Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Διανύσματα

Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

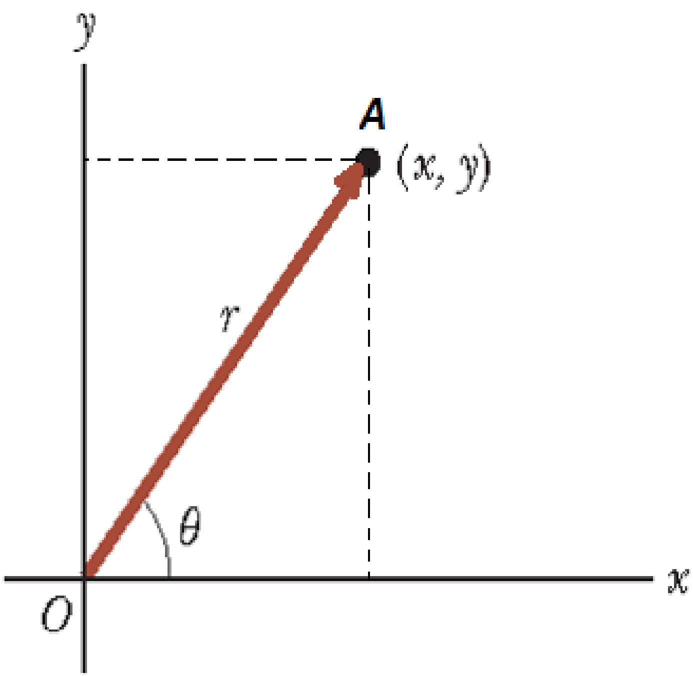
Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Διανύσματα

Διανύσματα

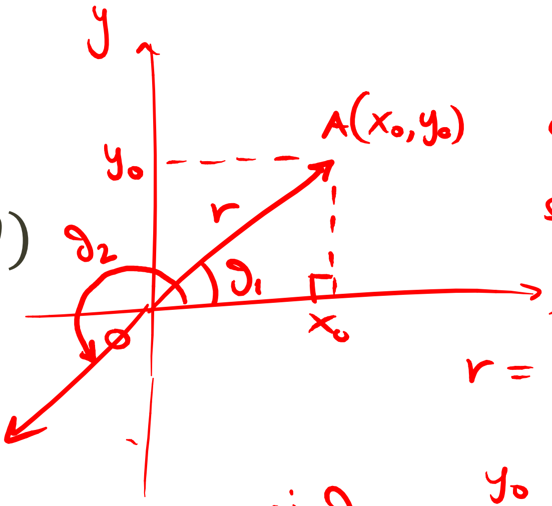
- Στην κίνηση στο επίπεδο, τα διανύσματα είναι απαραίτητα!
- Διάνυσμα ΟΑ: προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα
  - Μέτρο
  - Διεύθυνση
  - Φορά
- Καρτεσιανές συντεταγμένες
  - x – τετμημένη
  - y – τεταγμένη



Διανύσματα

- Πολική μορφή
  - $x_0 = r\cos(\theta), \quad y_0 = r\sin(\theta)$
  - όπου
    - $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$
    - $\theta = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0}$

(r, θ)



$\cos\theta = \frac{x_0}{r}$

$\sin\theta = \frac{y_0}{r}$

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y_0}{r}}{\frac{x_0}{r}} = \frac{y_0}{x_0}$

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες (x,y) = (1,1) και ύστερα αυτού με συντεταγμένες (x,y)=(-1, -1).

- $(x_0, y_0) = (1,1) \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y_0}{x_0} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}1 = 45°$ ή $\frac{\pi}{4}$

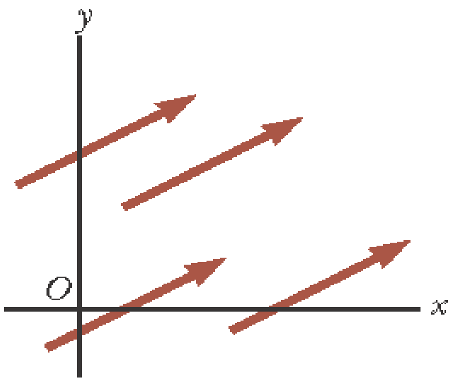
!!

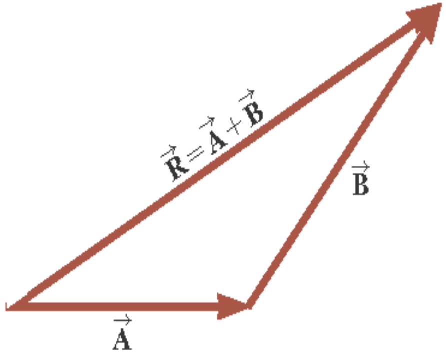
- $(x_0, y_0) = (-1,-1) \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\longrightarrow$ Ελέγχουμε προσθέτοντας ή αφαιρώντας την ποσότητα π.

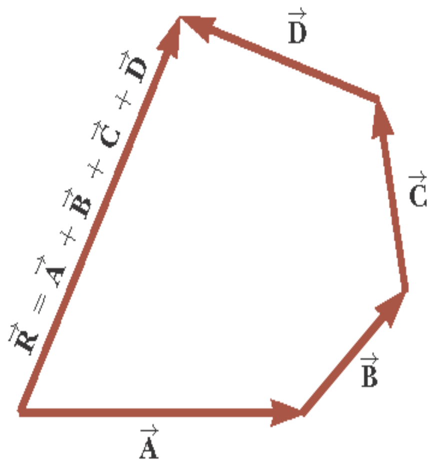
$\theta_2 = \tan^{-1}(-1)/(-1) = \tan^{-1}1 = 45°$ ή $\frac{\pi}{4}$

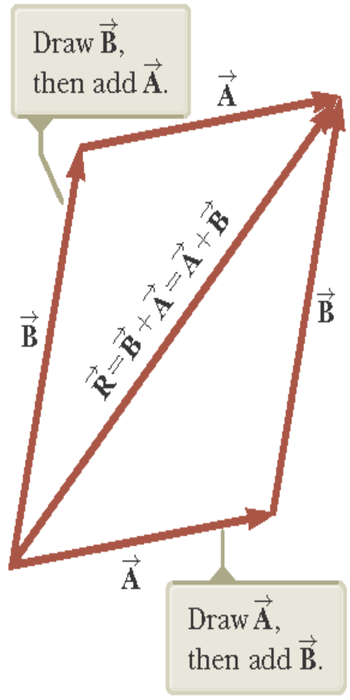
Διανύσματα

- <u>Ιδιότητες διανυσμάτων</u>
  - Ισότητα διανυσμάτων
    - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
  - Πρόσθεση διανυσμάτων



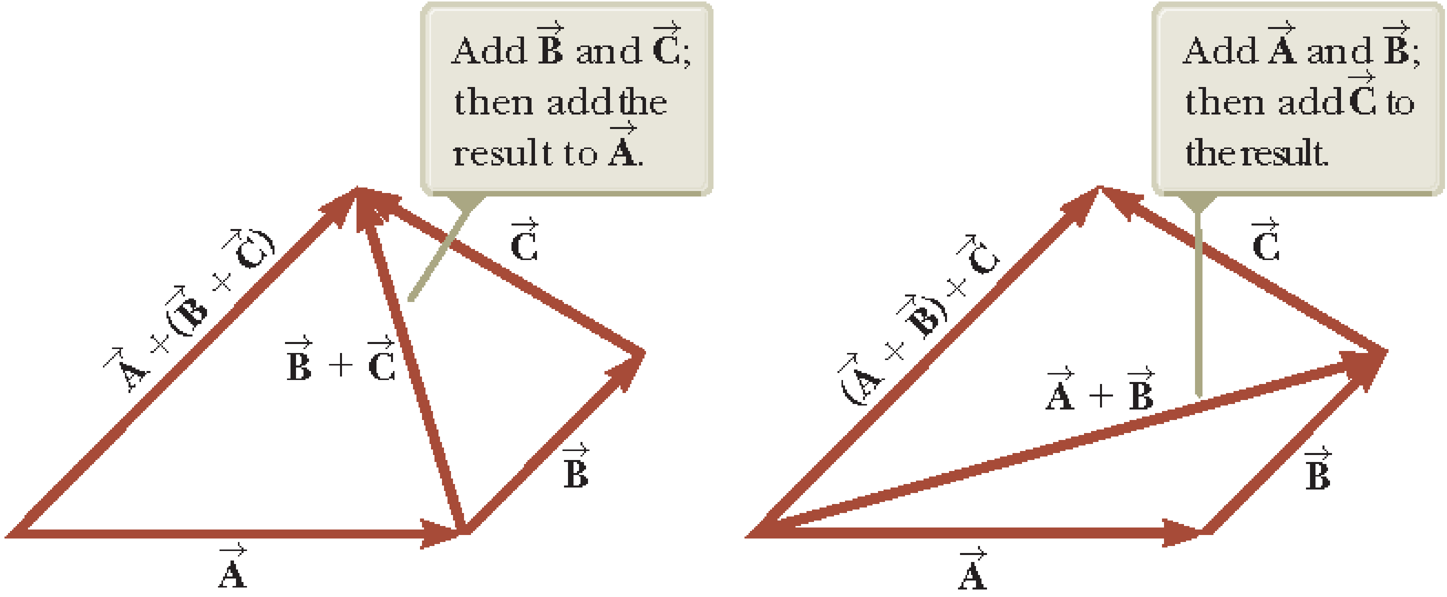






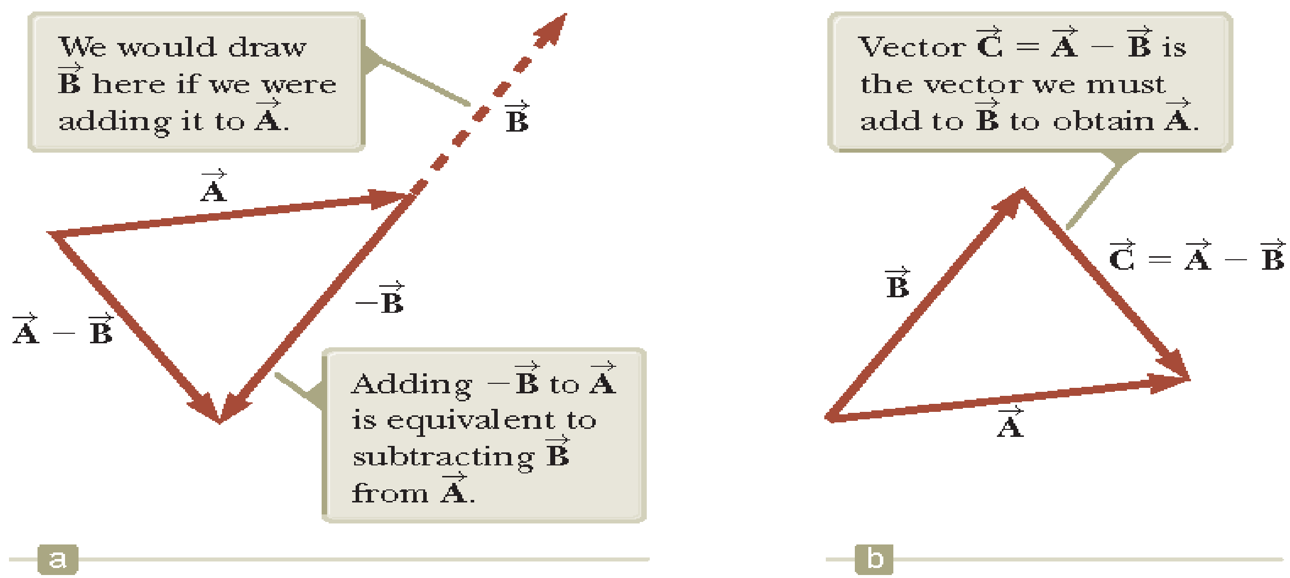
Διανύσματα

- <u>Ιδιότητες</u>
  - Αντιμεταθετικότητα
    - $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
  - Προσεταιριστικότητα
    - $\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$



Διανύσματα

- Αρνητικό διάνυσμα ενός διανύσματος $\vec{A}$
  - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\vec{A}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$
- Παράδειγμα:
  - Πρόσθεση



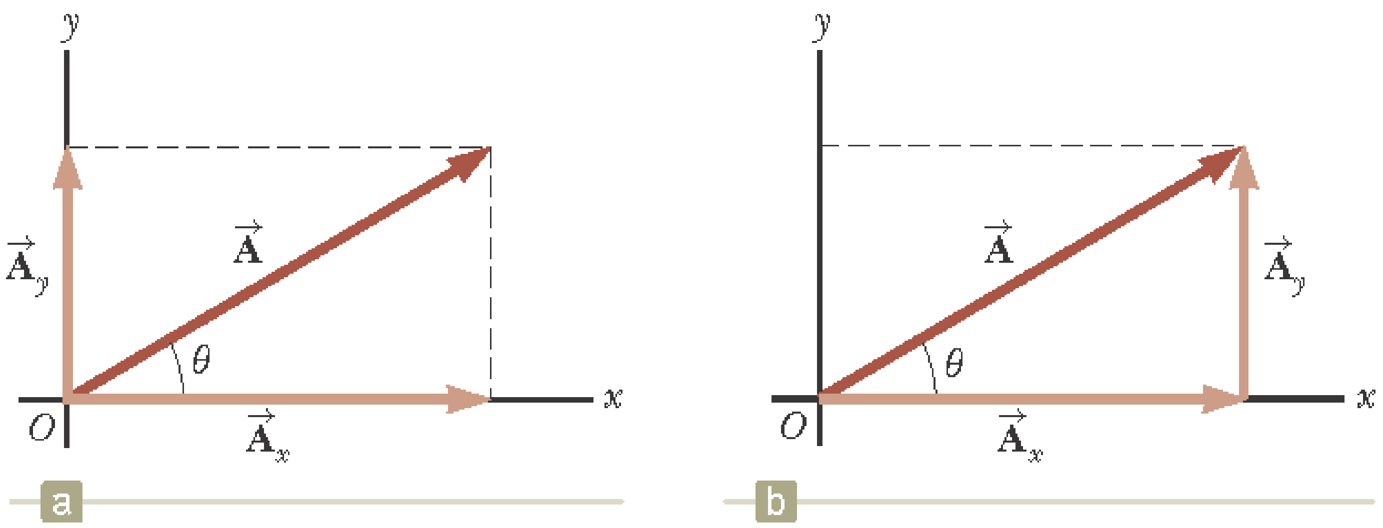
Διανύσματα

- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό
  - Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά, και το μέτρο του
  - $\vec{B} = m\vec{A}, m \in R \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$
  - $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A},\ \alpha\nu\ m > 0$
  - $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A},\ \alpha\nu\ m < 0$

Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα

- Για μεγαλύτερη ακρίβεια, προτιμούμε την ανάλυση σε ***συνιστώσες*** (μια κάθετη και μια παράλληλη στον x-άξονα)

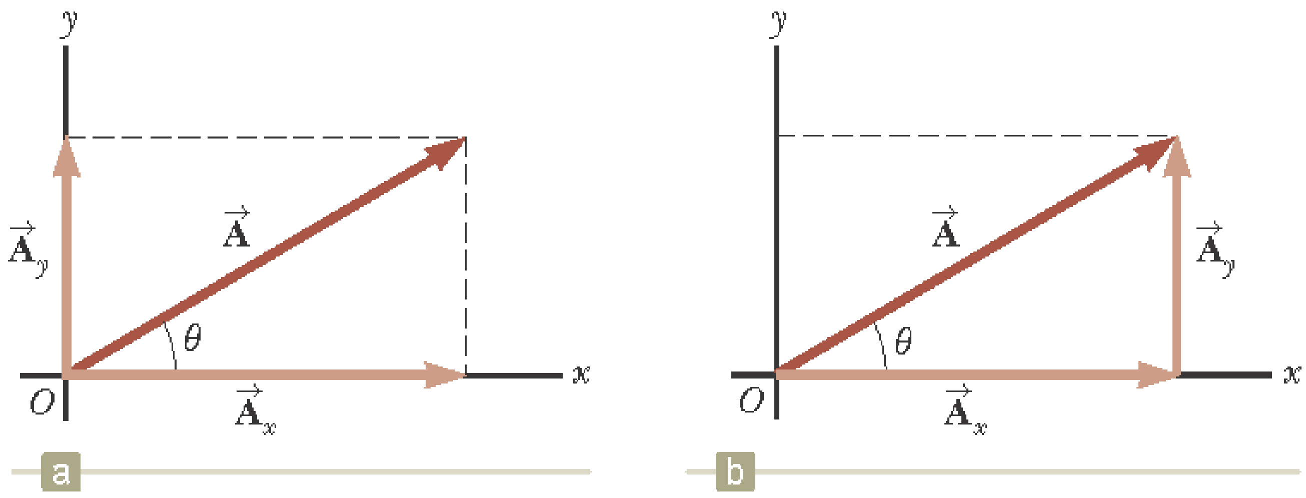


Διανύσματα

- Πολική μορφή

$$A_x = A\cos(\theta), \qquad A_y = A\sin(\theta)$$

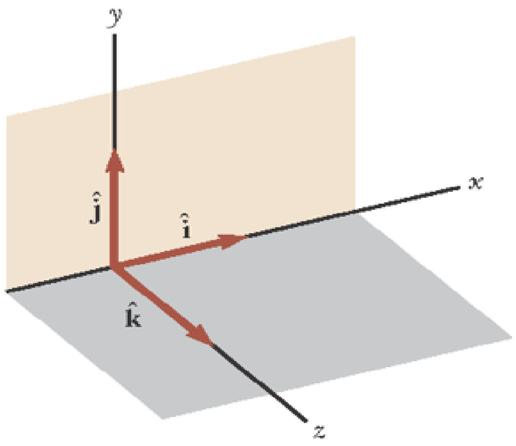
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$



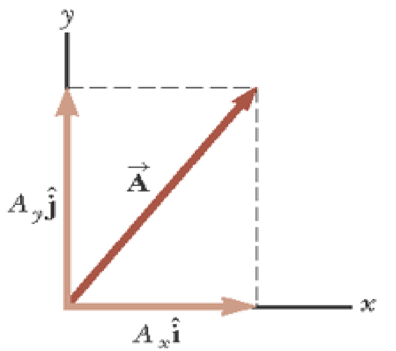
- Προσοχή στον υπολογισμό της γωνίας θ!

Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μοναδιαίων διανυσμάτων**
- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
  - Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)
  - Δίνουν διεύθυνση
  - $i \to x, j \ \to y, k \to z$
  - Κάθετα μεταξύ τους
    - $i \perp j, j \perp k, i \perp k$



a



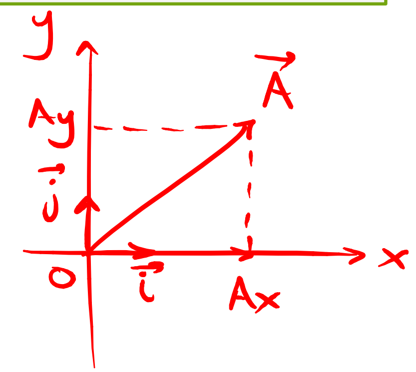
b

Διανύσματα

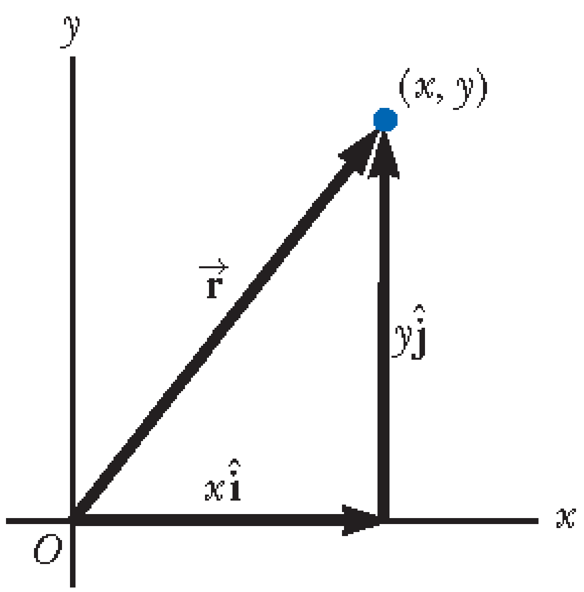
- Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x\vec{\imath} + \mathrm{A}_y\vec{\jmath}$$

με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων



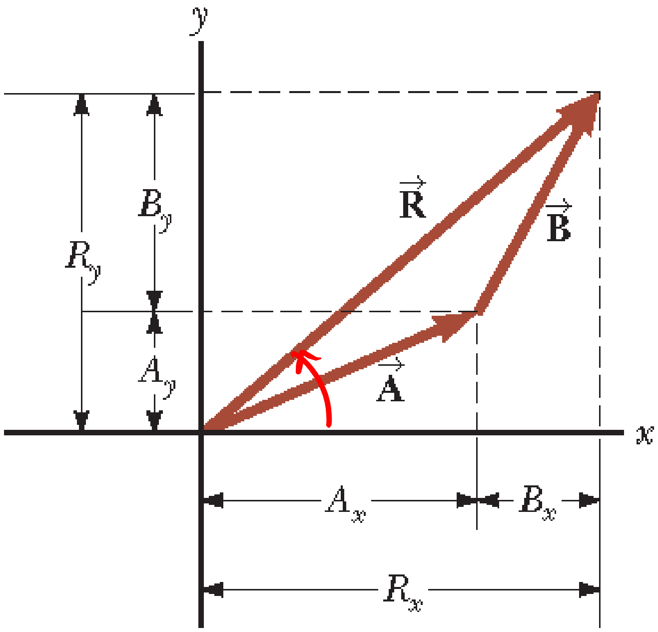
- **Διάνυσμα θέσης**
  - Σημείο A(x,y)
  - $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
  - Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι $x\vec{\imath}, y\vec{\jmath}$.



Διανύσματα

- $\vec{R} = \vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}$
- $\vec{R} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}\right) + \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right)$
- $\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$



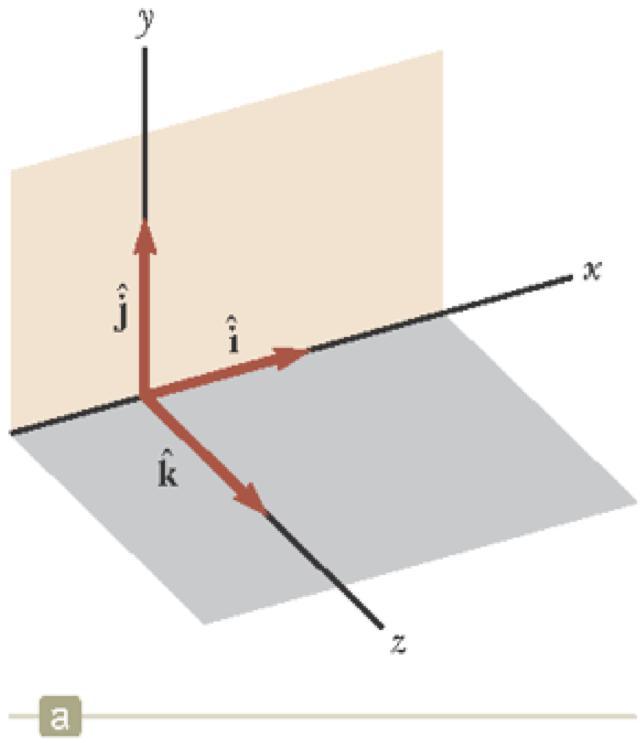
- Πρόσθεση όλων των x-συνιστωσών και όλων των y-συνιστωσών
- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2}$
- $\tan(\theta) = \frac{\mathrm{R}_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$ $\Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$

Διανύσματα

- Προσθήκη περισσότερων διαστάσεων

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

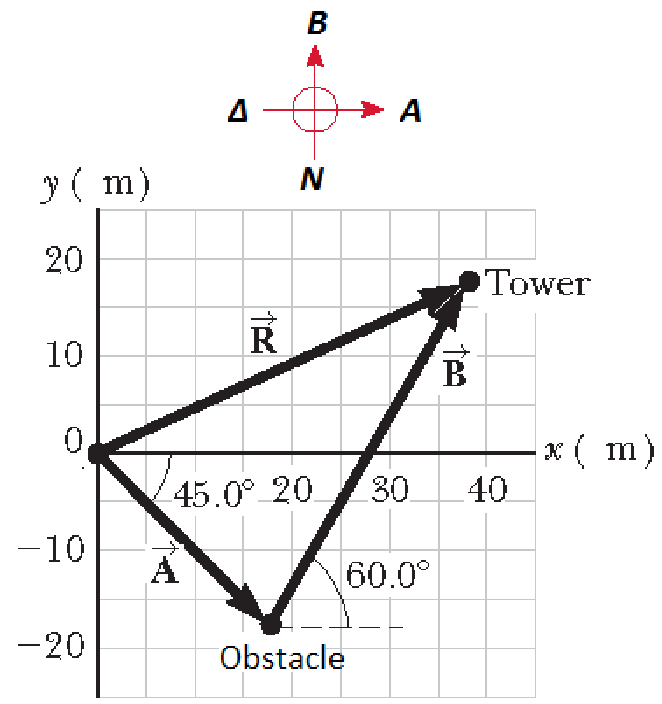
- Όμοια ακριβώς συλλογιστική!



Διανύσματα

Παράδειγμα:

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του (Δείτε το σχήμα).



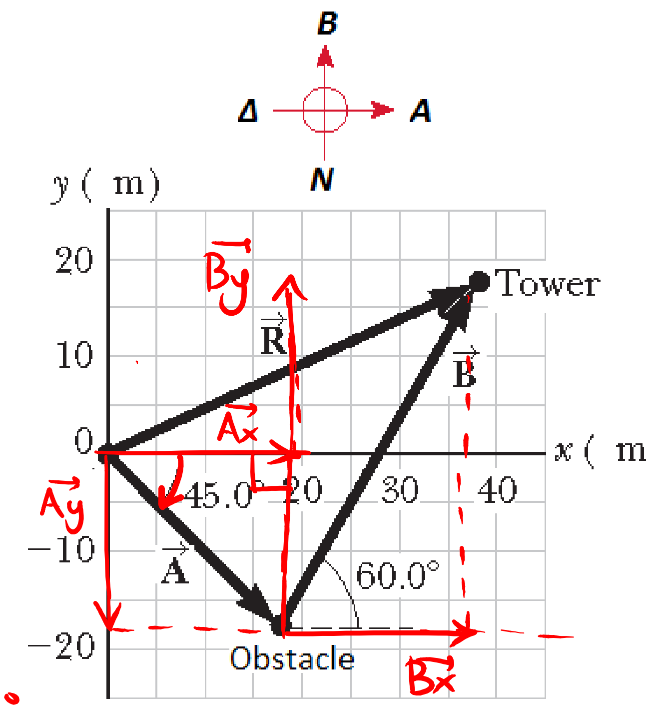
A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

A. Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j}$$

$$A_x = A \cdot \cos\theta = 25 \cdot \cos(-45^\circ) = 25 \cos 45^\circ$$

$$= 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 17.7\ m$$

$$A_y = A \sin\theta = 25 \cdot \sin(-45^\circ) = -25 \cdot \sin(45^\circ) \cong -17.7\ m$$

$$\vec{B} = \vec{B_x} + \vec{B_y} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j}\ , \quad B_x = B\cos\varphi = 40 \cdot \cos 60 = 20\ m$$

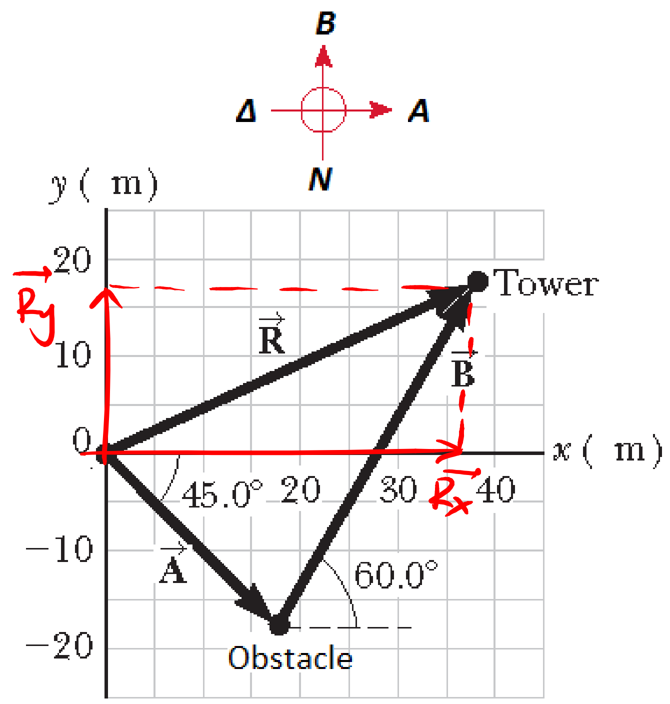
$$B_y = B\sin\varphi \cong 34.7\ m$$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Β. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.



$$\vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y} = R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j}$$

$$R_x = A_x + B_x = 37.7 \text{ m}$$

$$R_y = A_y + B_y \simeq 17.0 \text{ m}$$

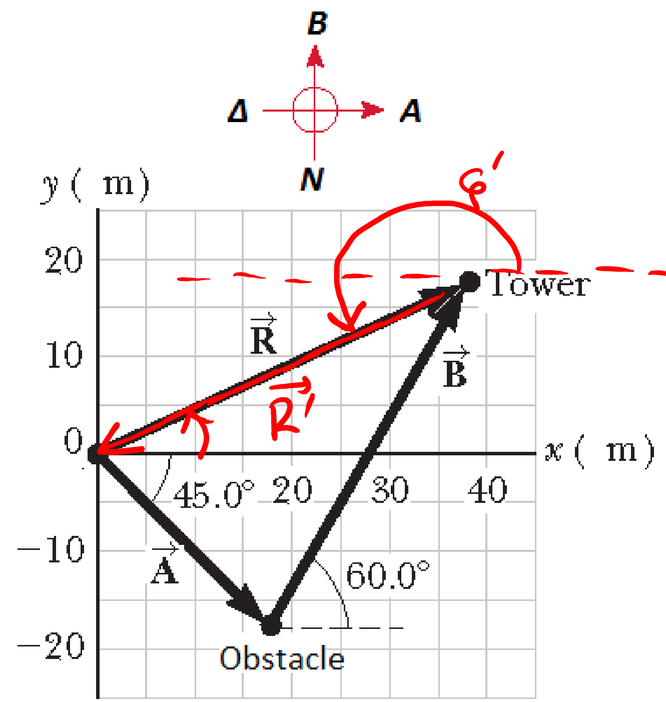
Άρα $\vec{R} = 37.7\,\vec{i} + 17.0\,\vec{j}$

Διανύσματα

Παράδειγμα - Λύση

- Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

c. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



$$\vec{R'} = -\vec{R} = -(37.7\cdot\vec{i} + 17\cdot\vec{j})$$

$$= \underbrace{-37.7\cdot\vec{i}}_{R'_x}\ \underbrace{-17\cdot\vec{j}}_{R'_y}$$

$$\varphi' = \tan^{-1}\frac{R'_y}{R'_x} = \tan^{-1}\frac{-17}{-37.7}$$

$$\cong 0.45 \Rightarrow \varphi' \cong 204.2^\circ$$

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

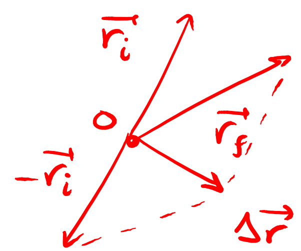
- Μελέτη κίνησης σε δυο διαστάσεις
  - Κίνηση στο επίπεδο (x-y)
- Χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές
  - Κίνηση ρομπότ στο επίπεδο
  - Κίνηση ηλεκτρονίων σε ηλεκτρικό πεδίο
  - Κίνηση δορυφόρου σε τροχιά

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

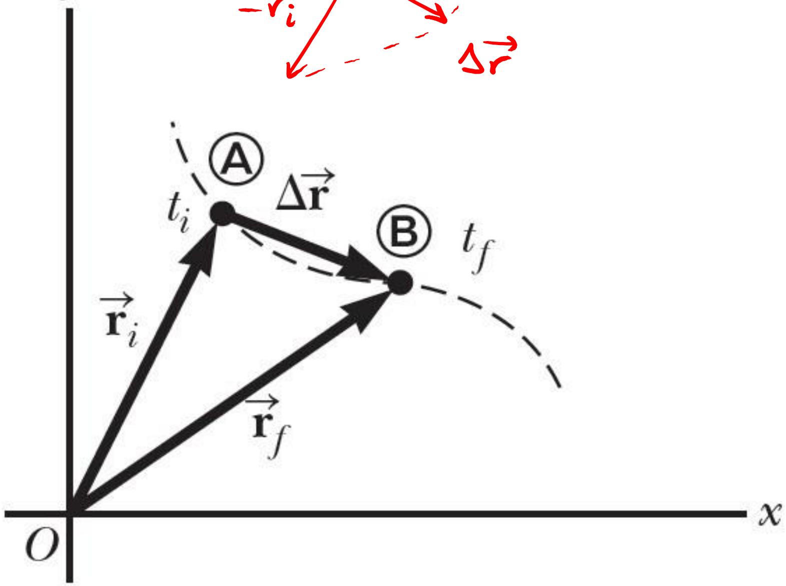
- Είδαμε σε προηγούμενη διάλεξη την κίνηση σε μια διάσταση (οριζόντιος άξονας x)
- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες μας στο χώρο x-y
  - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy



- **Μετατόπιση $\overrightarrow{\Delta r}$**
  - Διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης
  - $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_i}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Τέλος Διάλεξης
(συνεχίζεται… ☺)