργειας

- Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο **ρυθμός παραγωγής έργου**

- **Μέση ισχύς**

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

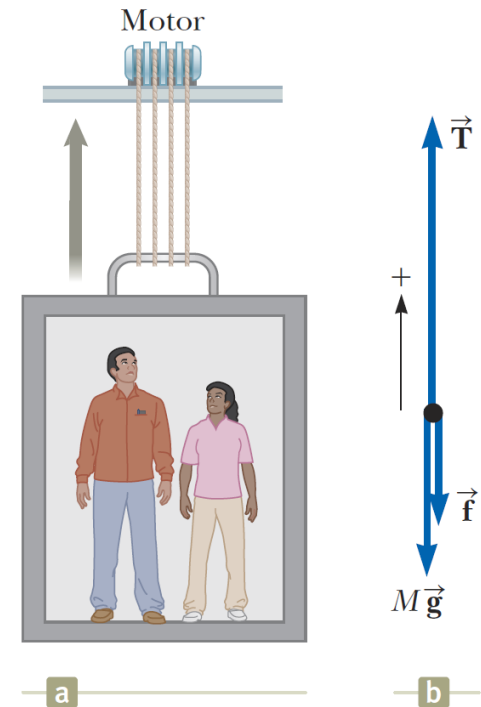
- **Στιγμιαία ισχύς**

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1600 kg και μεταφέρει επιβάτες με συνολική μάζα 200 kg. Μια σταθερή δύναμη τριβής 4000 N αντιστέκεται στην κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.
- ◉ Α) Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας του ασανσέρ για να σηκώσει το ασανσέρ και τους επιβάτες του με σταθερή ταχύτητα $u = 3 \text{ m/s}$?
- ◉ Β) Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας τη στιγμή που ο ανελκυστήρας έχει ταχύτητα u , αν επιταχύνει τον ανελκυστήρα με σταθερή επιτάχυνση $a = 1 \text{ m/s}^2$ προς τα πάνω?



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1600 kg και μεταφέρει επιβάτες με συνολική μάζα 200 kg. Μια σταθερή δύναμη τριβής 4000 N αντιστέκεται στην κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.
- Α) Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας του ασανσέρ για να σηκώσει το ασανσέρ και τους επιβάτες του με σταθερή ταχύτητα $u = 3 \text{ m/s}$?

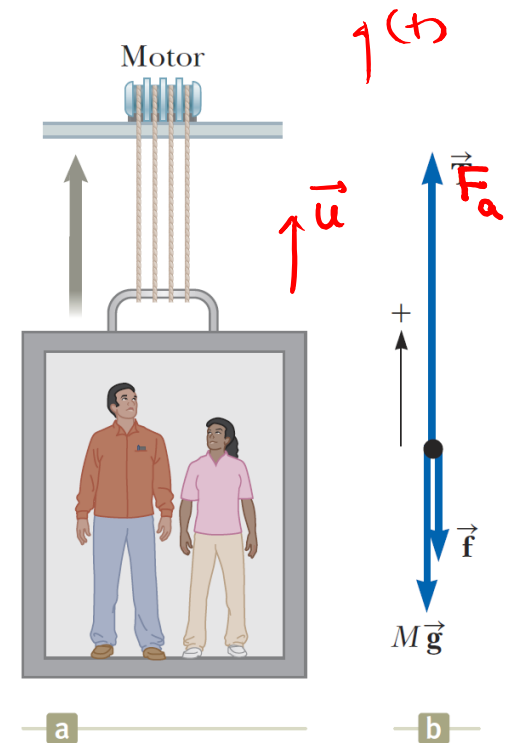
$$P = \vec{F}_a \cdot \vec{u} = F_a u \quad (1) \quad (\text{αφά } \vec{F}_a \uparrow \uparrow \vec{u})$$

Το σώμα μαζί με $(m_a + m_e) = M$ ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα: $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_a + \vec{f} + M\vec{g} = \vec{0}$

Άρα $F_a = Mg + f \quad (2)$

Οπότε

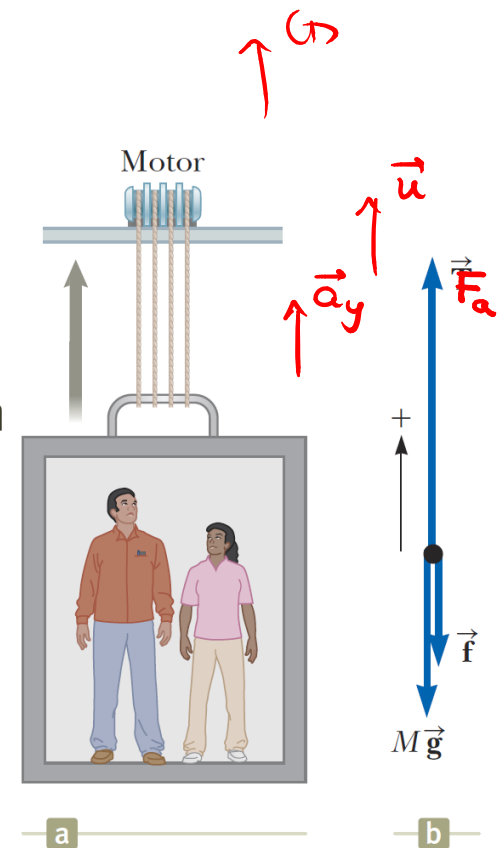
$$P = F_a u = (Mg + f) u \approx 6.5 \cdot 10^4 \text{ Watt}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1600 kg και μεταφέρει επιβάτες με συνολική μάζα 200 kg. Μια σταθερή δύναμη τριβής 4000 N αντιστέκεται στην κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.
- Β) Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας τη στιγμή που έχει ταχύτητα u , αν επιταχύνει τον ανελκυστήρα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 1 \text{ m/s}^2$ προς τα πάνω?



$$P = \vec{F}_a \cdot \vec{u} = F_a u \quad (1) \quad (\text{3 αν.}, \vec{F}_a \uparrow \uparrow u)$$

Το σύστημα $M = m_a + m_e$ επιταχύνεται προς τα πάνω με $\alpha = 1 \text{ m/s}^2$. Άρα:

$$\sum \vec{F}_y = M \vec{a}_y \Rightarrow \vec{F}_a + \vec{f} + M \vec{g} = M \vec{a}_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_a = M(a_y + g) + f \quad (2)$$

$$\text{H } (1) \xrightarrow{(2)} P = [M(a_y + g) + f] u \approx 2.34 \cdot 10^4 u \text{ Watt}$$



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

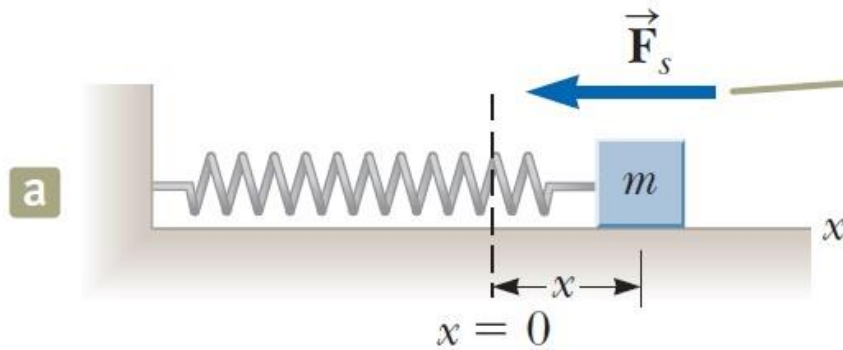
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Περιοδική κίνηση:** ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει σε μια αρχική θέση ανά τακτά σταθερά χρονικά διαστήματα
 - Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα
 - Δείκτες ρολογιού
 - Ανατολή-Δύση Ηλίου
 - Διαλέξεις Φυσικής ☺
 - Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη
- Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t + T)$, $T > 0, \forall t > 0$

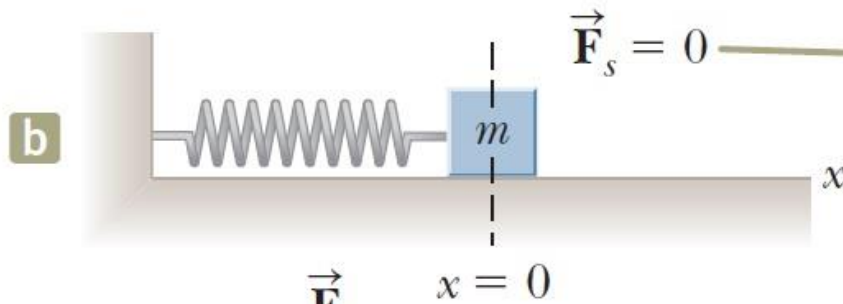
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Απλή αρμονική κίνηση:** περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη είναι ανάλογη της θέσης του σώματος, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας
- **Ορισμός:** Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση λέγεται **Απλή Αρμονική Κίνηση**
- Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) ☺

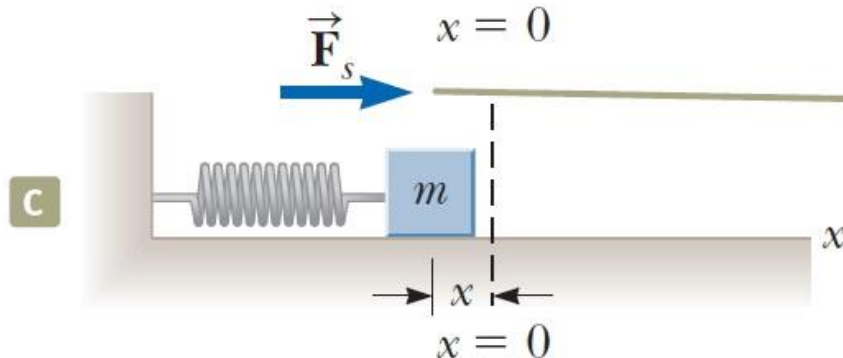
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.



Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

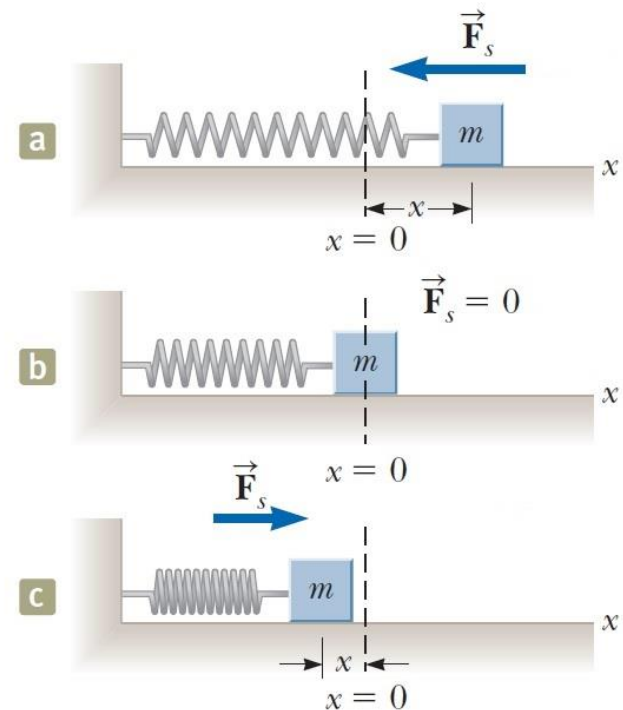
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σώμα σε κίνηση

$$\sum F_x = ma_x \leftrightarrow -kx = ma_x \leftrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

- Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης
- Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Απλή Αρμονική Κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης

$$a_x = -\frac{k}{m}x \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση

Πλάτος ταλάντωσης

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Φάση μετατόπισης ή σταθερά φάσης

Συχνότητα ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα**
 - Μετρίεται σε rad/s
 - Ορίζει πόσο συχνά ταλαντώνεται το σώμα

- Σταθερά φάσης φ

- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$
 - $t = 0 \Rightarrow x(0) = A \cos(0 + \varphi) = A \cos(\varphi)$
- Η τιμή $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ ορίζει τη **χρονική μετατόπιση** σε δευτερόλεπτα του $x(t)$ από τη θέση $t = 0$
 - $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega(t + \varphi/\omega)) = A \cos(\omega(t + t_0))$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Περίοδος

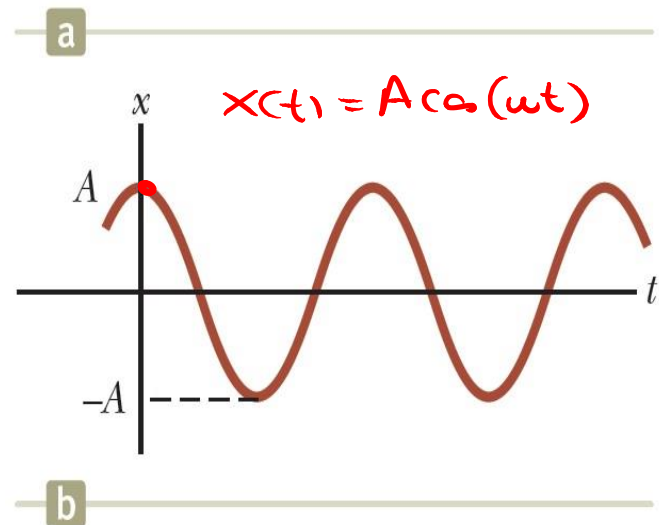
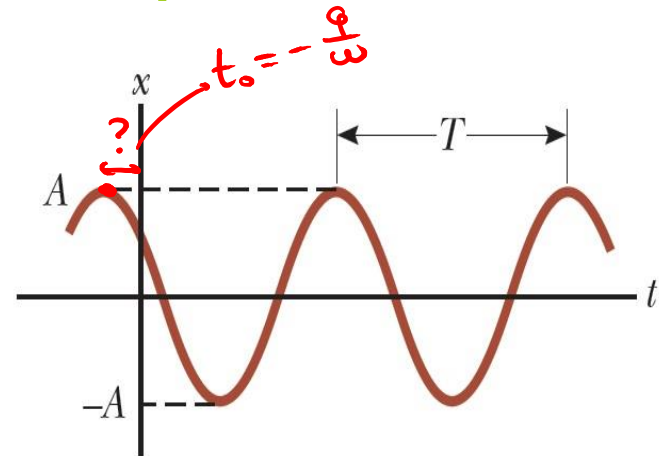
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Συχνότητα (σε Hertz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Σχέση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ταχύτητα & επιτάχυνση απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Μέγιστες τιμές

$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A , φ , της ταλάντωσης;

- Συχνότητα: εξαρτάται από k , m

- Πλάτος, φάση: αρχικές συνθήκες! ($t = 0$)

- Παράδειγμα 1:

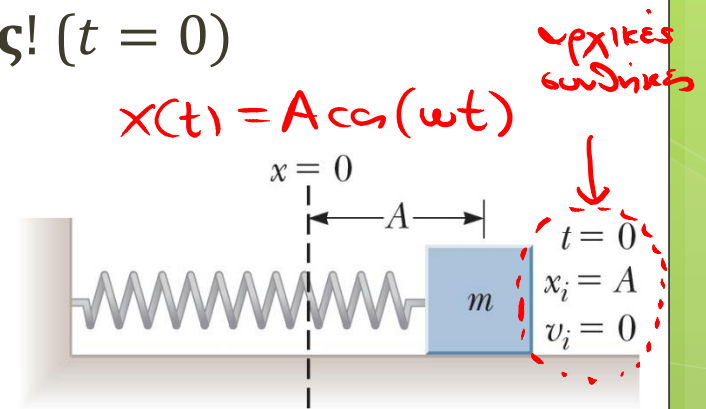
- $x(0) = A \cos(\varphi) = A$, $\varphi = 0$

- $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = 0$, $\varphi = 0$

- Δίνουν $\varphi = 0$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$



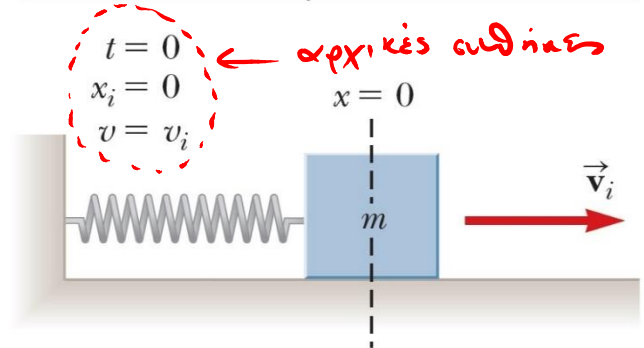
- Παράδειγμα 2:

- $x(0) = A \cos(\varphi) = 0$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

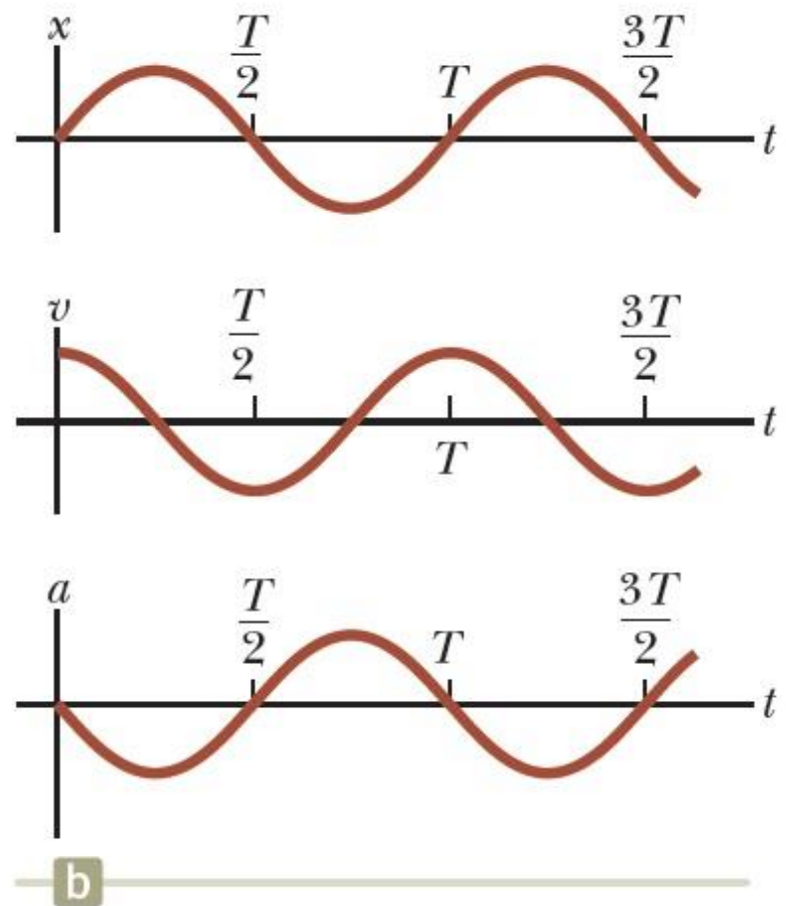
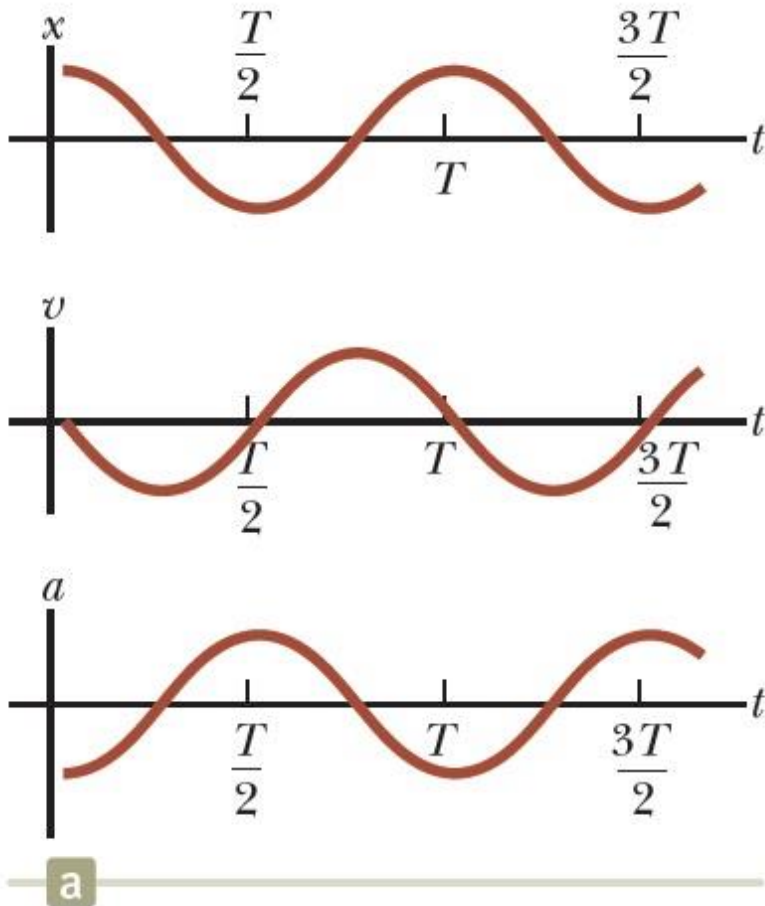
- $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = u_i$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

- Δίνουν $\varphi = -\pi/2$

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega} \sin(\omega t)$$



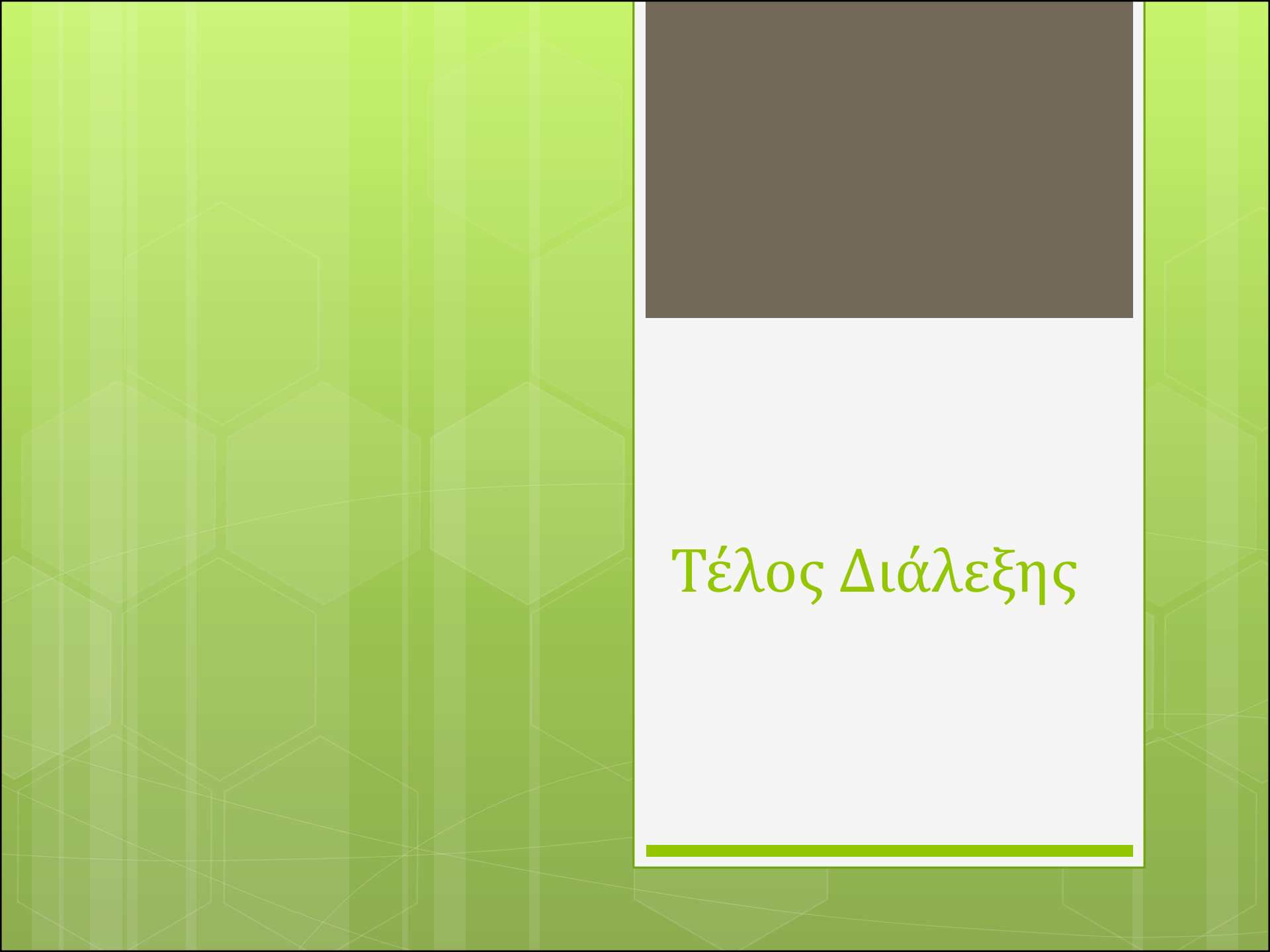
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για (a) $t = 0, x(0) = A, v(0) = 0$ και (b) $t = 0, x(0) = 0, v(0) = v_i$

Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 2



Τέλος Διάλεξης