Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

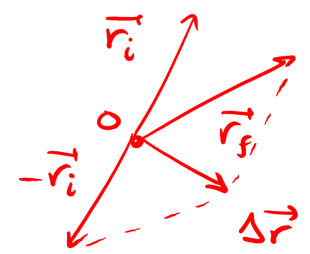
- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
  - Κίνηση στο επίπεδο (x-y)
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
  - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
  - Κίνηση ηλεκτρονίων σε ηλεκτρικό πεδίο
  - Κίνηση δορυφόρου σε τροχιά

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

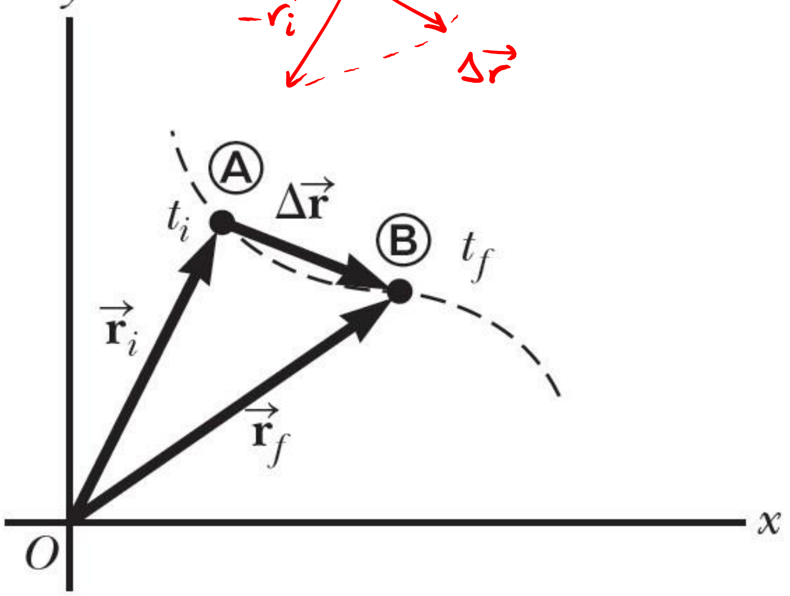
- Είδαμε σε προηγούμενη διάλεξη την κίνηση σε μια διάσταση (οριζόντιος άξονας x)
- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο x-y
  - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy



- **Μετατόπιση $\overrightarrow{\Delta \mathrm{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης
  - $\overrightarrow{\Delta \mathrm{r}} = \overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_i}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

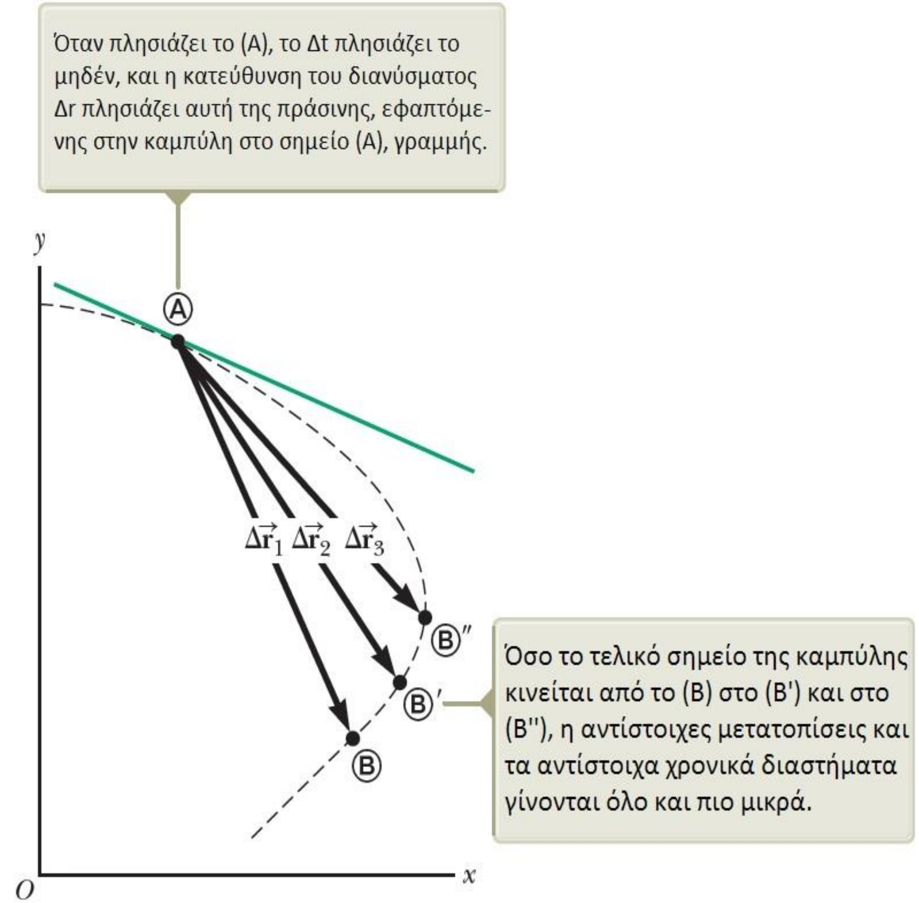
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά δια-στήματα (B, B’, B’’)
- Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της κα-μπύλης στο σημείο A.



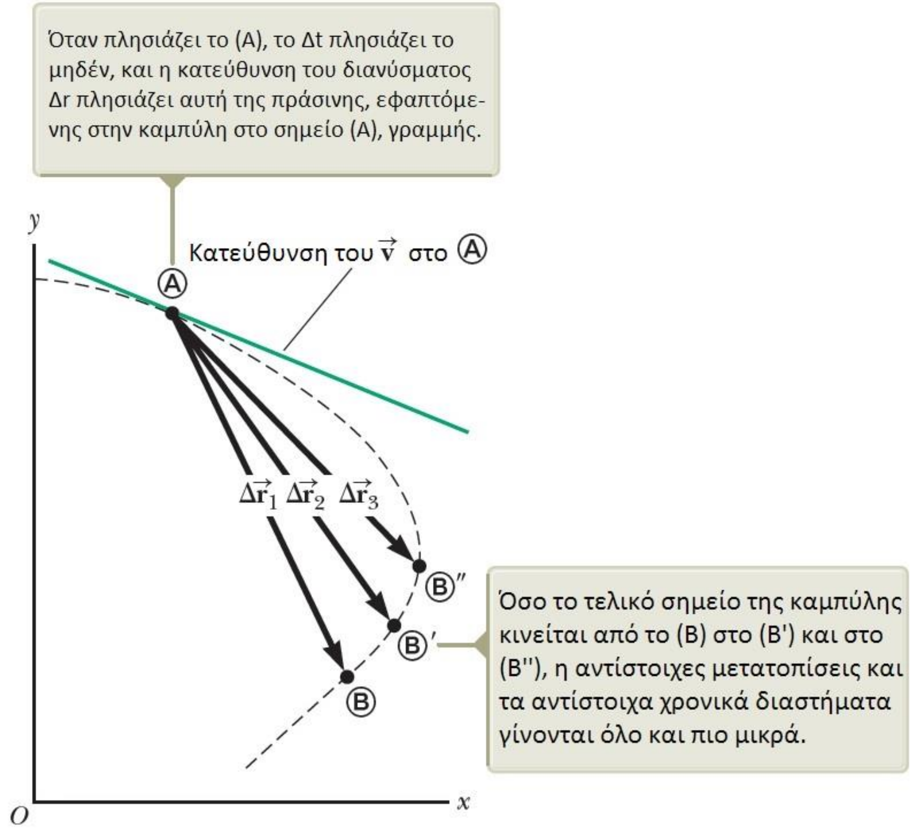
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα $\vec{v}$**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της σε οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται στην εφαπτο-μένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο
- Ταχύτητα $u = |\vec{v}|$
- Θυμηθείτε:

$$\mathbf{u_x} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

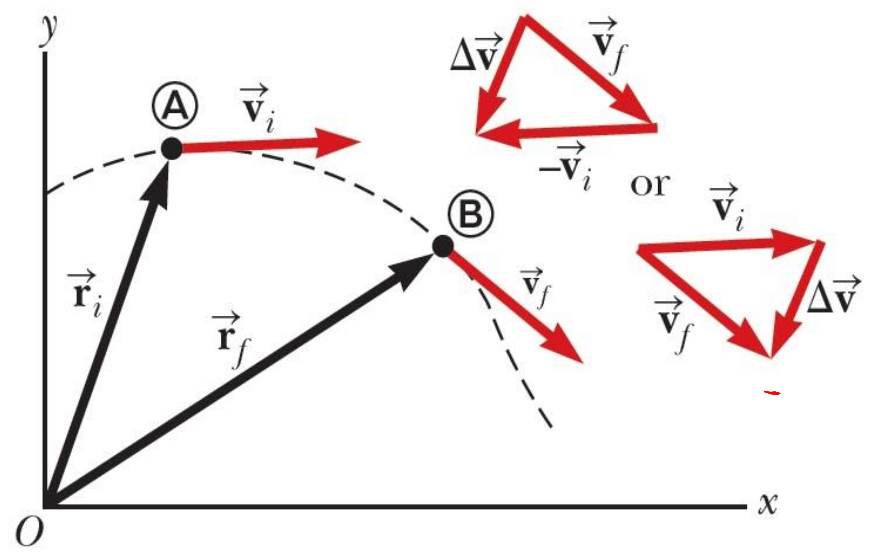
- **Μέση Επιτάχυνση $\vec{a}_{avg}$**

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta\vec{v}$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} \equiv \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Τι αλλαγές συμβαίνουν σε ένα σωματίδιο που επιταχύνει;
  - ❑ Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας
  - ❑ Αλλαγή στην κατεύθυνση της ταχύτητας
  - ✓ Αλλαγή και των δυο παραπάνω

- Παράδειγμα:
  - Αυτοκίνητο με γκάζι, φρένο, τιμόνι. Ποια από αυτά προκαλούν την επιτάχυνσή του;

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μας ενδιαφέρει η κίνηση σε δυο διαστάσεις με **σταθερή** επιτάχυνση
  - …όμοια με ό,τι κάναμε στην κίνηση στη μια διάσταση

- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
  - **Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:**
    - **Τον άξονα των x**
    - **Τον άξονα των y**

- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{r}$, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα $\vec{v}$, ως

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

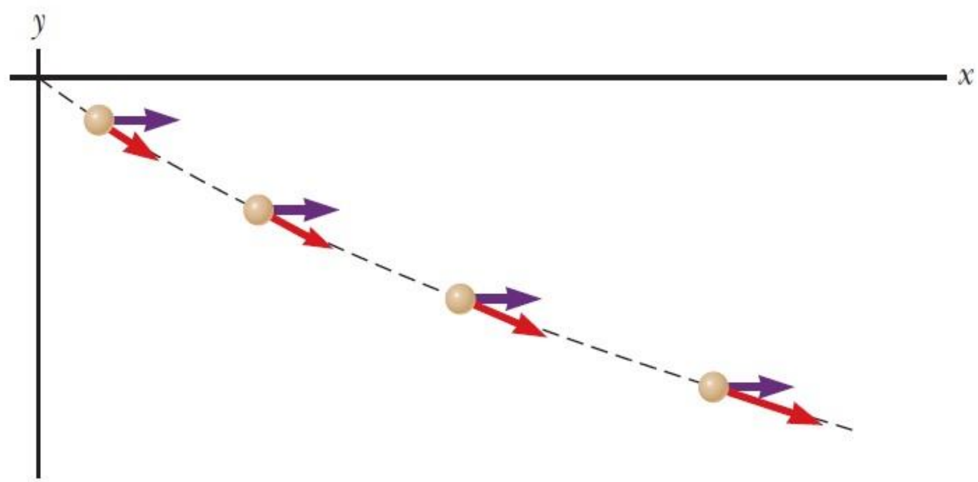
- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>

- $\vec{\boldsymbol{v}}_f = \vec{\boldsymbol{v}}_i + \vec{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{t}$

- $\vec{\boldsymbol{r}}_f = \vec{\boldsymbol{r}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_i\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{t}^2$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

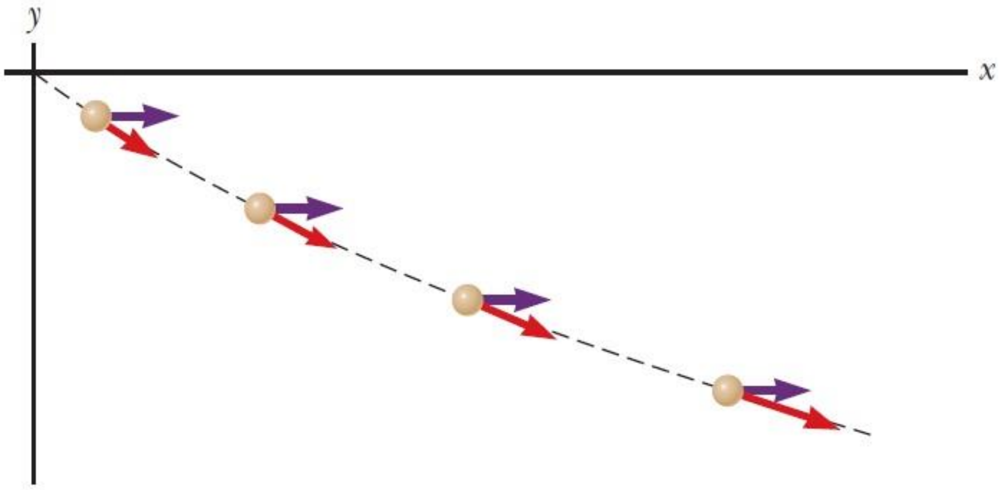
- **Παράδειγμα:**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα με μέτρο $a_x = 4\mathrm{m}/s^2$.
  Α) Βρείτε το συνολικό διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.
  Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$ και τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.
  Γ) Βρείτε τις x,y συντεταγ-μένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης r.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα - Λύση:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα με μέτρο $a_x = 4\mathrm{m}/s^2$.
  Α) Βρείτε το συνολικό διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

$$\vec{u} = \vec{u}_i + \vec{a}\,t = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$
$$= (u_{ix} + a_x t)\vec{i} + $$
$$+ (u_{iy} + \underbrace{\cancel{a_y}}_{0} t)\vec{j}$$
$$= (u_{ix} + a_x t)\vec{i} + u_{iy}\vec{j}$$
$$= (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

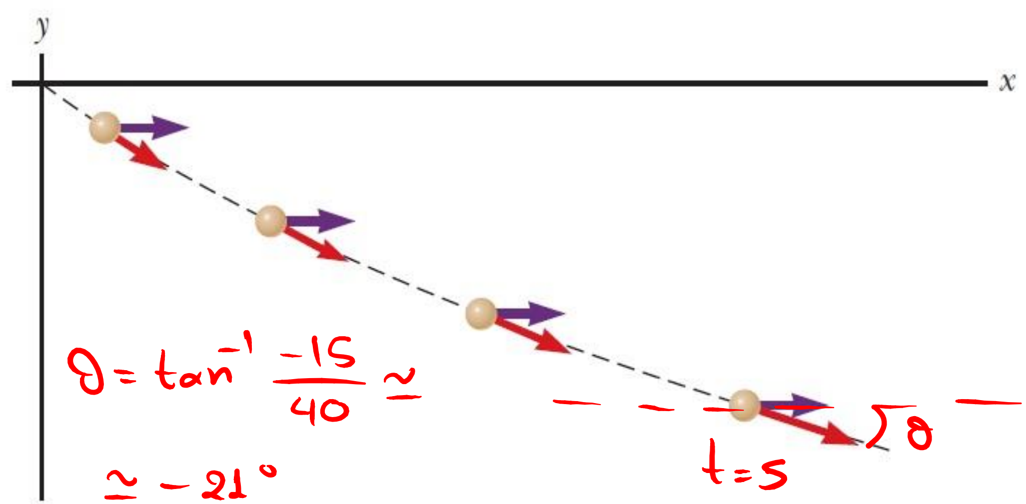
- Παράδειγμα - Λύση:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα με μέτρο $a_x = 4\mathrm{m}/s^2$.
  B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$ και τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

$\vec{u}_f = (20+4t)\vec{i} - 15\vec{j}$

Για $t=5$ s: $\vec{u}_f\Big]_{t=5} =$

$= (20+4t)\vec{i} - 15\vec{j}\Big]_{t=5} =$

$= 40\vec{i} - 15\vec{j}$



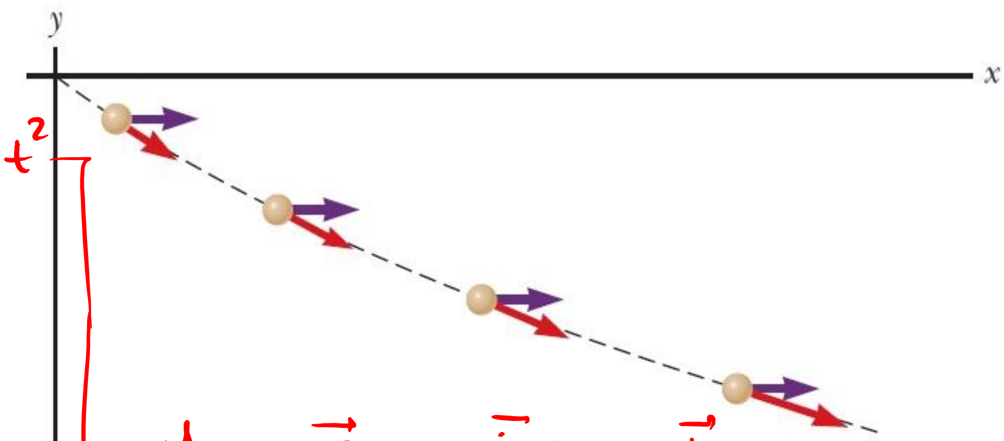
$\theta = \tan^{-1}\frac{-15}{40} \simeq$

$\simeq -21^\circ$

$|\vec{u}_f| = \sqrt{40^2+(-15)^2} \simeq 43\ \frac{m}{s}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα - Λύση:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα με μέτρο $a_x = 4\mathrm{m}/s^2$.
  Γ) Βρείτε τις x,y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης r.



x-άξονα: $u_f = u_i + a_x t$

$x_f = \cancel{x_i}_0 + u_{ix} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

y-άξονα: $y_f = \cancel{y_i} + u_{yi} t =$

$= -15t$ (1)

$x_f = 20t + \frac{1}{2} 4t^2$

$= 20t + 2t^2$ (2)

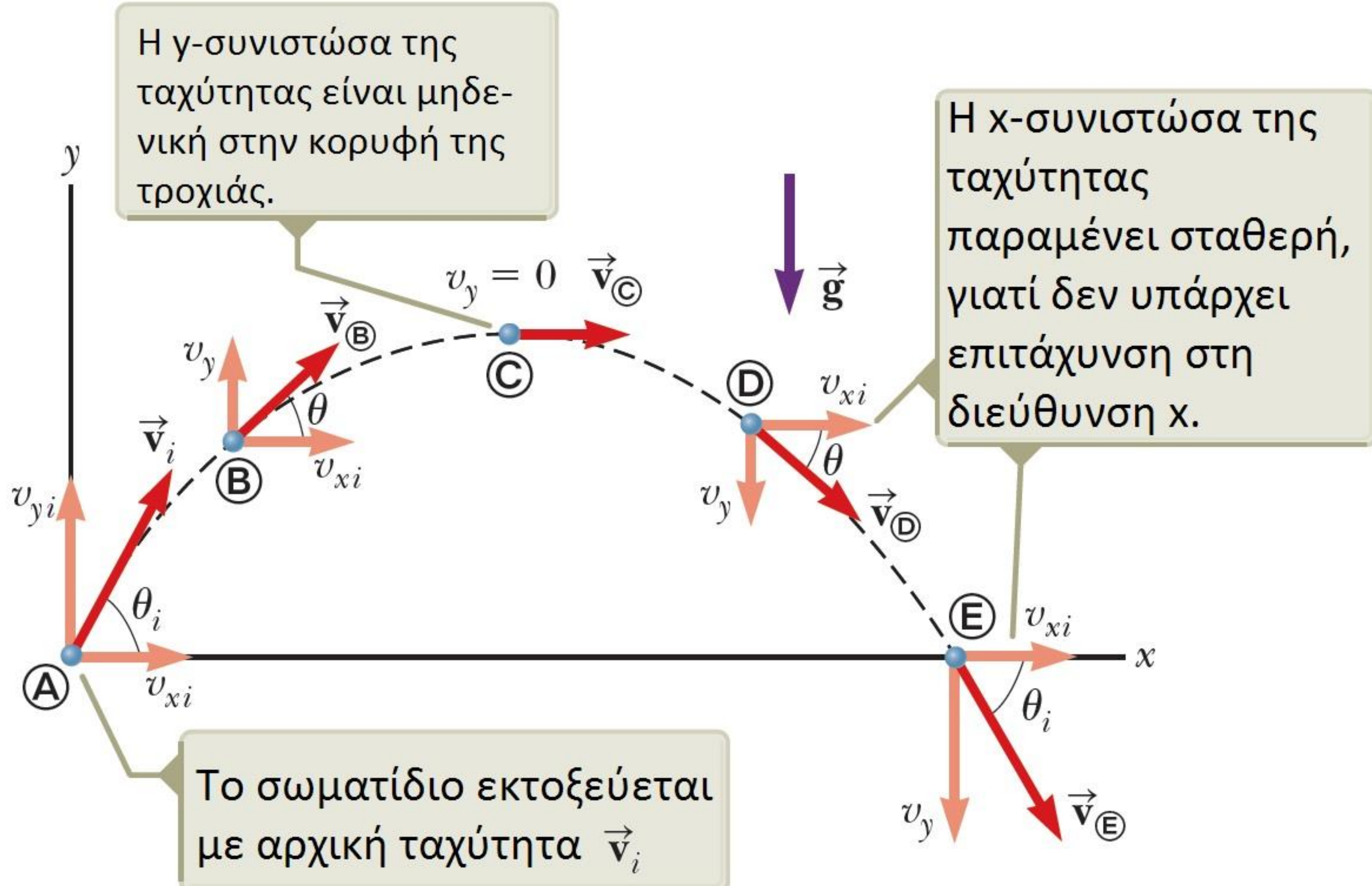
Άρα $\vec{r} = x_f \cdot \vec{i} + y_f \cdot \vec{j}$

$= (20t + 2t^2)\vec{i} - 15t\vec{j}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή.**
- Το μόνο που αλλάζει είναι
  A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας g**, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (προς τα κάτω) στον άξονα x.
  B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή…

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

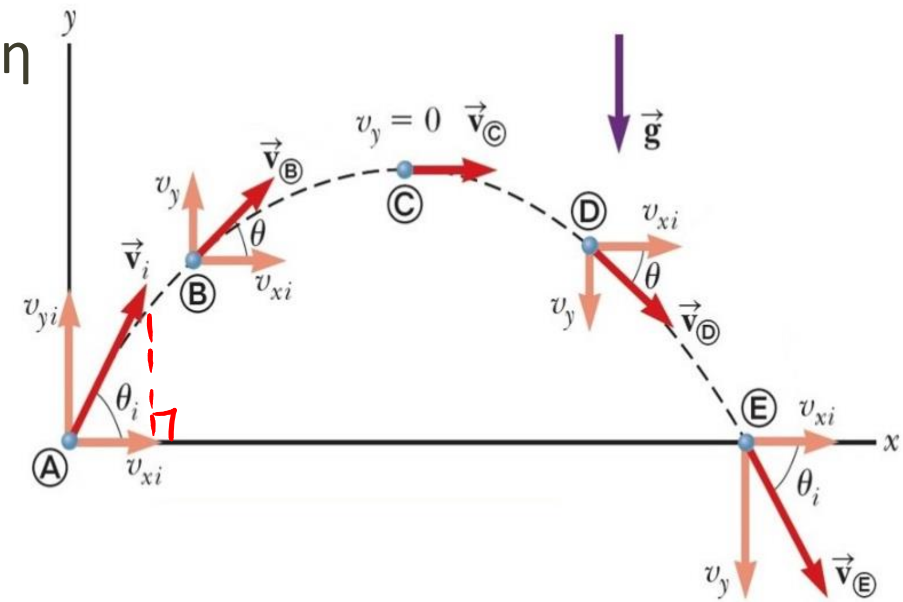


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις βολής
  - $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}$
  - $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$
- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 14 (7 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση



- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:
  - Α) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα (u σταθερή)
  - Β) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα (g – βαρύτητα)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- A) $x_f = x_i + u_{xi}t$

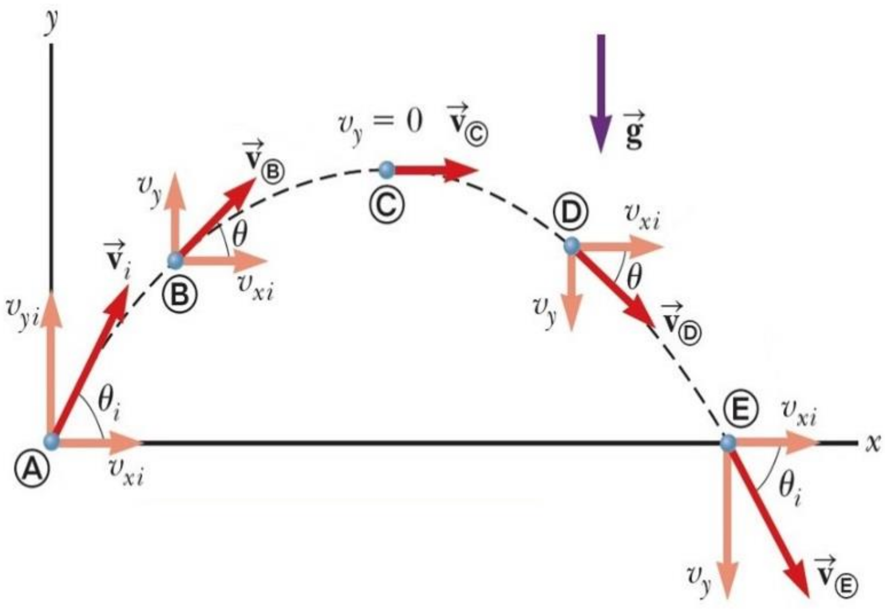
- B) $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

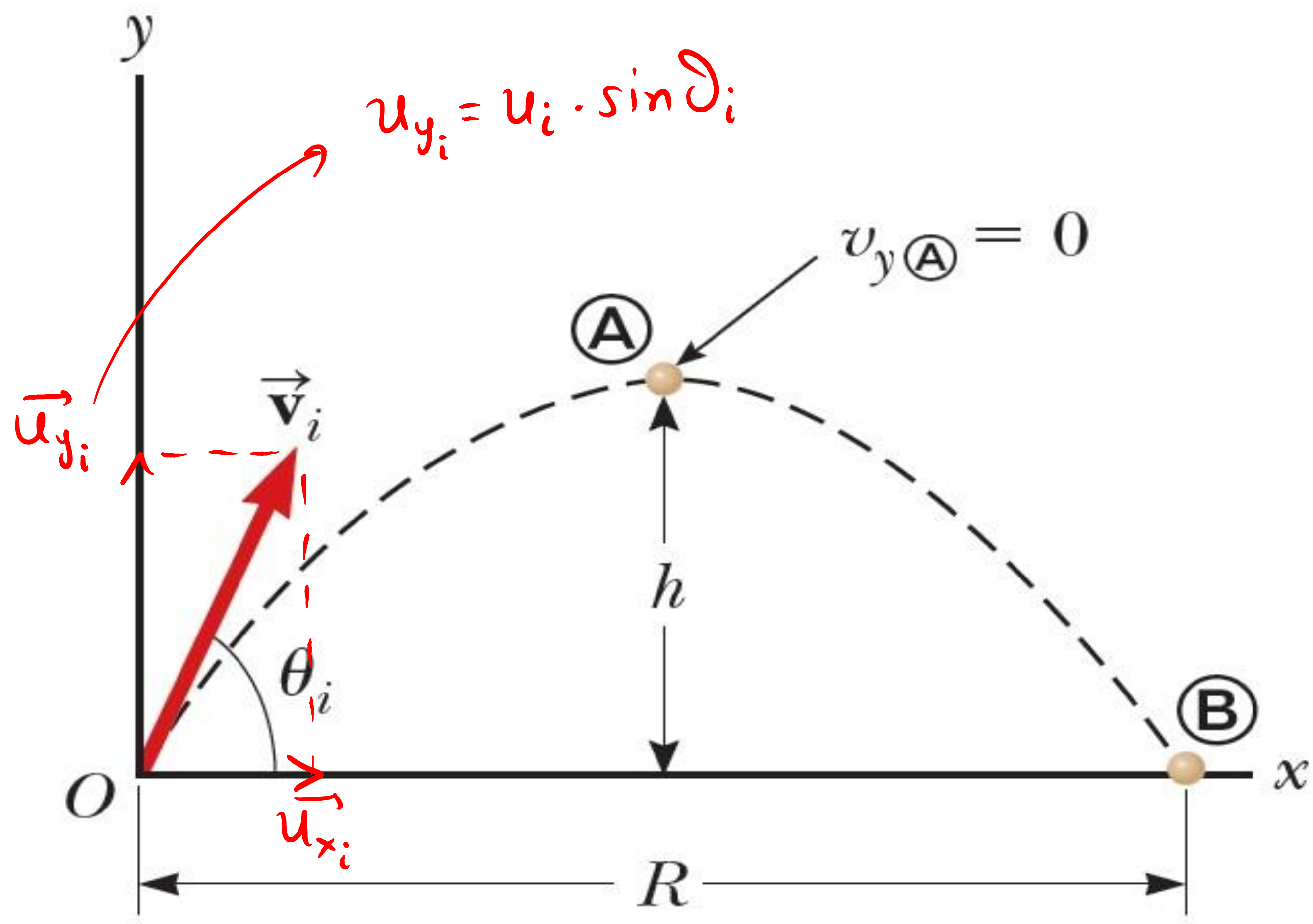
$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$



- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Εύρος** και **Μέγιστο Ύψος** βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Μέγιστο Ύψος h:

Έχουμε $y_f = y_i + u_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = h \iff$

$\iff h = y_i + u_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$= 0 + u_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

$= u_i \cdot \sin\theta_i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ (1)

Επίσης, $u_y = u_{y_i} - g t \iff t = \frac{u_{y_i} - u_{y_f}}{g} = \frac{u_{y_i}}{g}$ (2) (γιατί $u_{y_f} = 0$ στο μέγιστο ύψος)

Η (1) λόγω (2) δίνει: $h = u_i \sin\theta_i \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right)^2$, $u_{y_i} = u_i \sin\theta_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{u_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εύρος βολής R:

Στον x-άξονα, $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = \cancel{x_i}^{\,0} + u_x t = u_x t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = u_i \cdot \cos\theta_i \cdot t$ (1)

Στον y-άξονα, $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

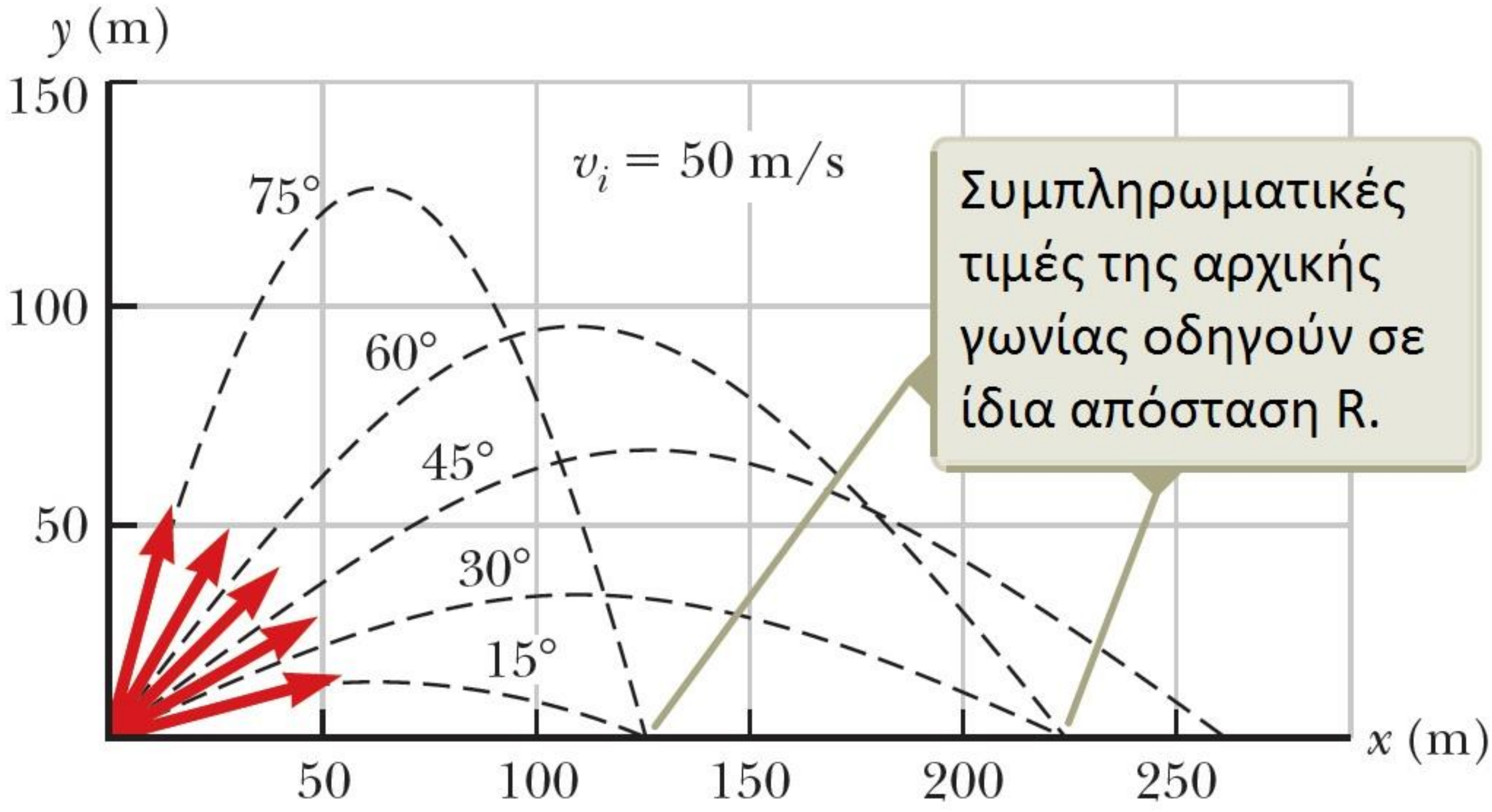
$\Rightarrow \frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} = u_{y_i} \cancel{t} \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin\theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin\theta_i}{g}$ (2)

Η (1) λόγω (2) δίνει: $R = u_i \cos\theta_i \, \frac{2u_i \sin\theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \cdot 2\sin\theta_i \cos\theta_i}{g} =$

$= \frac{u_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$.

Άρα $R = \frac{u_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει υπό πίεση την μπάλα υπό γωνία 60˚ με το οριζόντιο επίπεδο, και με ταχύτητα 8m/s.
    Α) Μπορεί υπό αυτές τις συνθήκες να σκοράρει 3ποντο;
    Β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;

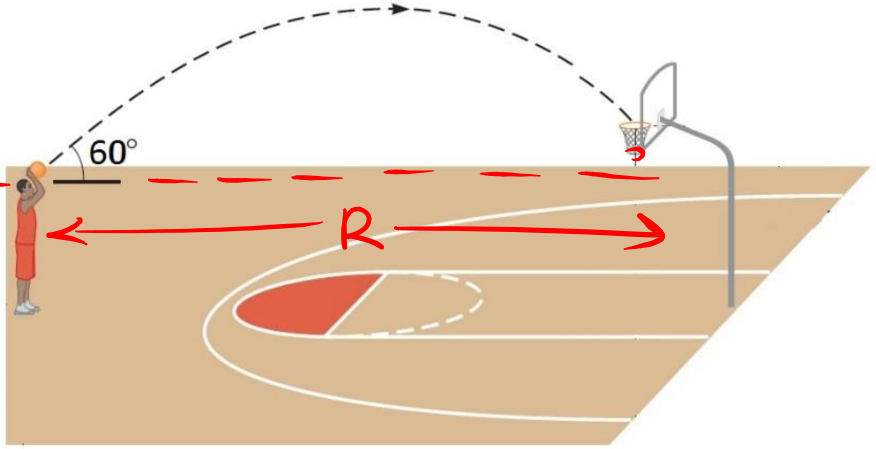
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 60˚ - ταχύτητα 8m/s.
    Α) Μπορεί υπό αυτές τις συνθήκες να σκοράρει 3ποντο;
    (απόσταση 3ποντου = 7.25 m)

Είναι

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = 5.61\ m < 7.25$$

Άρα ΔΕΝ σκοράρει!

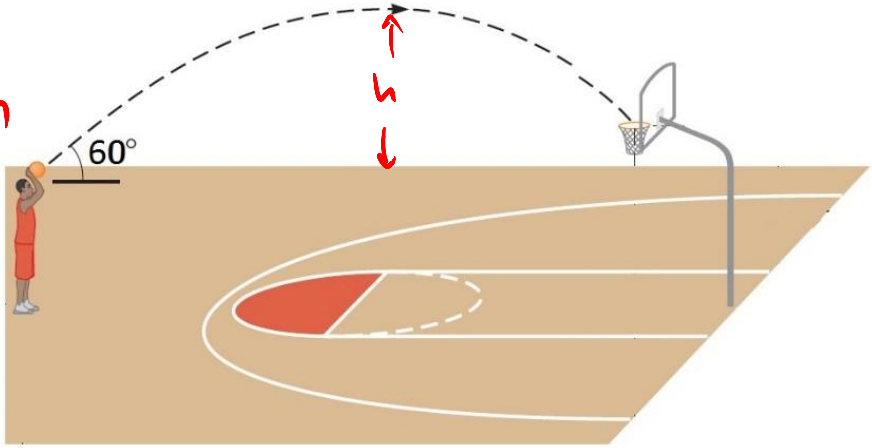


Θεωρούμε στεφάνη και αρχική θέση μπάλας στο ίδιο οριζ. επίπεδο!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 60˚ - ταχύτητα 8m/s.
    B) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;

Είναι $h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} \cong 2.41\ m$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

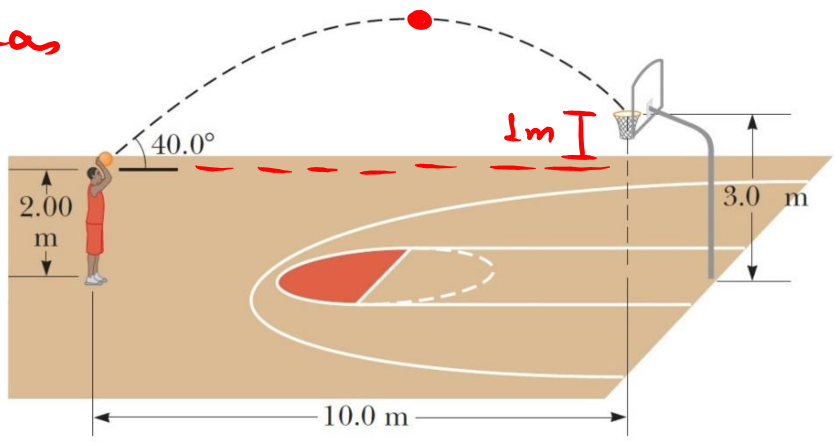
- **<u>Παράδειγμα (πιο ρεαλιστικό):</u>**
  - Ο Βασίλης Σπανούλης σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40° με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3m.
    A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
    B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

$\downarrow \vec{g}$

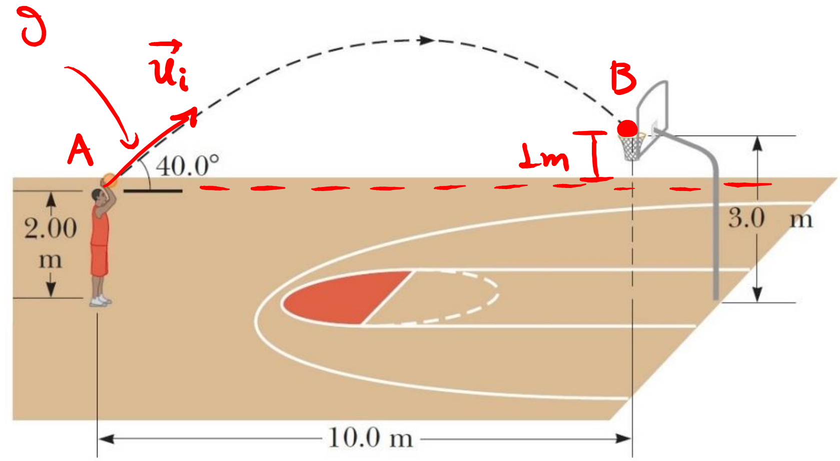
Η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας ΣΤΑΘΕΡΗ



δηλ. είναι το ίδιο διάνυσμα σε <u>κάθε</u> σημείο της τροχιάς της μπάλας!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84$,
    $\cos(40^o) = 0.76$,
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Είναι $\vec{u_i} = \vec{u_{ix}} + \vec{u_{iy}}$ και

$u_{ix} = u_i \cdot \cos\theta$

$u_{iy} = u_i \cdot \sin\theta$

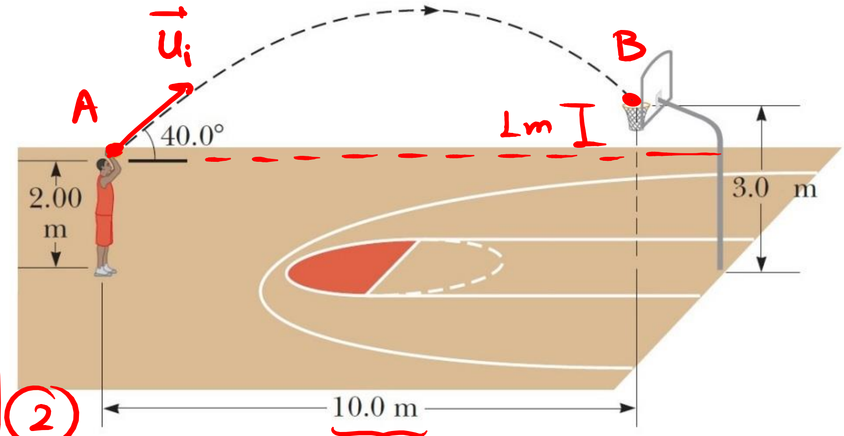
Από τις εξισώσεις κίνησης

$$y_B = y_A + u_{iy}\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow 1 = 0 + u_i\cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = u_i \sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84,$
    $\cos(40^o) = 0.76,$
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Στον x-άξονα, έχουμε ευθ. ομαλή κίνηση:

$$x_B = x_A + u_{ix}\cdot t \Leftrightarrow$$

$$10 = 0 + u_i \cdot \cos\theta \cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{10}{u_i \cos\theta}} \quad (2)$$

Η (1) λόγω (2) δίνει: $u_i \simeq 10.7\ \frac{m}{s}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

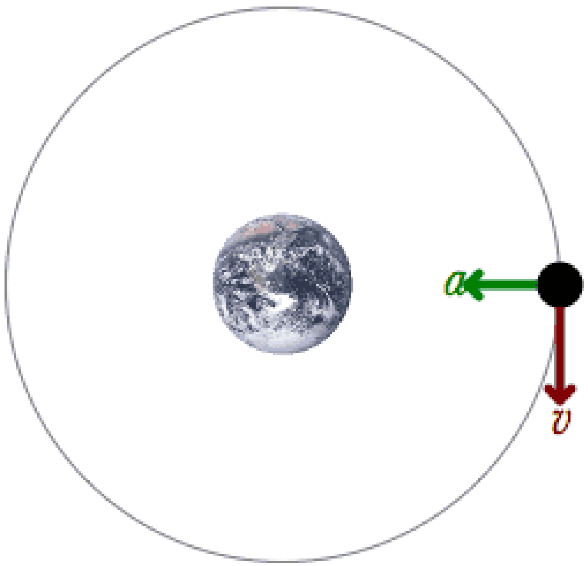
- **<u>Παράδειγμα (πιο ρεαλιστικό):</u>**

  - Ο Βασίλης Σπανούλης σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40˚ με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Λύστε ξανά την παραπάνω άσκηση θεωρώντας ως σημείο αναφοράς τα πόδια του παίκτη, δηλ. το παρκέ. Η θέση Α (0,0) θα είναι πλέον στα πέλματά του. Πρέπει να καταλήξετε στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
  - Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
    - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!

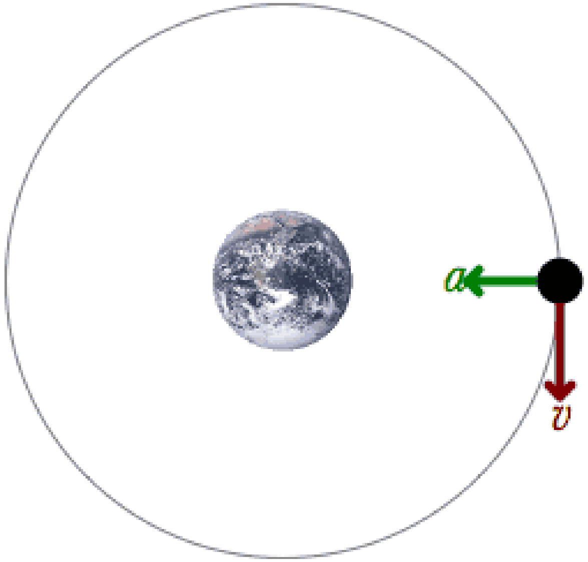


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Ταχύτητα
    - Διάνυσμα εφαπτόμενο στον κύκλο
    - Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης
  - Επιτάχυνση
    - Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
    - Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

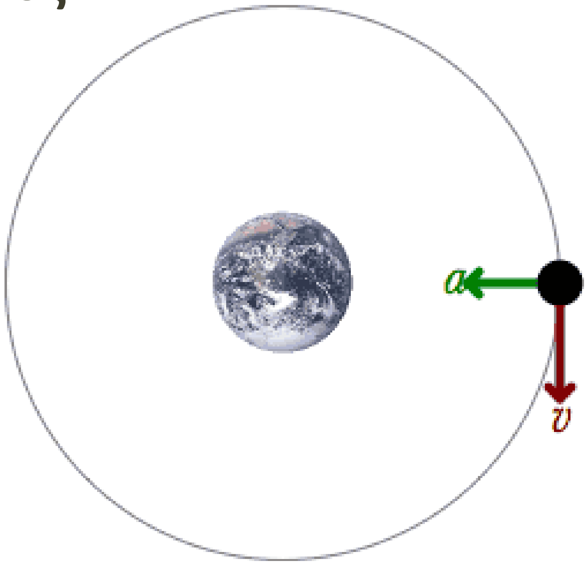
- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

  - Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**
  - Ο λόγος

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**



  - Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \qquad \text{και} \qquad \alpha = r\omega^2$$

Τέλος Διάλεξης