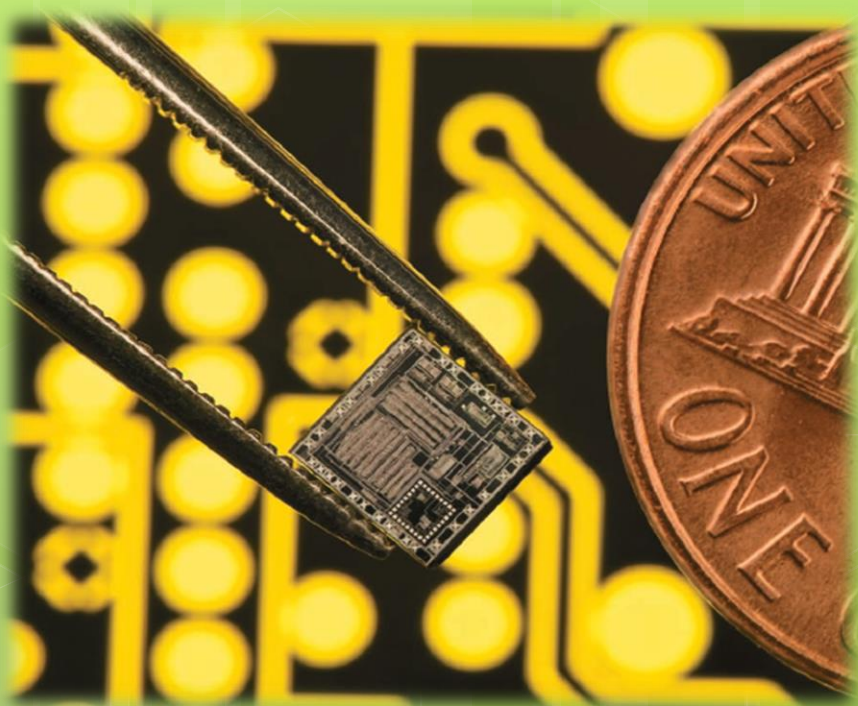


Εικόνα: Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα περιέχει εκατομμύρια στοιχεία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Η πυκνότητα των στοιχείων διπλασιαζόταν κάθε περίπου 18 μήνες τα τελευταία 30 χρόνια. Αν θα συνεχιστεί αυτός ο ρυθμός εξαρτάται από το αν οι επιστήμονες και οι μηχανικοί θα κατανοήσουν σε βάθος τη φυσική των ηλεκτρικών κυκλωμάτων σε πολύ μικρές (νανο) κλίμακες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρομαγνητισμός

- Μελέτη των φαινομένων που σχετίζονται με τον **ηλεκτρισμό** και το **μαγνητισμό**
- Νόμοι του Ηλεκτρομαγνητισμού
  - Πανταχού παρόντες!
    - Smartphones, τηλεοράσεις, ηλεκτροκινητήρες, Η/Υ, επιταχυντές σωματιδίων, κ.α.
- Ηλεκτρικός → ήλεκτρο → κεχριμπάρι
- Μαγνητικός → Μαγνησία → περιοχή που βρέθηκε για πρώτη φορά ο μαγνητίτης
- Επιστήμονες: Oersted, Faraday, Henry, **Maxwell**
  - **James Clerk Maxwell = Isaac Newton του ηλ/σμου**

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Ηλεκτρικά Πεδία

- Όλοι έχετε δει ηλεκτρικά πεδία γύρω σας
  - Τρίψτε ένα μπαλόνι στα μαλλιά σας και θα δείτε ότι έλκει κομματάκια χαρτιού
- Μια τέτοια συμπεριφορά της ύλης αναφέρεται ως ***ηλεκτρική φόρτιση***
- Απλά πειράματα έδειξαν ότι υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικής φόρτισης
  - Θετική και αρνητική
  - Τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητική φόρτιση
  - Τα πρωτόνια έχουν θετική φόρτιση
- **Φορτία ίδιου προσήμου απωθούνται**
- **Φορτία αντίθετου προσήμου έλκονται**

Ηλεκτρικά Πεδία

- ***Διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου***
  - …σε απομονωμένο σύστημα
  - Μεταφορά φορτίου από ένα αντικείμενο σε ένα άλλο
    - Το ένα φορτίζεται θετικά, το άλλο αρνητικά
  - Ποιος είναι όμως ο φορέας του φορτίου;
    - Ξέρουμε πλέον ότι τα **ηλεκτρόνια** είναι φορείς φορτίου
    - Ηλεκτρόνια μεταφέρονται από ένα υλικό σε ένα άλλο, δημιουργώντας θετικό ή αρνητικό φορτίο
- Το 1909, ο Milikan ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό φορτίο q συμβαίνει στη φύση σε ακέραια πολλαπλάσια ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου e: $q = Ne,\ N \in Z$
  - Λέμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι ***κβαντισμένο***
  - Ηλεκτρόνιο: φορτίο -e
  - Πρωτόνιο: φορτίο +e

Ηλεκτρικά Πεδία

- ***Κατηγοριοποίηση υλικών***
  - ***Αγωγοί:*** υλικά όπου κάποια ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα και δεν είναι δεσμευμένα σε άτομα, και μπορούν να κινηθούν σχετικά ελεύθερα στο υλικό
    - Όταν φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται σε όλη την επιφάνεια του υλικού
  - ***Μονωτές:*** υλικά που όλα τα ηλεκτρόνιά τους είναι δεσμευμένα σε άτομα και δεν μπορούν να κινηθούν ελεύθερα
    - Όταν φορτιστούν, το φορτίο κατανέμεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή
  - ***Ημιαγωγοί:*** με προσθήκη συγκεκριμένης ποσότητας ατόμων στο υλικό, εναλλάσσονται από αγωγοί σε μονωτές

Ηλεκτρικά Πεδία

- ***Ο νόμος του Coulomb***
  - Ο Charles Coulomb μέτρησε το μέτρο των ηλεκτρικών δυνάμεων ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια
  - Από τα πειράματά του προέκυψε ότι ***η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2(μηδενικού μεγέθους) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση***

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

  - όπου k_e είναι η σταθερά του Coulomb

Ηλεκτρικά Πεδία

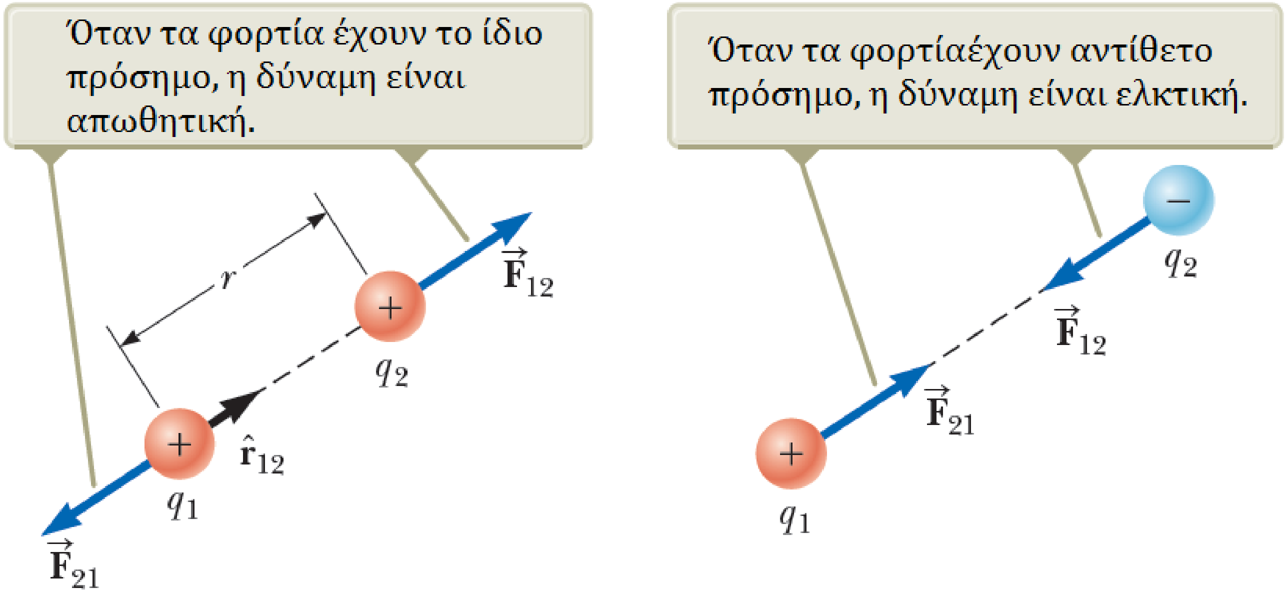
- ***Ο νόμος του Coulomb***
  - Πειράματα έδειξαν ότι η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική
  - Μονάδα μέτρησης στο S.I. : Newton (N)
  - Σταθερά k_e
    - $k_e = 8.987 \times 10^9 \ \frac{Nm^2}{C^2}$
    - Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
      - όπου $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, και λέγεται ***διηλεκτρική σταθερά του κενού***
  - Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο που έχει βρεθεί στη φύση είναι $e = 1.602 \times 10^{-19}\ C$
    - $C = \text{Coulomb}$: μη θεμελιώδης μονάδα μέτρησης
      - Εξαρτάται από άλλες μονάδες που θα δούμε στη συνέχεια

Ηλεκτρικά Πεδία

- ***Ο νόμος του Coulomb – Διανυσματική μορφή***

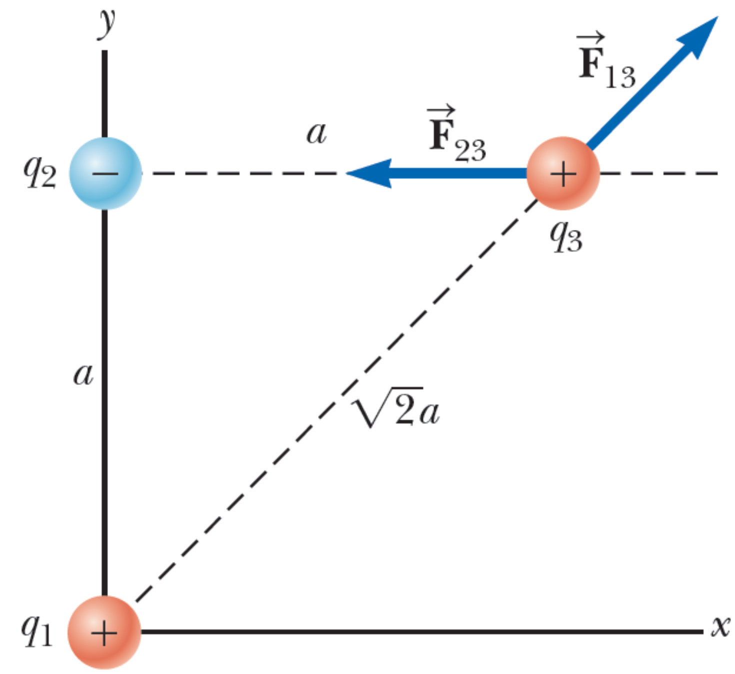
$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_{12}$$

- με $\vec{r}_{12}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το φορτίο 1 στο φορτίο 2



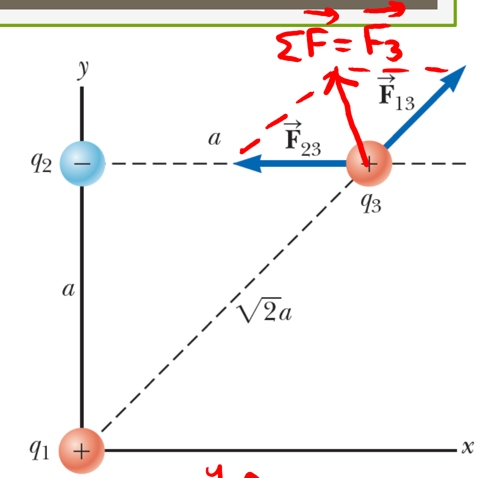
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Τρια σημειακά φορτία βρίσκονται στις γωνίες ενός ισόπλευρου ορθογω-νίου τριγώνου όπως στο σχήμα.
    Δίδεται ότι $q_1 = q_3 = 5\,\mu C$, $q_2 = -2\,\mu C$ και $\alpha = 0.1\,m$.
    Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο q_3.

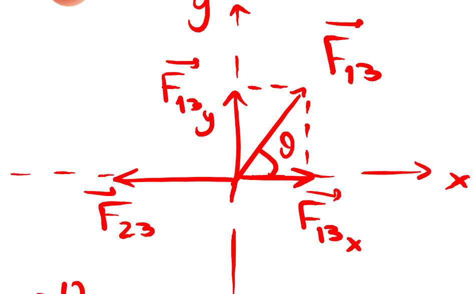


* Τελικά, $\vec{F}_3 = -1.1\cdot\vec{i} + 7.9\cdot\vec{j}$,
γιατί $F_{3y} = F_{13y}$.

Ηλεκτρικά Πεδία



- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Δίδεται ότι $q_1 = q_3 = 5\,\mu C$, $q_2 = -2\,\mu C$ και $\alpha = 0.1\,m$. Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη στο q_3.



Στον άξονα x: $F_{13x} = F_{13}\cdot\cos(\theta)$, F_{23}

Στον άξονα y: $F_{13y} = F_{13}\cdot\sin(\theta)$

Άρα $F_{13} = k_e\frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k_e\frac{5\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{-6}}{(\sqrt{2}a)^2} = k_e\frac{25\cdot10^{-12}}{2a^2} \cong 11.2\ N$

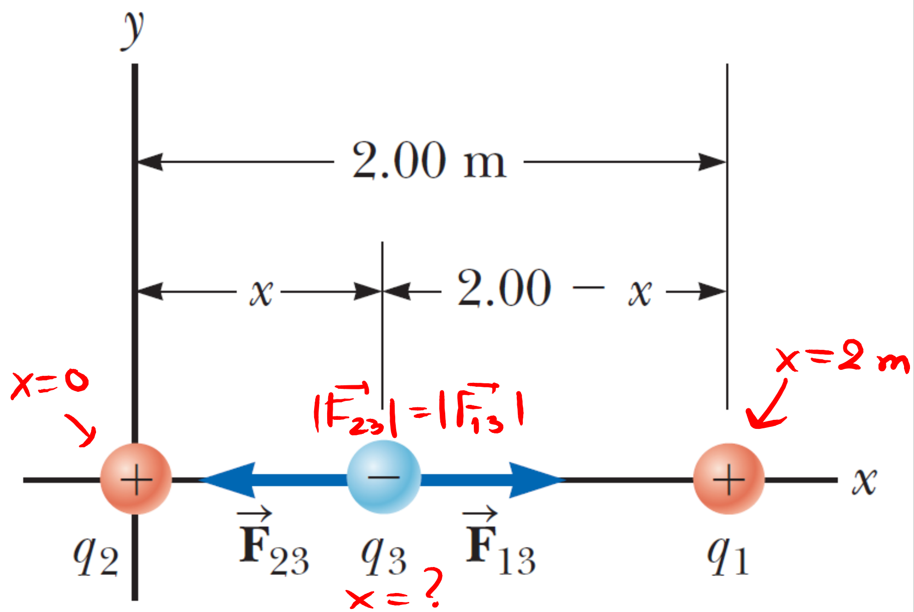
$F_{23} = k_e\frac{|q_2||q_3|}{r^2} = k_e\frac{2\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{-6}}{a^2} = k_e\frac{10\cdot10^{-12}}{a^2} \cong 9.0\ N$

Οπότε $\left.\begin{array}{l} F_{13x} = F_{13}\cdot\cos(\theta) \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \rightarrow F_{13x} = 11.2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 11.2\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 7.9\ N$

Όμοια, $F_{13y} \cong 7.9\ N$. Προσθέτοντας, $F_{3x} = F_{13x} - F_{23} = -1.1\ N$ *

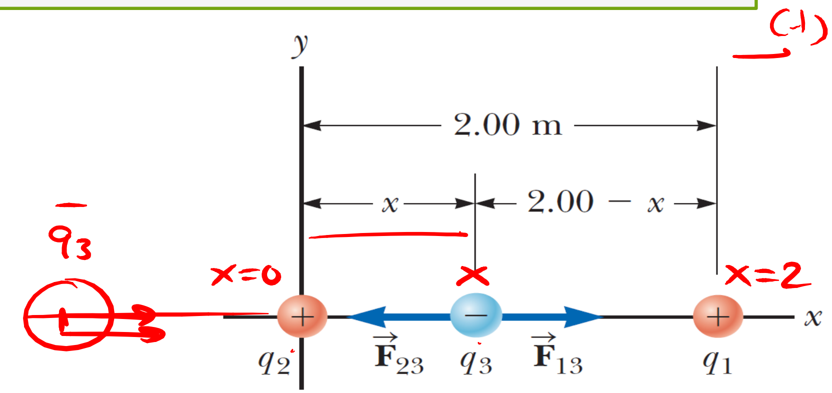
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται επάνω στον x-άξονα όπως στο σχήμα. Το $q_1 = 15\ \mu C$ βρίσκεται στη θέση $x = 2\ m$, το $q_2 = 6\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του q_3.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Το $q_1 = 15\,\mu C$ στη θέση $x = 2\,m$, το $q_2 = 6\,\mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του q_3.



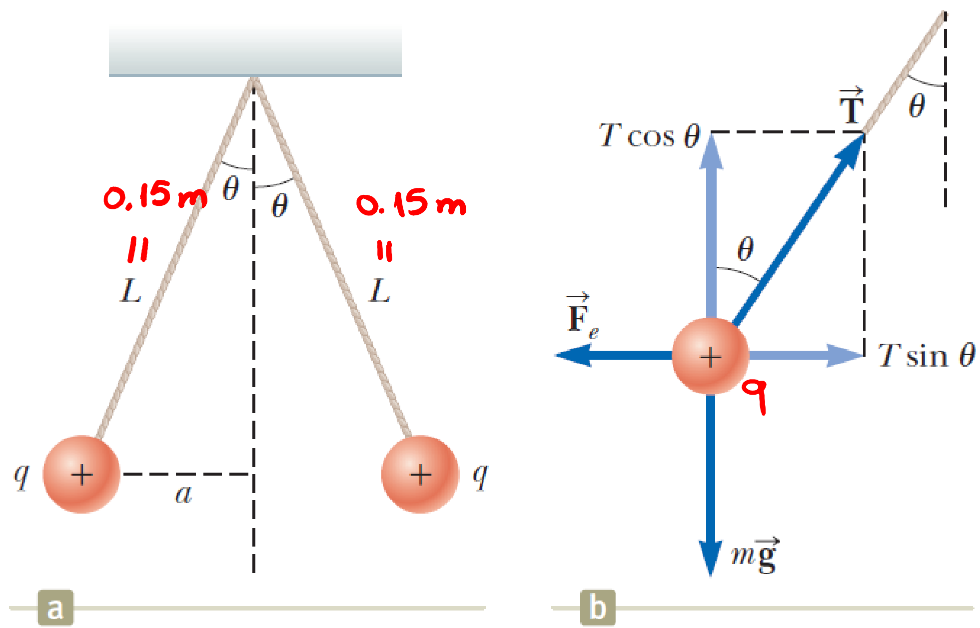
Ξέρω ότι $\sum \vec{F}_{q_3} = \vec{0} \iff \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = 0 \Rightarrow F_{13} = F_{23}$ (1)

Είναι
$$\left.\begin{aligned} F_{13} &= k_e \frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} \\ F_{23} &= k_e \frac{|q_2||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{k_e} \frac{|q_1|\cancel{|q_3|}}{(2-x)^2} = \cancel{k_e} \frac{|q_2|\cancel{|q_3|}}{x^2} \iff$$

$$\iff \frac{|q_1|}{(2-x)^2} = \frac{|q_2|}{x^2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_2|} \pm \sqrt{|q_1|}} \overset{(+)}{\Rightarrow} x = \frac{2\sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_2|} + \sqrt{|q_1|}} = 0.77\,m$$

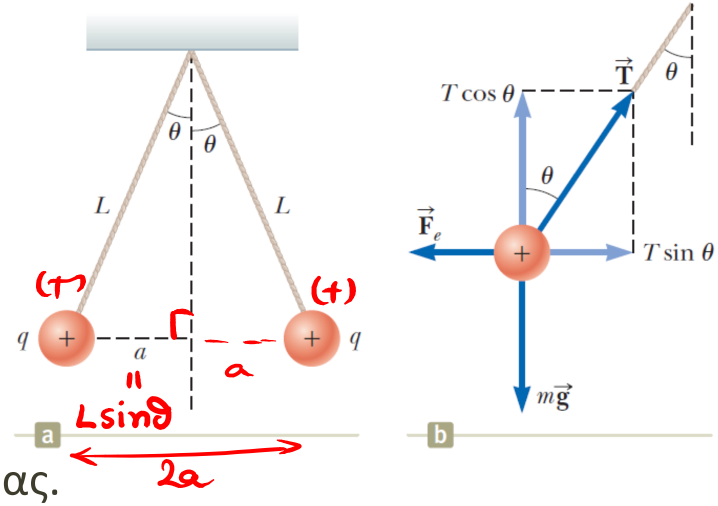
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Δυο όμοιες φορτισμένες σφαίρες, καθεμιά μάζας $m = 3 \times 10^{-2}\ kg$, κρέμονται σε ισορροπία όπως στο σχήμα. Το μήκος κάθε σχοινιού είναι $0.15\ m$, ενώ η γωνία θ είναι 5^o. Βρείτε το μέτρο του φορτίου κάθε σφαίρας.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Δυο όμοιες φορτισμένες σφαίρες, καθεμιά μάζας $m = 3 \times 10^{-2}\ kg$, σε ισορροπία. Το μήκος κάθε σχοινιού είναι $0.15\ m$, ενώ η γωνία θ είναι 5^o. Βρείτε το μέτρο του φορτίου κάθε σφαίρας.



Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία σε όλους τους άξονες.

Άρα
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow T\sin\theta = F_e \\ \Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow T\cos\theta = mg \end{array}\right\} \overset{(:)}{\Longrightarrow} \frac{\cancel{T}\sin\theta}{\cancel{T}\cos\theta} = \frac{F_e}{mg} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{F_e}{mg} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_e = mg\cdot\tan\theta \\ F_e = k_e \dfrac{q\cdot q}{r^2} = k_e \dfrac{q^2}{4a^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2 = \dfrac{mg\tan\theta\cdot 4a^2}{k_e} \\ a = L\sin\theta \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{mg\cdot\tan\theta\cdot 4L^2\sin^2\theta}{k_e}}$$ (θετικό πρόσημο λόγω εκφώνησης)

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Η έννοια του πεδίου αναπτύχθηκε από τον Faraday
  - Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο
    - που λέγεται ***πηγή φορτίου***
  - Όταν ένα άλλο (αρκετά μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο, μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του
  - Ορίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω της επίδρασης της πηγής φορτίου επάνω σε άλλα φορτισμένα σωματίδια ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται ανά μονάδα φορτίου
    - Αλλιώς, ορίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0, δια το φορτίο αυτό

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Ορίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0, δια το φορτίο αυτό

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0}$$

  - Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό φορτίο q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{\mathrm{F}}_e = q_0\vec{E}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

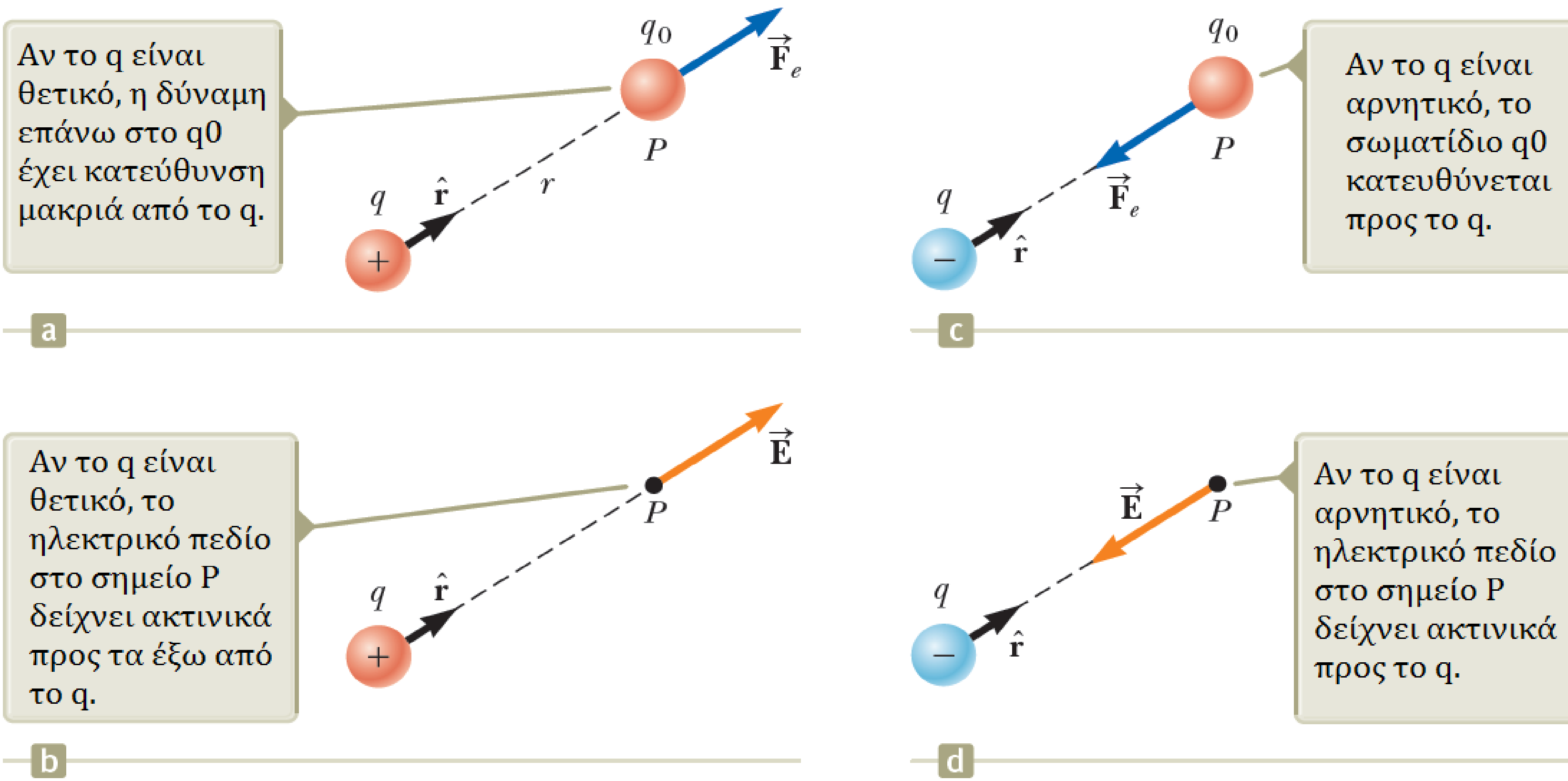
$$\vec{\mathrm{F}}_e = q_0\vec{E}$$

- Αν το q_0 είναι θετικό, η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το πεδίο
- Αν το q_0 είναι αρνητικό, το πεδίο και η δύναμη έχουν αντίθετες κατευθύνσεις
- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο P λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q δίνεται ως

$$\vec{E} = k_e\frac{q}{r^2}\vec{r}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Τι συμβαίνει αν έχουμε πολλές πηγές φορτίου q_i;
  - Ηλεκτρικό πεδίο: διανυσματικό μέγεθος

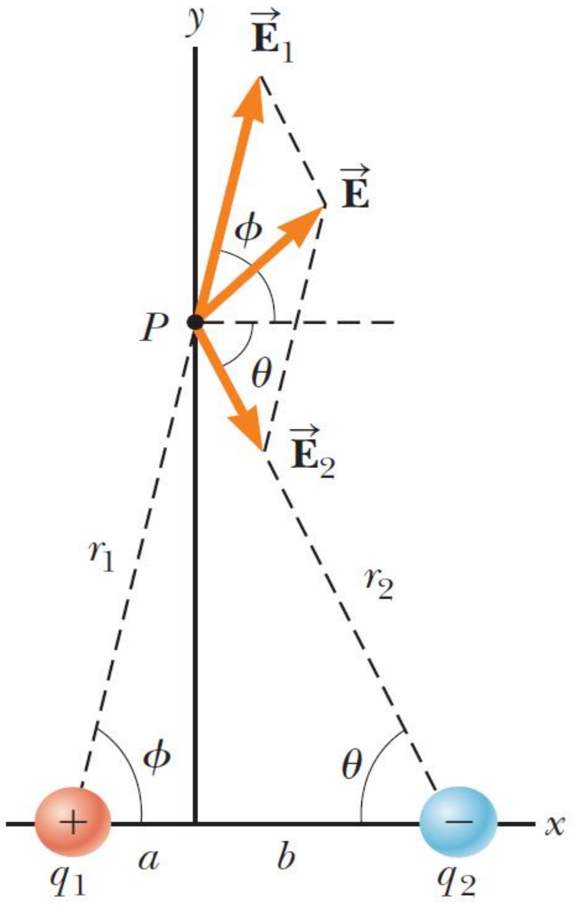
$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r_i}}$$

όπου r_i η απόσταση κάθε πηγής από ένα σημείο P και $\vec{\mathbf{r_i}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή i στο σημείο P

  - Προσθέτουμε διανυσματικά τις επιμέρους συνεισφορές

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.
    A) Βρείτε τις συνισταμένες του ηλε-κτρικού πεδίου στο σημείο P (0,y).
    B) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.
    Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν y $\gg a$.

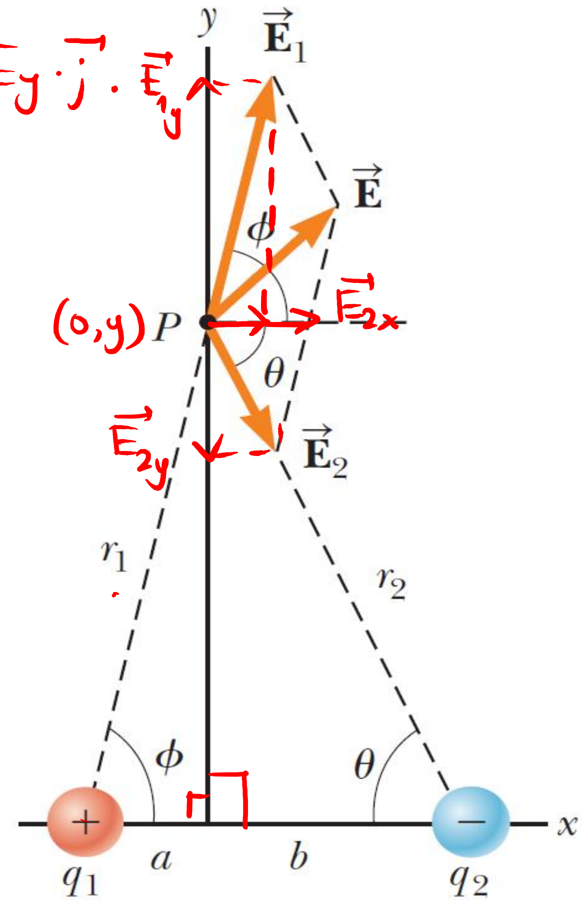


$\Rightarrow E_x = k_e\left(\frac{|q_1|\cos\varphi}{y^2+a^2} + \frac{|q_2|\cos\theta}{y^2+b^2}\right)$, όμοια βρίσκω την E_y, και τελικά

$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j}$.

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα. Α) Βρείτε τις συνισταμένες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P (0,y).



Είναι $\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j}$

Έχουμε $E_1 = k_e\frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e\frac{|q_1|}{y^2+a^2}$

$E_2 = k_e\frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e\frac{|q_2|}{y^2+b^2}$

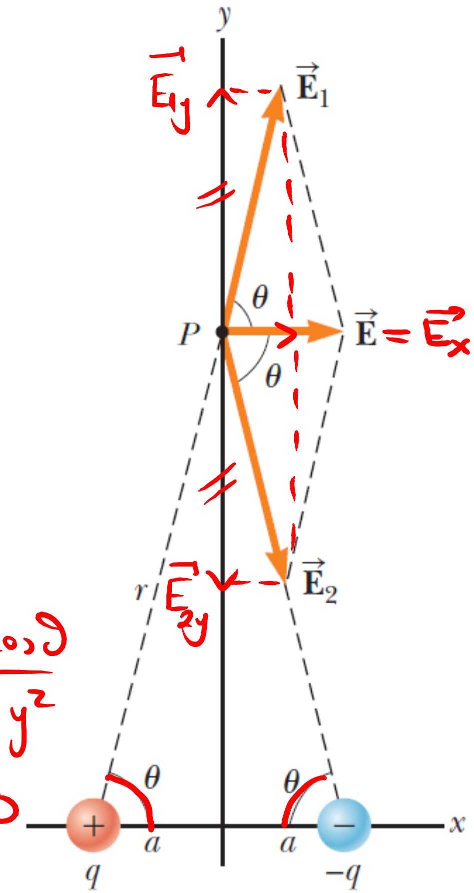
Ξέρω ότι $\vec{E}_x = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} \Rightarrow E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1\cdot\cos\varphi + E_2\cdot\cos\theta$

Είναι $E_1\cdot\cos\varphi = k_e\frac{|q_1|\cos\varphi}{y^2+a^2}$, $E_2\cdot\cos\theta = k_e\frac{|q_2|\cos\theta}{y^2+b^2}$ $\Rightarrow$

Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.
  Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.



Στη διπλανή διάταξη:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = k_e \frac{q \cdot \cos\theta}{a^2+y^2} + k_e \frac{q \cdot \cos\theta}{a^2+y^2} = 2k_e \frac{q \cdot \cos\theta}{a^2+y^2}$$

$$E_y = E_{1y} - E_{2y} = k_e \frac{q}{a^2+y^2} \sin\theta - k_e \frac{q}{a^2+y^2} \sin\theta = 0$$

Άρα

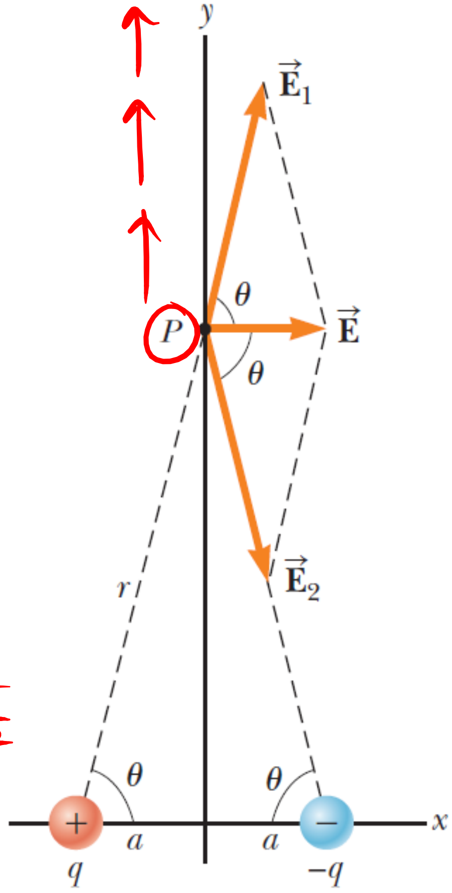
$$E = E_x = 2k_e \frac{q}{a^2+y^2} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow E = 2k_e \frac{q}{a^2+y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = 2k_e \frac{qa}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα. Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



Τι συμβαίνει όταν $y >> a$?

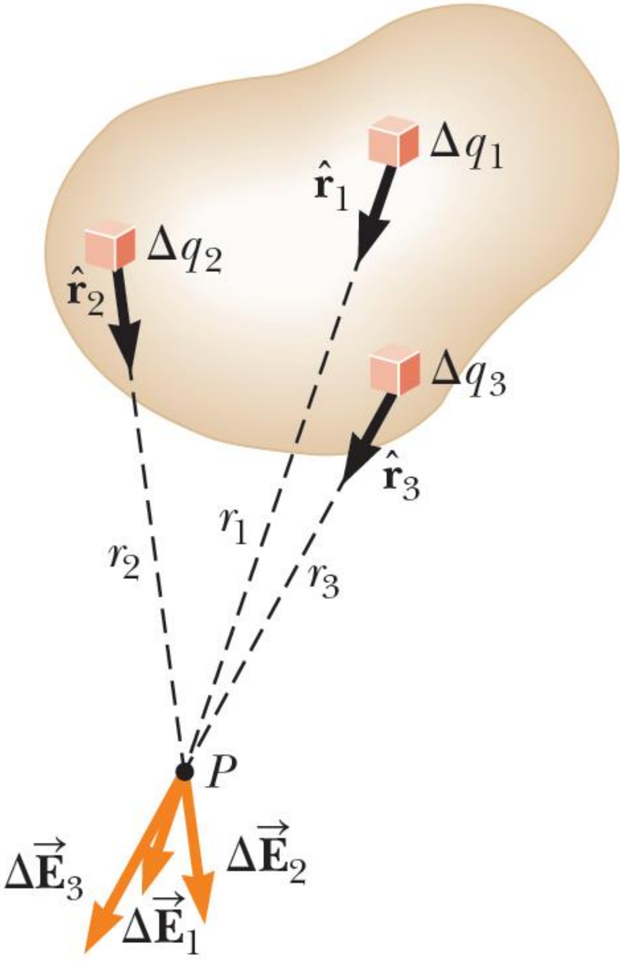
Έχουμε $E = k_e \dfrac{2qa}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

αν $y >> a$, τότε $a^2 + y^2 \simeq y^2$

$\Rightarrow E \cong 2k_e \dfrac{qa}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} \cong 2k_e \dfrac{aq}{y^3}$

Ηλεκτρικά Πεδία

- Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία
- Πολλές φορές έχουμε μια ***κατανομή φορτίου*** αντί για σημειακά φορτία
  - Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι **συνεχώς και ομοιόμορφα** κατανεμημένη σε μια γραμμή, επιφάνεια, ή όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

$\approx \sum_i \Delta E_i$

- Προσεγγιστικά

$\approx \Delta E_1 + \Delta E_2 + \ldots$

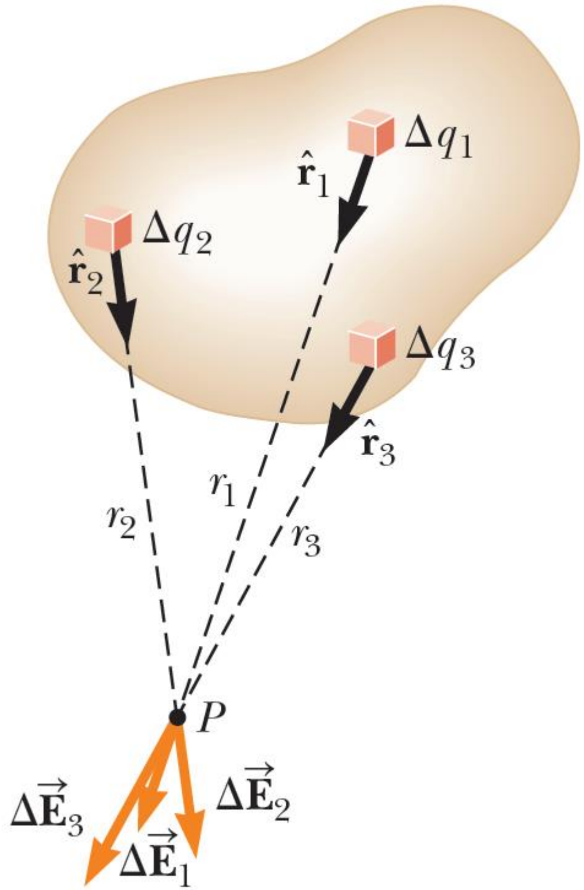
$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}$$

- Επειδή όμως τα διαφορετικά σημειακά φορτία είναι πάρα πολλά

$\lim_{i \to \infty} \sum_i \Delta E_i$

$$\vec{E} \approx k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}$$

$$= k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{r}}$$



- Το ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό
  - και μπορεί να περιλαμβάνει
    - μια γραμμή
    - μια επιφάνεια
    - ή έναν όγκο.

Ηλεκτρικά Πεδία

- Προς βοήθειά μας, θα ορίσουμε

  - Γραμμική πυκνότητα φορτίου

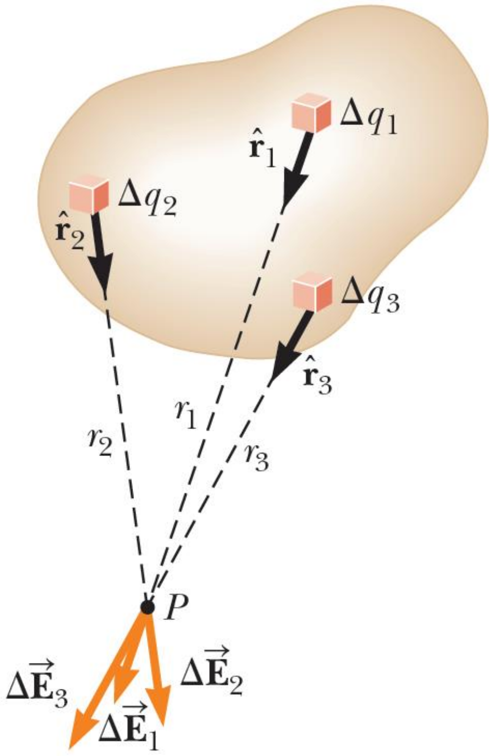
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

  - Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

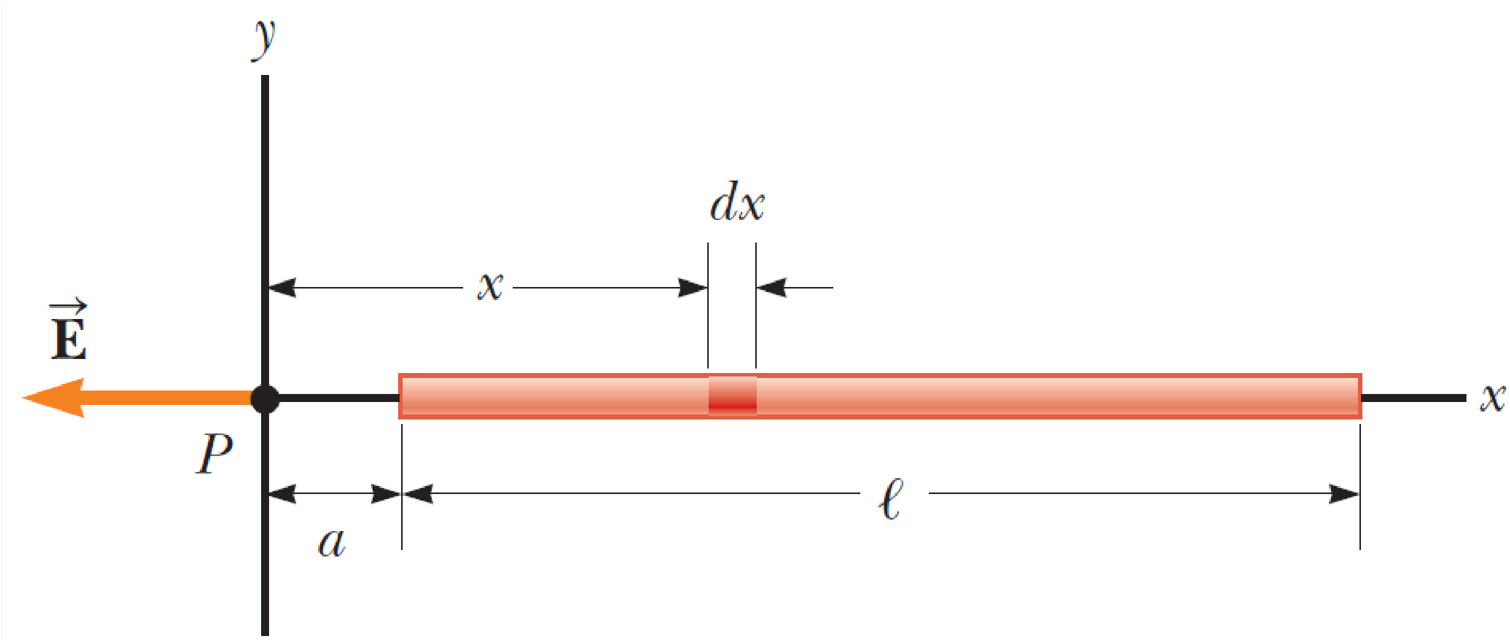
  - Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

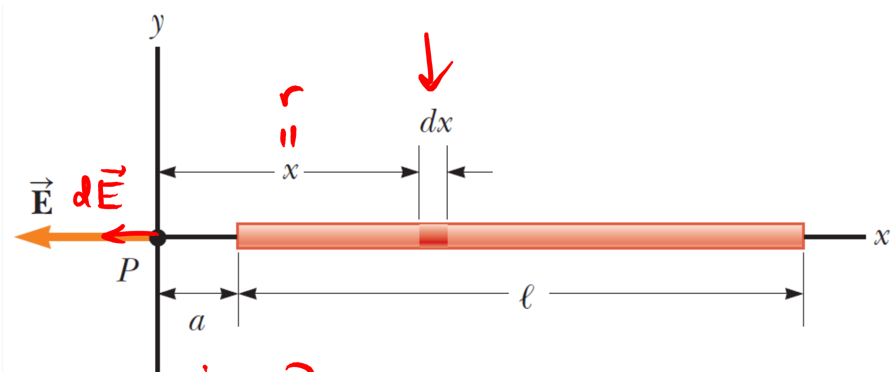
- **Παράδειγμα 1:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση a από το ένα άκρο της ράβδου, στην ευθεία της ράβδου, όπως στο σχήμα.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \quad (3) \Rightarrow \lambda = \frac{dq}{dx}$$



Θεωρώ τμήμα της ράβδου dx.

Το τμήμα αυτό έχει φορτίο

$$dq = \lambda dx \quad (1)$$

Το τμήμα dx συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ως:

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2} . \quad (2)$$

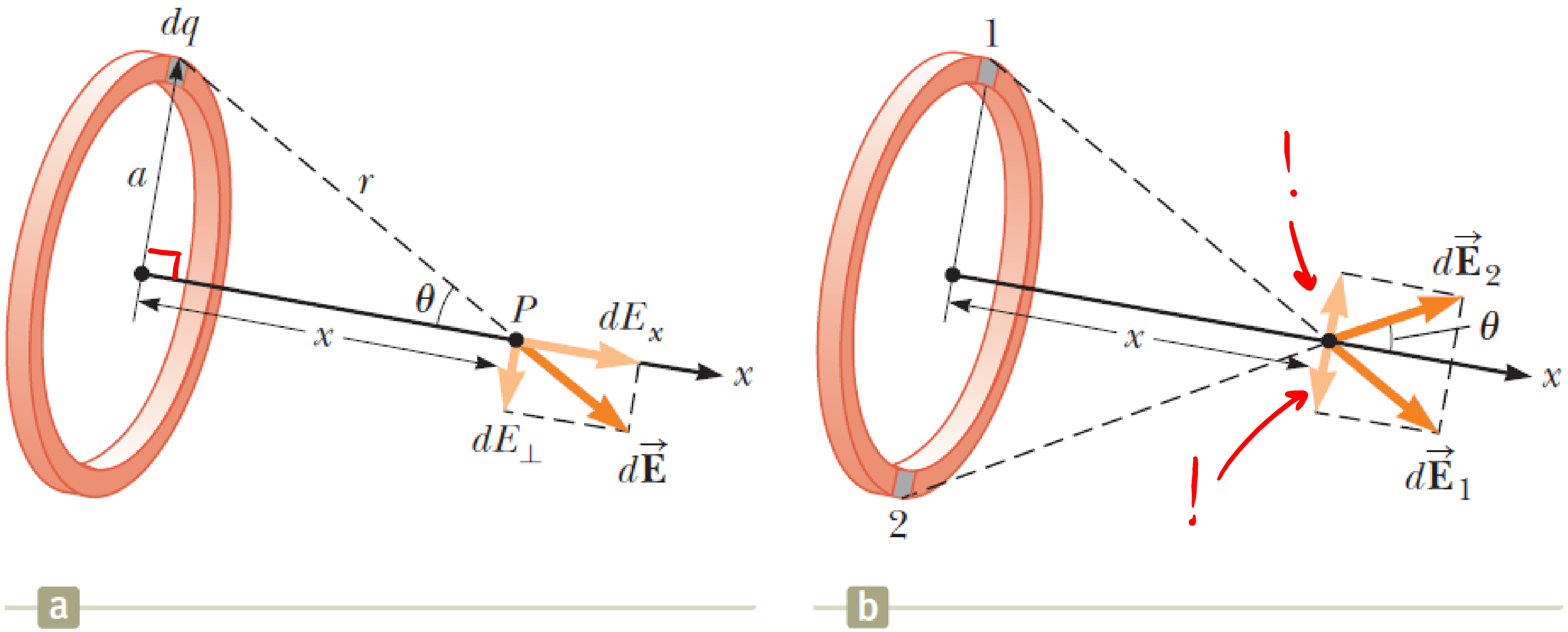
Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές dE, έχουμε: $E = \int dE = \int k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \int \frac{dq}{x^2}$

Από (1), έχουμε $E = k_e \int \frac{\lambda dx}{x^2} = k_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{1}{x^2} dx = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a} = k_e \lambda \frac{\ell}{a(\ell+a)}$

$$\overset{(3)}{=} k_e \frac{Q}{\cancel{\ell}} \frac{\cancel{\ell}}{a(\ell+a)} = k_e \frac{Q}{a(\ell+a)} .$$

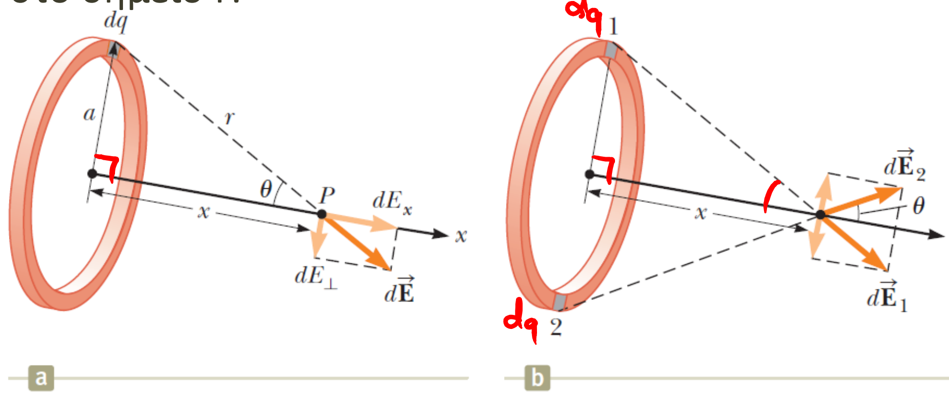
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 2:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 2 – Λύση:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες $dE_\perp^1$, $dE_\perp^2$ των σημειακών φορτίων dq_1, dq_2 αλληλοαναιρούνται, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.

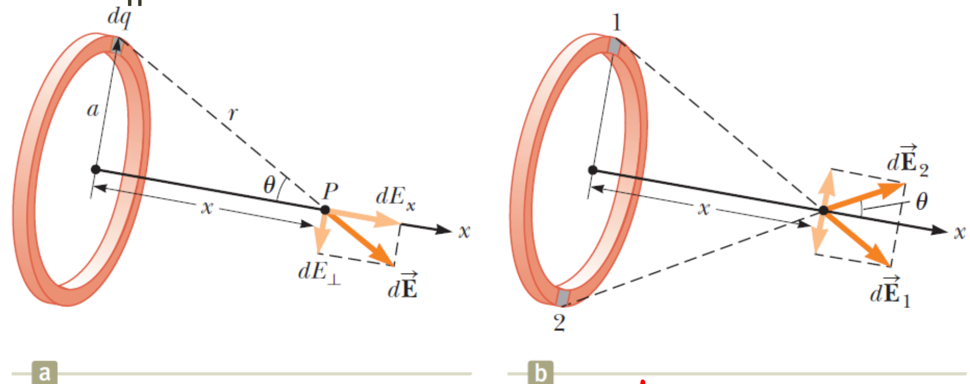
$$dE_x: \quad \left.\begin{matrix} dE_x = k_e \dfrac{dq}{r^2}\cdot\cos\theta \\ r^2 = a^2 + x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} dE_x = k_e \dfrac{dq}{a^2+x^2}\cdot\cos\theta \\ \cos\theta = x/r \\ r = \sqrt{a^2+x^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{a^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= k_e \frac{dq\cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1)$$

Ηλεκτρικά Πεδία

Παράδειγμα 2 – Λύση:

- Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Αθροίζοντας ($\int$) όλες τις συνεισφορές dE_x για κάθε σημειακό φορτίο dq, έχουμε:

$$E_P = E_x^P = \int dE_x^P = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Τα x, k_e, a είναι σταθερές!

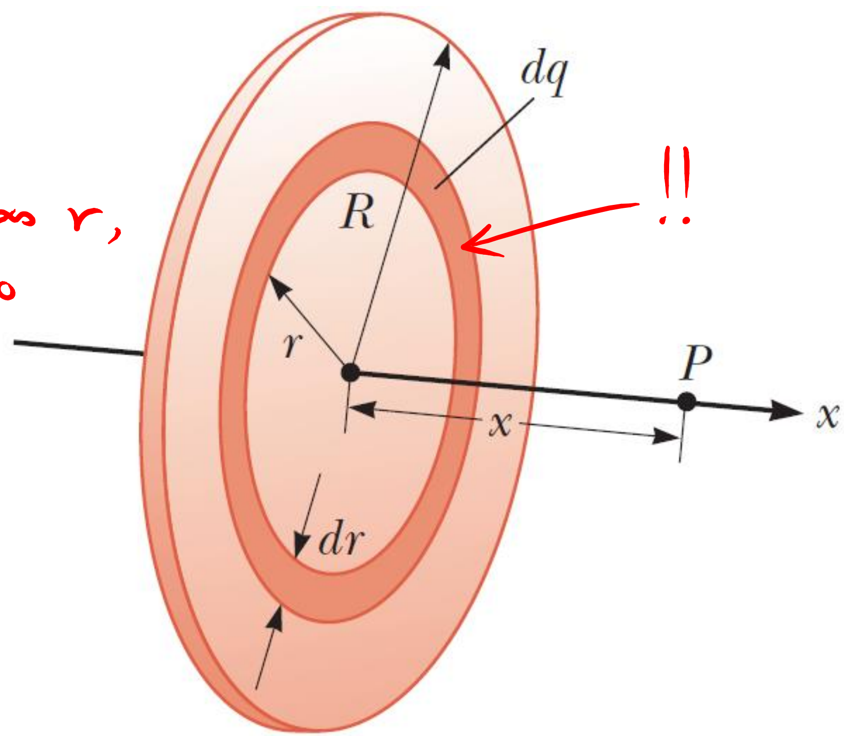
Άρα $$E_P = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q = k_e \frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Άρα για ένα δακτύλιο ακτίνας a, φορτίου Q, και γραμμικής πυκνότητας φορτίου, η τιμή του E σε ένα σημείο P απόστασης x είναι

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$$ ← εμβαδό

- **Παράδειγμα 3:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε απόσταση x, και που βρίσκεται στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου.



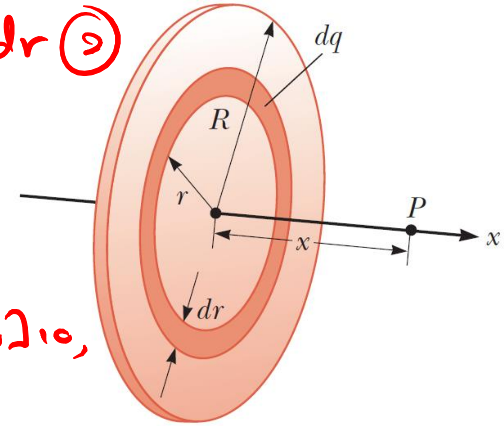
Από προηγ. ερώτημα, γνωρίζαμε ότι ένας δακτύλιος φορτίου dq, ακτίνας r, και πάχους dr συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ίσο με:

$$dE_P = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA}}$$

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Έχουμε $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r \cdot dr} \Rightarrow dq = 2\pi r \cdot \sigma \cdot dr$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $dE_p = k_e \frac{2\pi r \sigma x \, dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Αθροίζοντας, όλες τις συνεισφορές για κάθε δακτύλιο, θα έχω:

$$E_p = \int dE_p = \int k_e \frac{2\pi r \sigma x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \pi \sigma x k_e \int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr \quad (3)$$

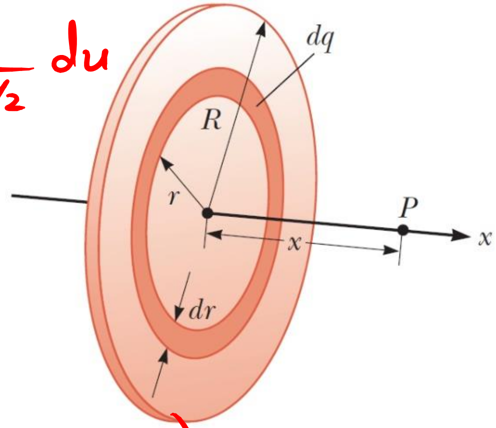
Είναι $\int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$. Θέτω $u = r^2+x^2 \Rightarrow du = 2r \cdot dr + 0 = 2r \cdot dr$

Είναι $u_1 = x^2$, $u_2 = R^2+x^2$

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Άρα $$\int_0^R \frac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}} du$$

$$= \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -2k_e \pi x \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{R^2+x^2} =$$

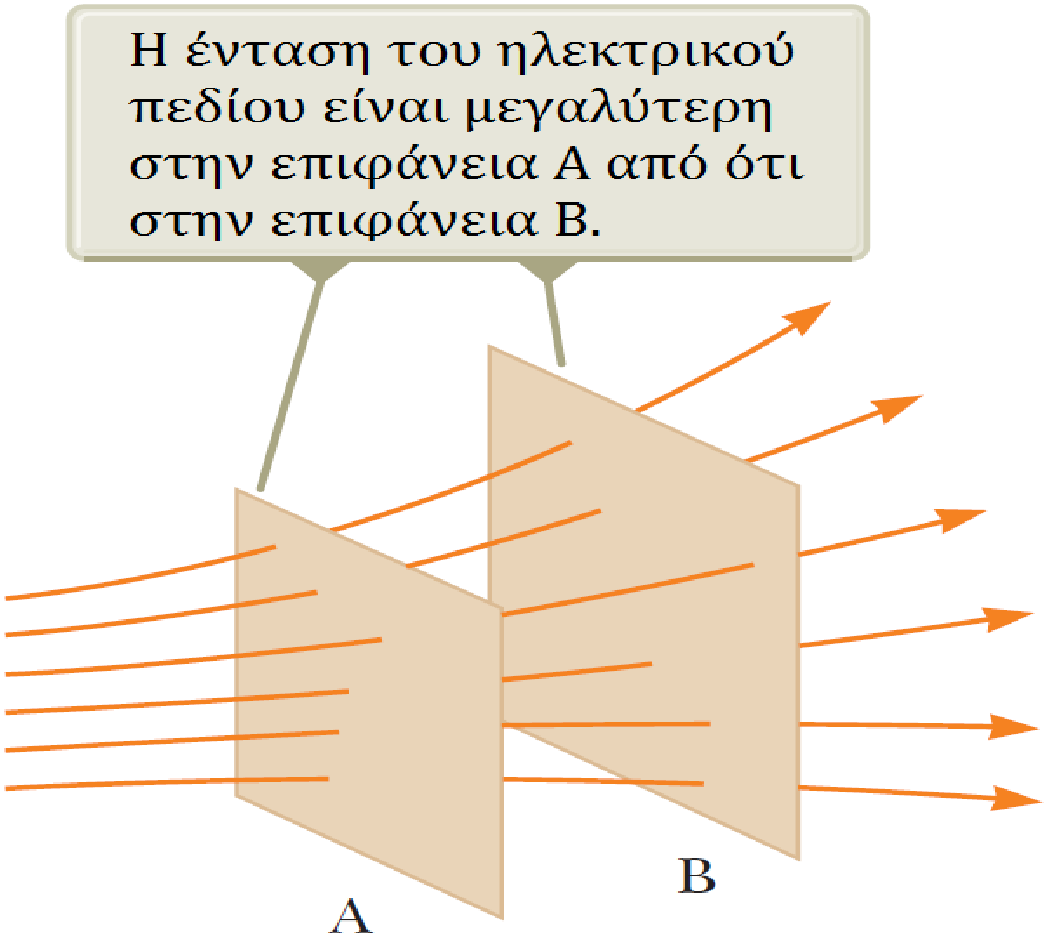
$$= 2k_e x \pi \sigma \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right).$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**
  - Δεν μπορούμε να δούμε ένα ηλεκτρικό πεδίο
  - Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης είναι οι **δυναμικές γραμμές** ηλεκτρικού πεδίου
    - Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο
    - Η κατεύθυνση της γραμμής είναι όμοια με της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο πεδίο
    - Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου
      - Με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πιο πυκνές όπου η ένταση του πεδίου είναι μεγαλύτερη

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

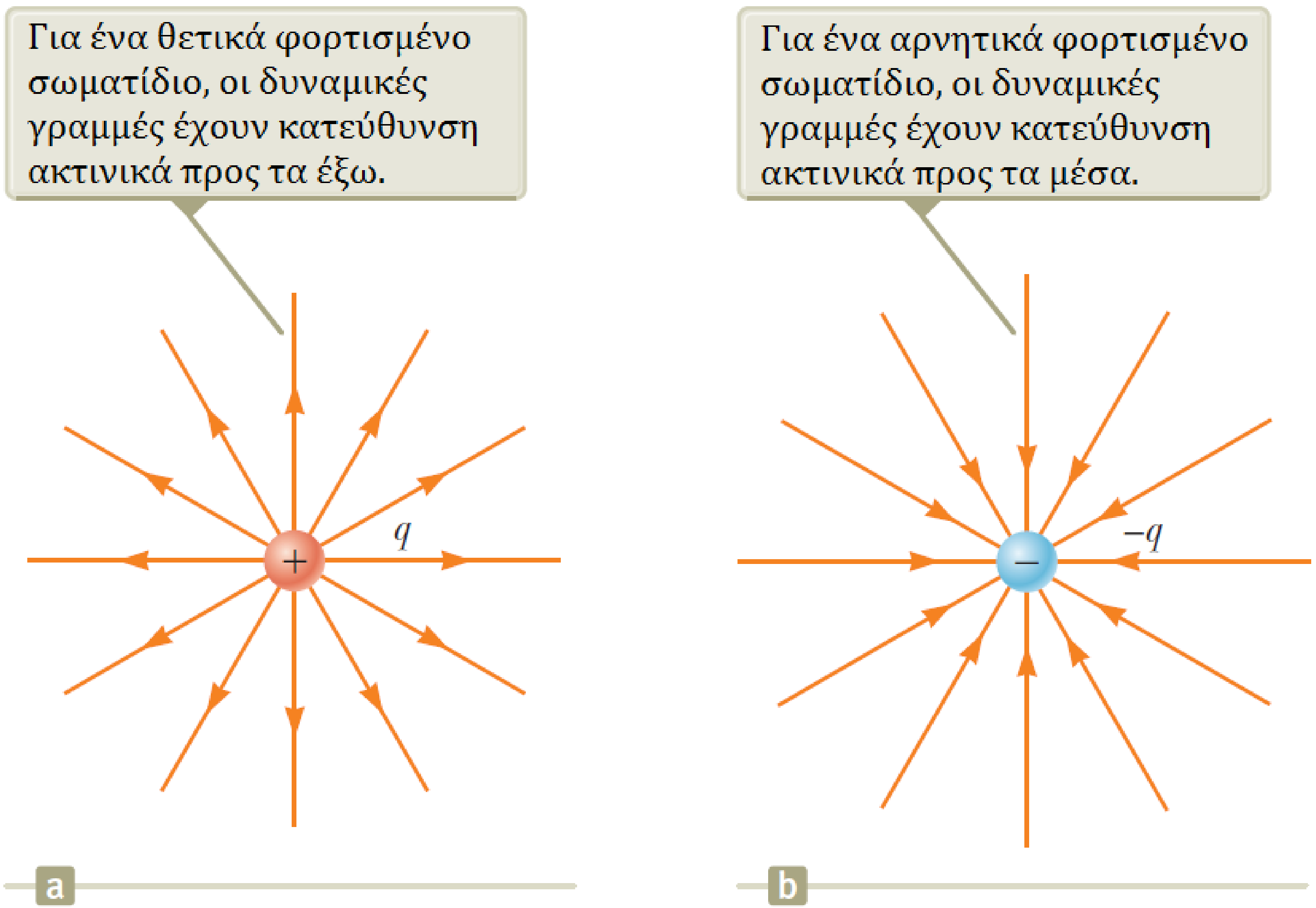


Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**
  - Πώς τις σχεδιάζουμε;
    - Οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε οι δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν ή θα τελειώνουν απειροστά μακριά.
    - Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογη του μέτρου του φορτίου.
    - Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

Ηλεκτρικά Πεδία

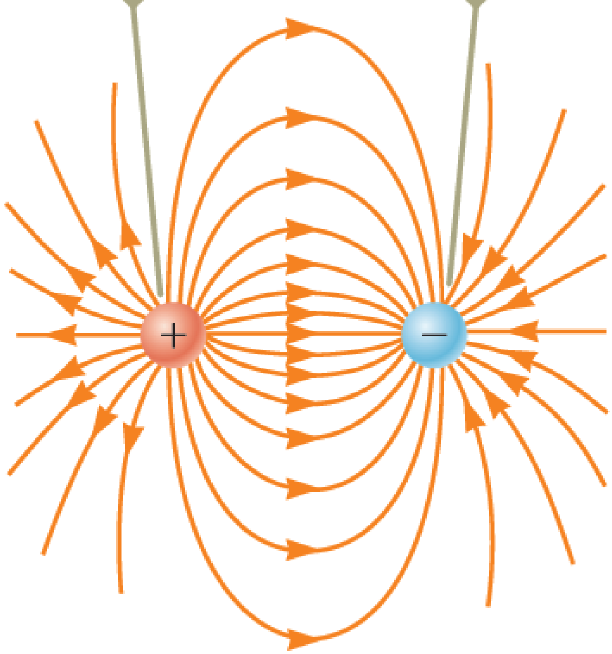
- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**



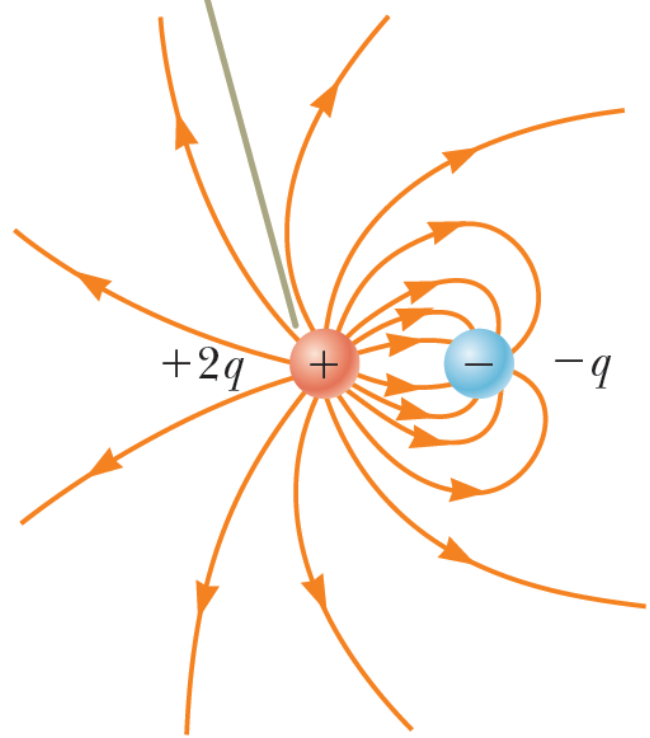
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου**

Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που ξεκινούν από το θετικό φορτίο ισούται με τον αριθμό γραμμών που φθάνουν στο αρνητικό φορτίο.



Δυο δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το + 2q για κάθε μια που τερματίζει στο -q.



Ηλεκτρικά Πεδία

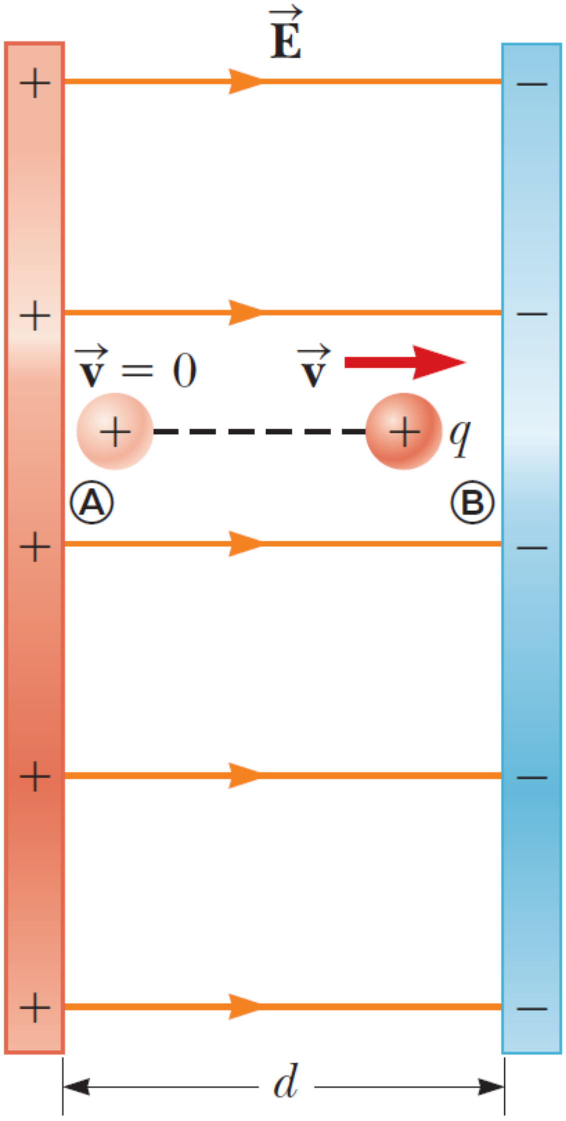
- **Κίνηση σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**
  - Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q
  - Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
  - Επιταχυνόμενη κίνηση λόγω ηλεκτρικής δύναμης

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = ma \rightarrow \ \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

  - Αν το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο, η κίνησή του είναι προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου
  - Αλλιώς, η κίνηση είναι αντίθετη της κατεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου

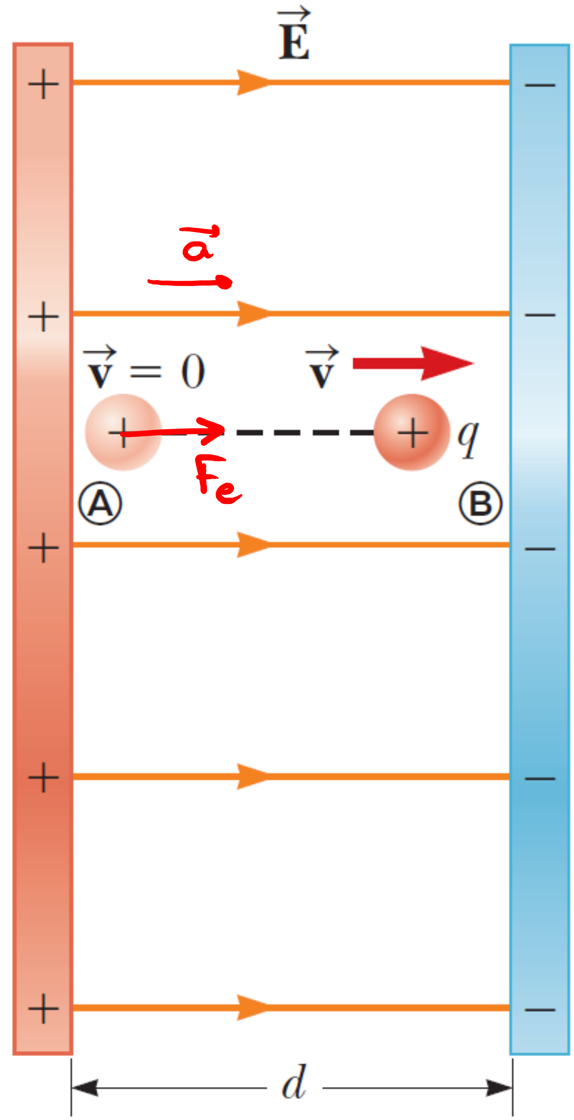
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με κατεύθυνση επάνω στο x-άξονα ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση d, όπως στο σχήμα. Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.
    A) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.
    B) Υπολογίστε το A) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο A και επιταχύνεται στο σημείο B.
    A) Βρείτε την ταχύτητα στη θέση B.



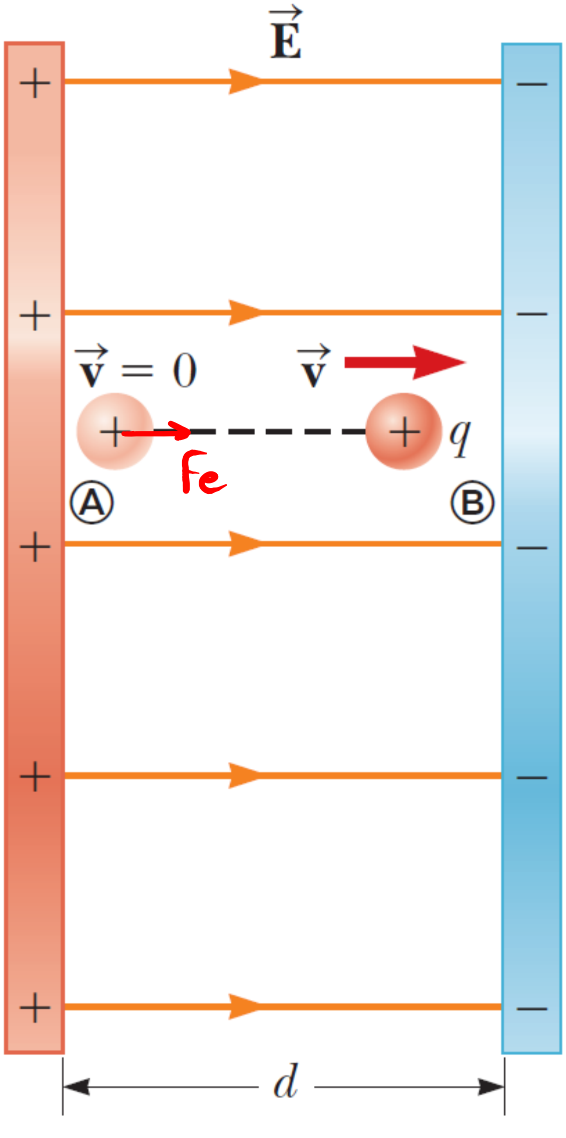
Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγρ. ομαλά επιταχ. υπό την επίδραση της δύναμης F_e.
Από τις εξισώσεις της Ε.Ο.Ε.Κ. έχουμε:

$$u_B^2 = \cancel{u_A^2}_{0} + 2a\cdot\Delta x = 2a\Delta x = 2ad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow u_B = \sqrt{2ad} \\ a = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{qE}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow u_B = \sqrt{\dfrac{2Edq}{m}}.$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Σωματίδιο φορτίου +q μάζας m αφήνεται από το σημείο Α και επιταχύνεται στο σημείο Β.
    Β) Υπολογίστε το Α) ερώτημα με χρήση εννοιών ενέργειας.



Θεωρώ το μη-απομονωμένο σύστημα του σώματος.

Η F_e θεωρείται εξωτερική δύναμη στο σύστημα.

ΑΔΕ ή ΘΜΚΕ:

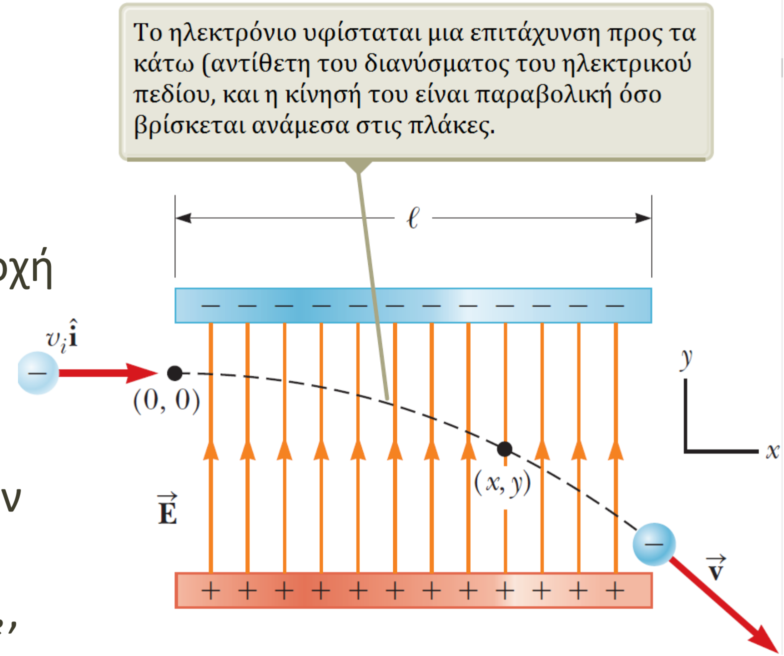
$$\Delta K_{A\to B} = W_{F_e} \Leftrightarrow K_B - K_A = F_e \cdot d = qE \cdot d$$

όμως $K_A = 0$, οπότε $K_B = qEd \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_B^2 = qEd \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}.$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m. Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e, καθώς και το φορτίο του, e.



Α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

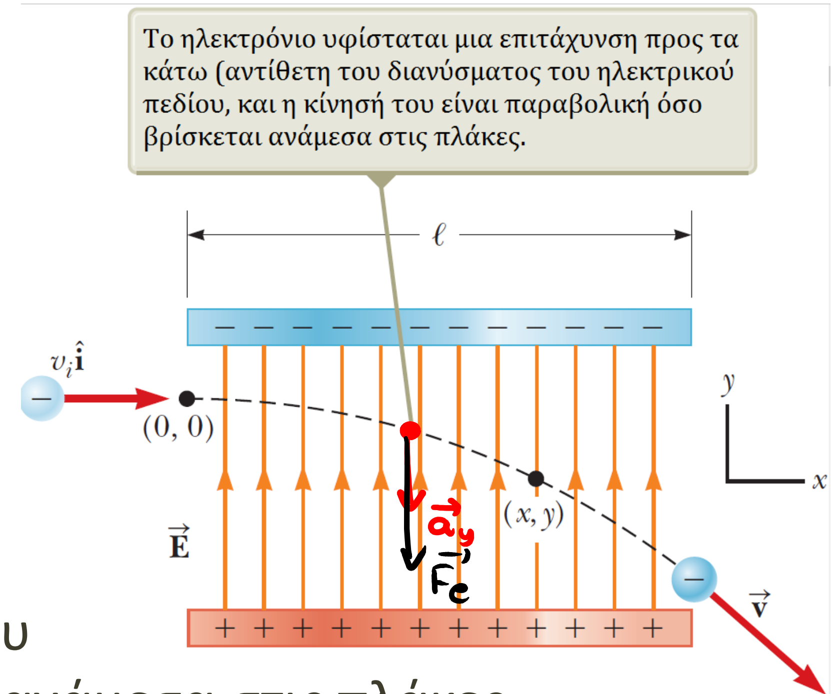
Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

Γ) Υποθέτοντας ότι η y-συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.

    Α) Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.

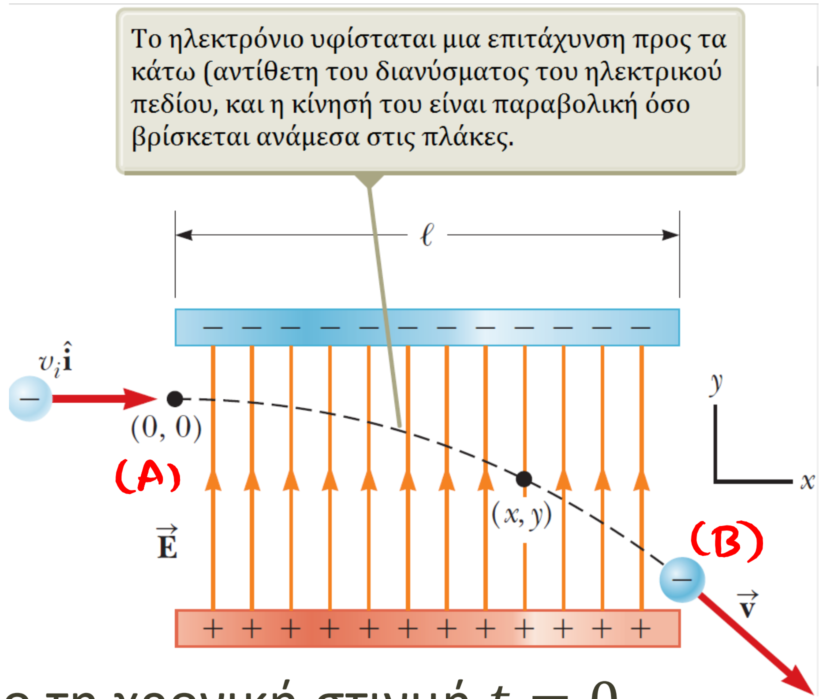


Αφού το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο, θα κινηθεί αντίθετα από τις δυναμικές γραμμές. Άρα η επιτάχυνση λόγω της ηλεκτρικής δύναμης που θα του ασκηθεί θα είναι όπως στο σχήμα.

Ισχύει $\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} \Leftrightarrow \vec{F_e} = m\vec{a_y} \Rightarrow a_y = -\frac{E \cdot e}{m_e} = -3.5 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.
    Β) Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.

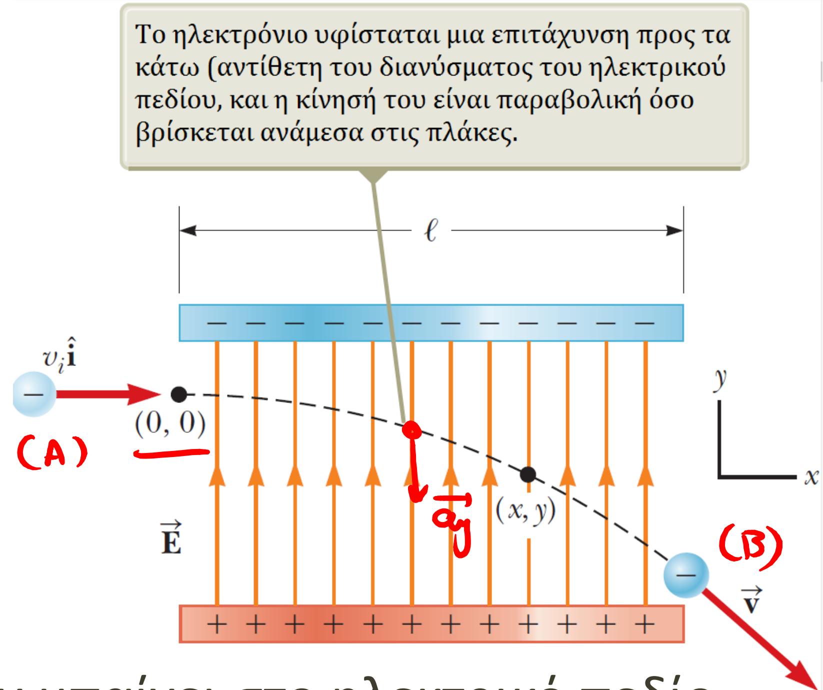


Ζητάμε το χρόνο που απαιτείται για να διανύσει το μήκος l.
Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον x-άξονα της κίνησής του.

Άρα $x_B = x_A + u_x t \Rightarrow t = \frac{x_B - x_A}{u_x} = \frac{l}{u_x} = \frac{0.1}{3 \cdot 10^6} = 3.3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Η αρχική ταχύτητά του είναι $u_i = 3 \times 10^6$ m/s και $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m.
    Γ) Υποθέτοντας ότι η y-συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι y = 0, ποια είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;



Στον y-άξονα της κίνησης του, το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, λόγω της $\vec{a_y}$. Άρα:

$$y_B = y_A + u_{i_y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{eE}{m_e}\right)\left(\frac{x_B - x_A}{u_x}\right)^2 = -0.0195 \text{ m}$$

Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

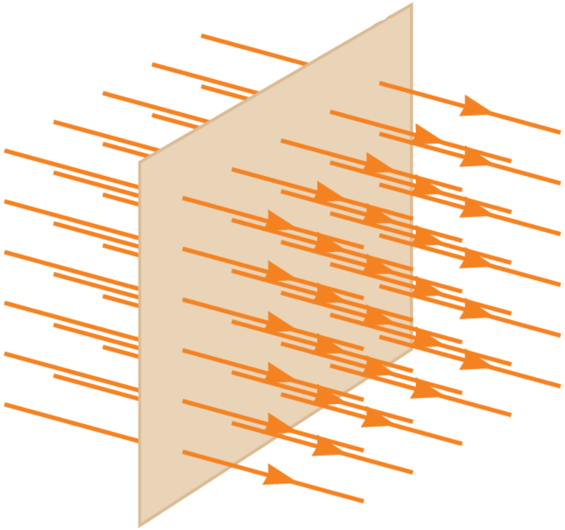
Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

- Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών ποιοτικά
- Τώρα, θα το μελετήσουμε πιο «ποσοτικά»
- Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
  - Οι δυναμικές γραμμές περνούν κάθετα την επιφάνεια εμβαδού A
  - Θυμηθείτε: πυκνότητα γραμμών ανάλογη του μέτρου του πεδίου
  - Ο αριθμός γραμμών είναι ανάλογος του γινομένου EA



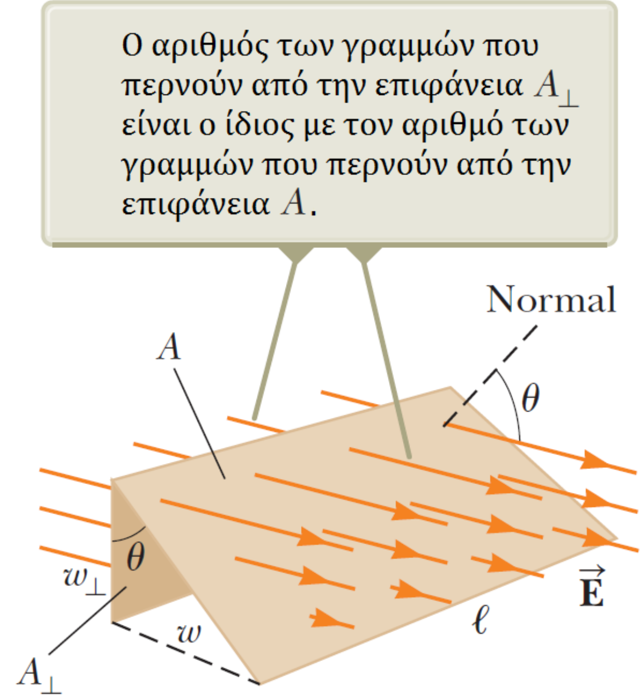
  - Αυτό το γινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** $\boldsymbol{\Phi_E}$

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Αν η επιφάνεια δεν είναι κάθετη τότε η ηλεκτρική ροή δίνεται ως

$$\boldsymbol{\Phi_E = EA_{\perp} = EA\cos(\theta)}$$

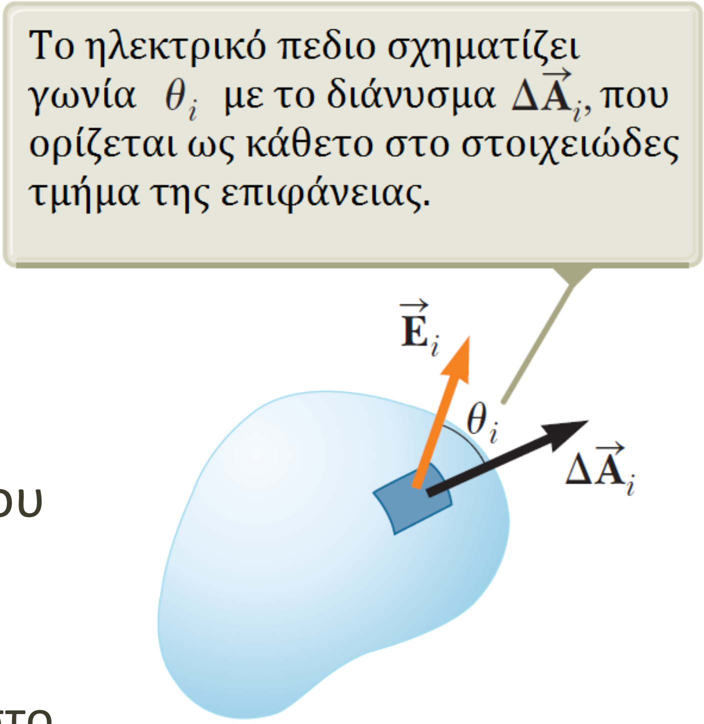
  - Επίσης, το πεδίο μπορεί να μην είναι ομογενές.
    - Μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με την επιφάνεια



  - Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα για μικρές επιφάνειες με ***σταθερό ηλεκτρικό πεδίο***
  - Το $EA\cos(\theta)$ πρέπει να σας θυμίζει κάτι…
    - Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων!
    - Το E είναι διάνυσμα πράγματι…
    - Το A είναι εμβαδό (αριθμητική τιμή)!!

Ο νόμος του Gauss

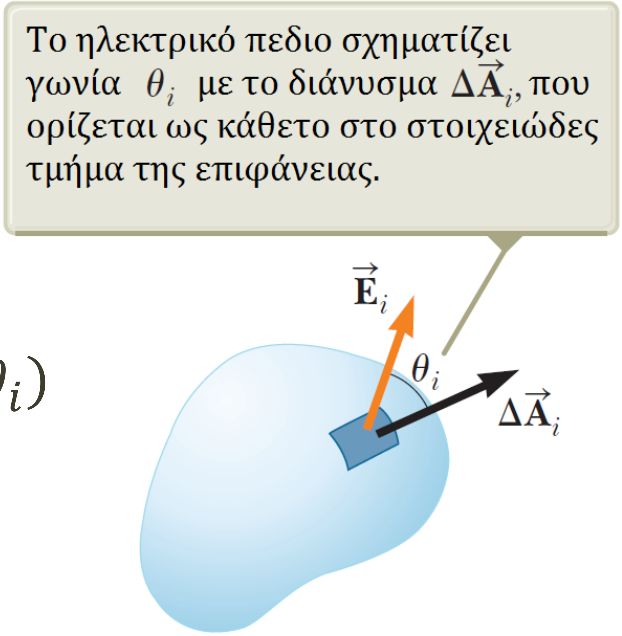
- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας καθένα με εμβαδό ΔΑ
  - Ας ορίσουμε το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$ του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του i-οστού στοιχείου
    - Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού ΔA_i της επιφάνειας
    - Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}_i$ στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_i$



Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια αυτή είναι

$$\Phi_{E_i} = E_i(\Delta A_i)\cos(\theta_i)$$



  - Το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi_{E_i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

    - που είναι το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο

  - Αθροίζοντας την ηλεκτρική ροή για κάθε μικρό στοιχείο

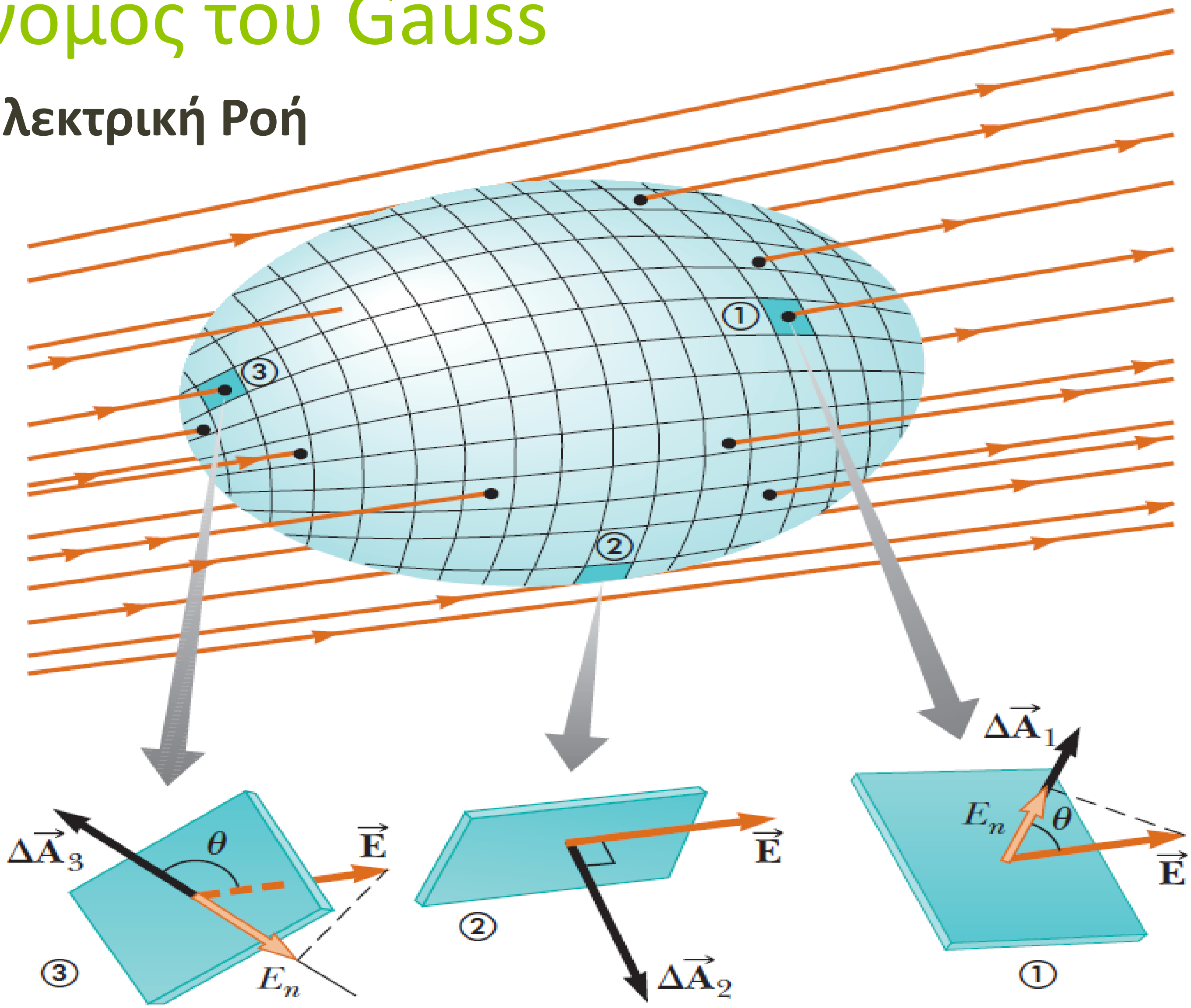
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to dA} \sum_i \Phi_{E_i} = \int_{\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**
  - Μας ενδιαφέρουν οι *κλειστές επιφάνειες* για τον υπολογισμό της ροής
    - Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου
      - Π.χ. η επιφάνεια μιας σφαίρας
  - Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις

Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**



Ο νόμος του Gauss

- **Ηλεκτρική Ροή**

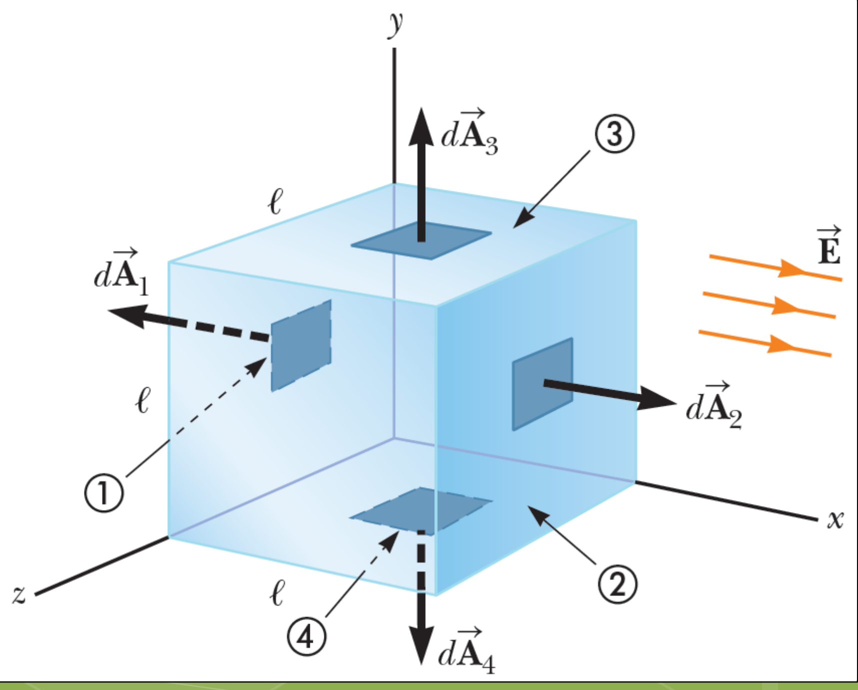
  - Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

με E_n τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
  - Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με προσανατολισμό στο x-άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής ℓ τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο σχήμα. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.



Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.

$\vec{E} \perp \vec{A}_3$ $\quad$ $\vec{E} \perp \vec{A}_4$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2 + \overbrace{\int_3 \vec{E}\cdot d\vec{A}_3}^{0} + \overbrace{\int_4 \vec{E}\cdot d\vec{A}_4}^{0}$$

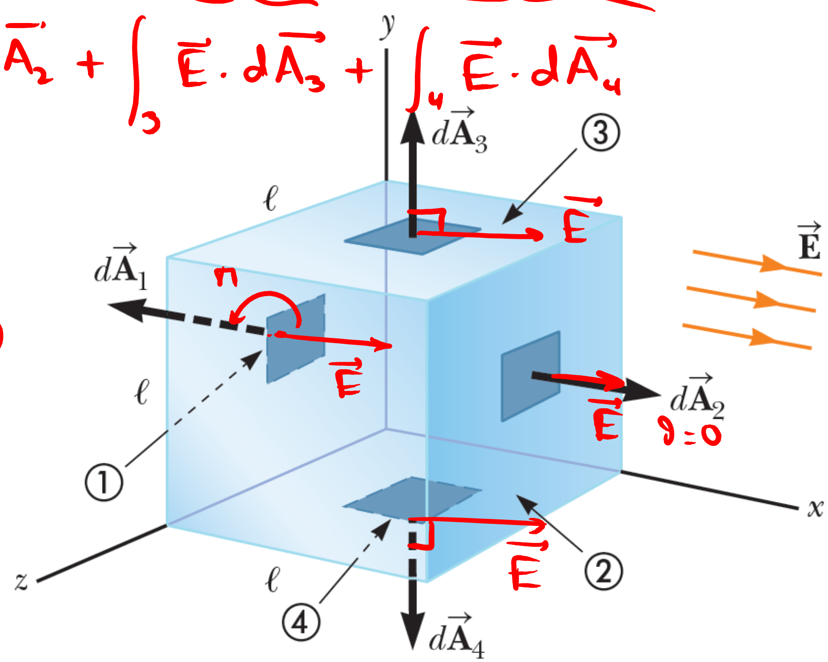
$$= \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2$$

$$= \int_1 E\,dA_1 \cos(\pi) + \int_2 E\,dA_2 \cos 0$$

$$= -E\int_1 dA_1 + E\int_2 dA_2$$

$$= -E\cdot \ell^2 + E\ell^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = 0$$



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και ενός φορτίου που περικλείεται σε αυτήν;
    - Η απάντηση είναι ΝΑΙ, και αυτή η σχέση ονομάζεται ***νόμος του Gauss***
    - Είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη ηλεκτρικών πεδίων
      - Είναι το ισοδύναμο του νόμου του Coulomb για ηλεκτρικά πεδία σημειακών φορτίων, αλλά εφαρμόζεται σε συνεχείς κατανομές φορτίων πολύ πιο εύκολα απ’ ότι ο νόμος του Coulomb
      - Μπορεί να εφαρμοστεί σε ***κινούμενα*** φορτία κάθε ταχύτητας
    - Αποτελεί ένα περισσότερο θεμελιώδη νόμο για τα ηλεκτρικά πεδία από το νόμο του Coulomb
    - Η κλειστή επιφάνεια λέγεται πολλές φορές και *γκαουσιανή* (Gaussian)

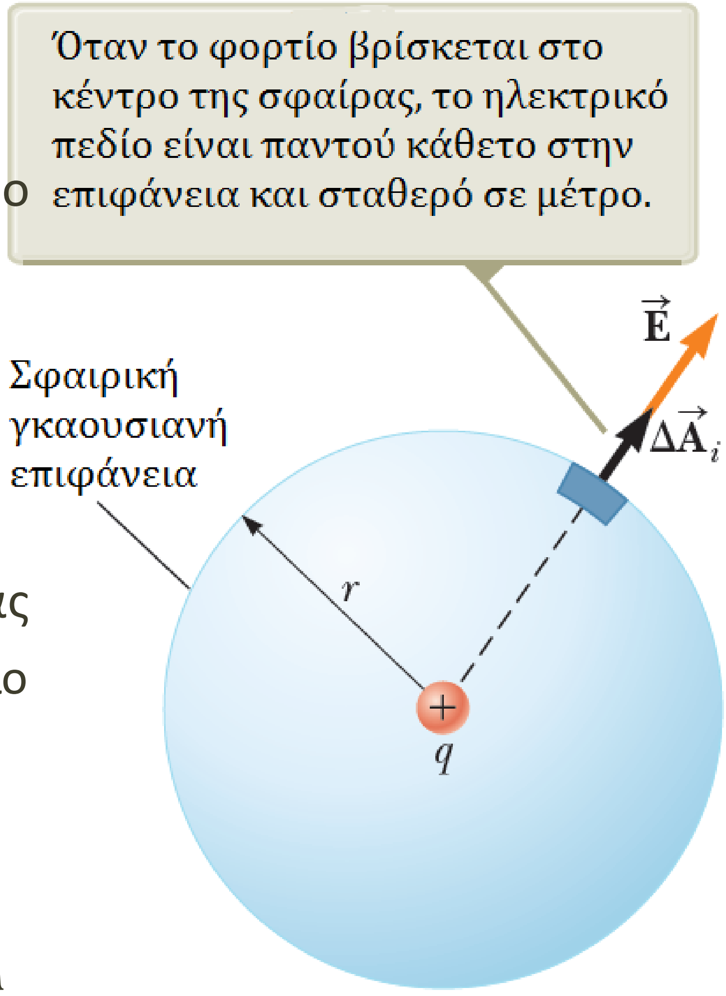
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
  - Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

  - Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας
    - Άρα το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}$
  - Άρα η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
- Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ ισούται με το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας

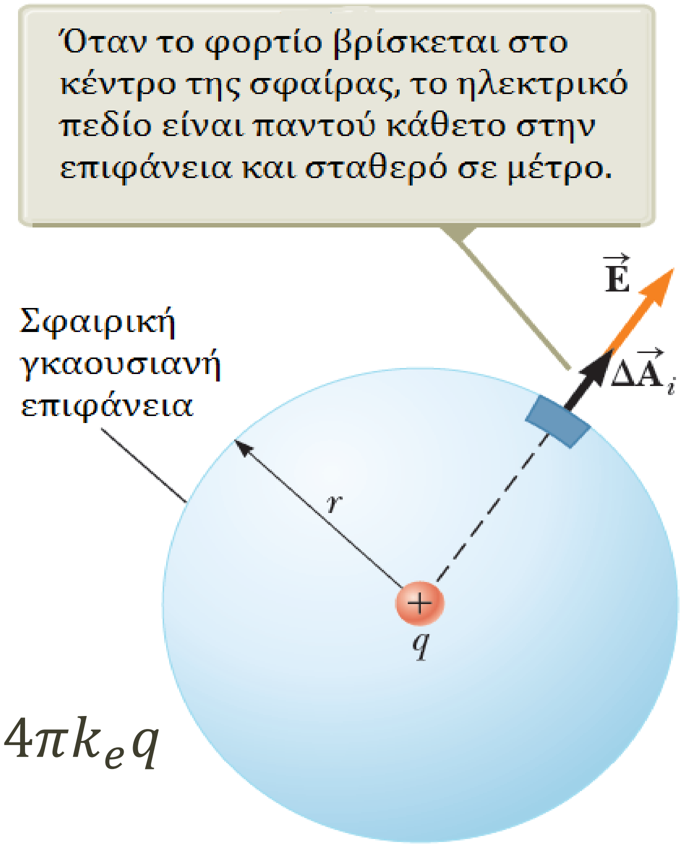
$$\oint dA = 4\pi r^2$$

- Άρα

$$\Phi_E = E\oint dA = k_e \frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

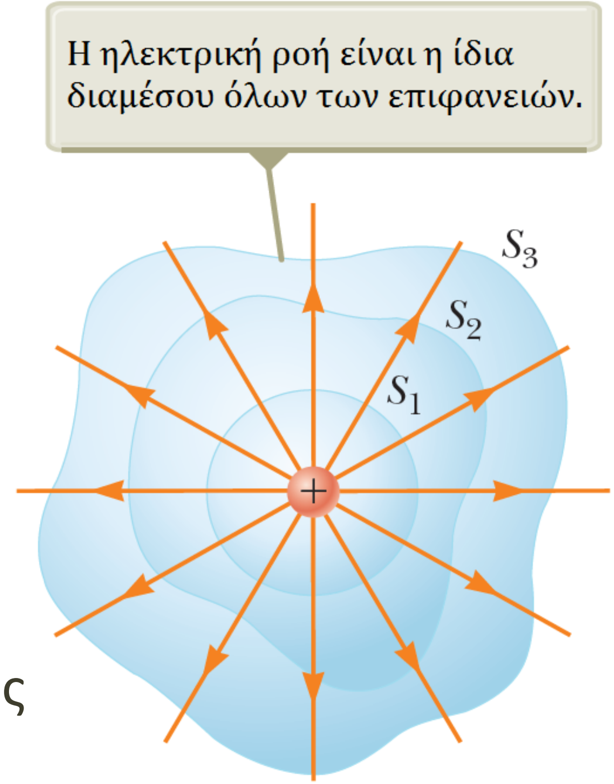
  - Όμως $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$
  - Άρα τελικά

$$\boldsymbol{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$



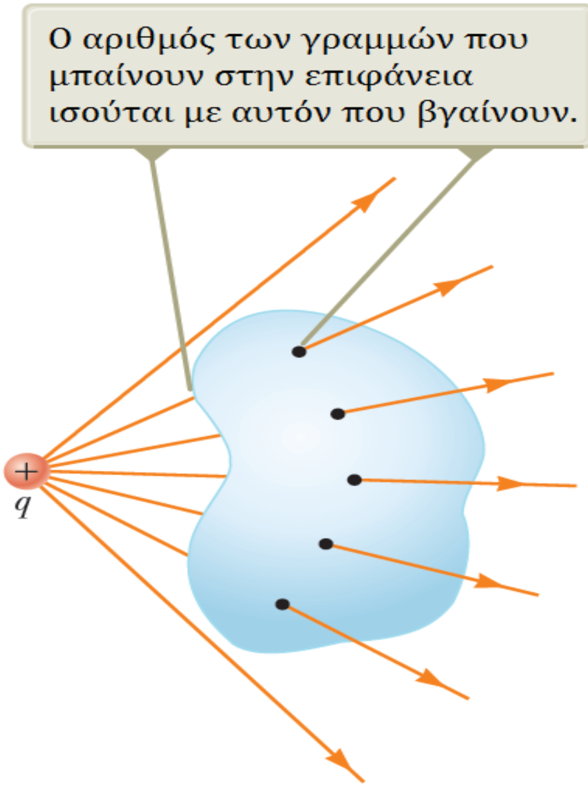
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;
  - Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια
  - Το σχήμα δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες!
  - Η S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$
  - Άρα ***η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\Phi_E = q/\epsilon_0$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.***



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Και τι θα συμβεί το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;
  - Κάθε δυναμική γραμμή που εισέρ-χεται στην επιφάνεια βγαίνει από κάποιο άλλο μέρος της
  - Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν
  - Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας που ***δεν*** περιέχει φορτίο είναι ***μηδέν***!



Ο νόμος του Gauss

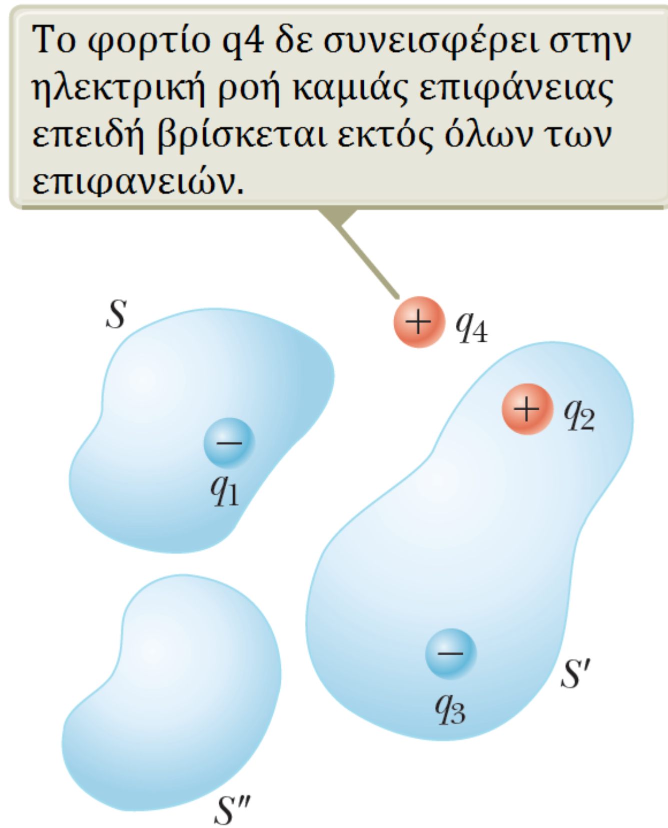
- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ας επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας σε δυο γενικές περιπτώσεις:
  - 1) Πολλά σημειακά φορτία
  - 2) Συνεχής κατανομή φορτίου

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Για πολλά (έστω M) σημειακά φορτία, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \oint \sum_{i=1}^{M} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}$$

  - Παράδειγμα:
    - $\Phi_E = q_1/\epsilon_0$ για την επιφάνεια S
    - $\Phi_E = (q_2+q_3)/\epsilon_0$ για την S'
    - $\Phi_E = 0$ για την S''
    - Το φορτίο q4 δε συνεισφέρει ηλεκτρική ροή σε καμιά επιφάνεια



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

όπου $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και q_{in} το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας

- Προσοχή στο εξής: το $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από συνεισφορές από φορτία **τόσο εντός όσο και εκτός** της επιφάνειας!

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί χρήσιμος για την εκτίμηση του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου είναι ***συμμετρική***
  - Αυτό συμβαίνει με κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα $\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}$ στο ολοκλήρωμα ορίζεται και υπολογίζεται απλά
  - Επιπλέον, πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathrm{E}}$ εκτός ολοκληρώματος
  - Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, ο νόμος του Gauss ισχύει ακόμα, αλλά δε μας είναι χρήσιμος στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου

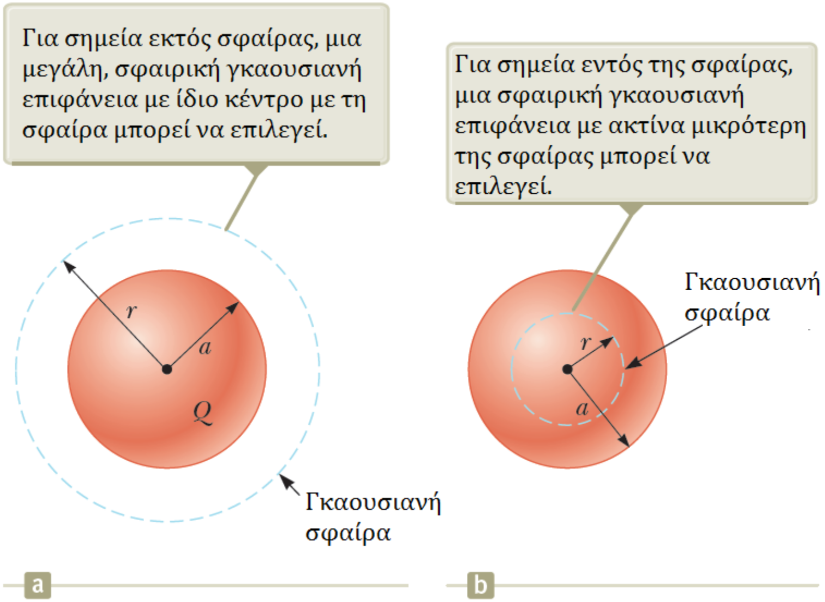
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε μια επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί μια ή περισσότερες από τις παρακάτω συνθήκες:

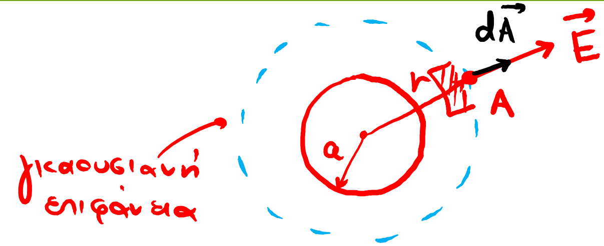
1. **Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω <u>σε όλη</u> την επιφάνεια**
2. **Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο EdA, δηλ. τα $\vec{E}$ και $\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}$ είναι παράλληλα**
3. **Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα**
4. **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας α έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
  A) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εκτός* της σφαίρας
  B) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εντός* της σφαίρας



Ο νόμος του Gauss



- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
    Α) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εκτός* της σφαίρας

Υπάρχει σφαιρική συμμετρία στο πρόβλημα. Επιλέγω σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r. Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1, 2).

Άρα

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

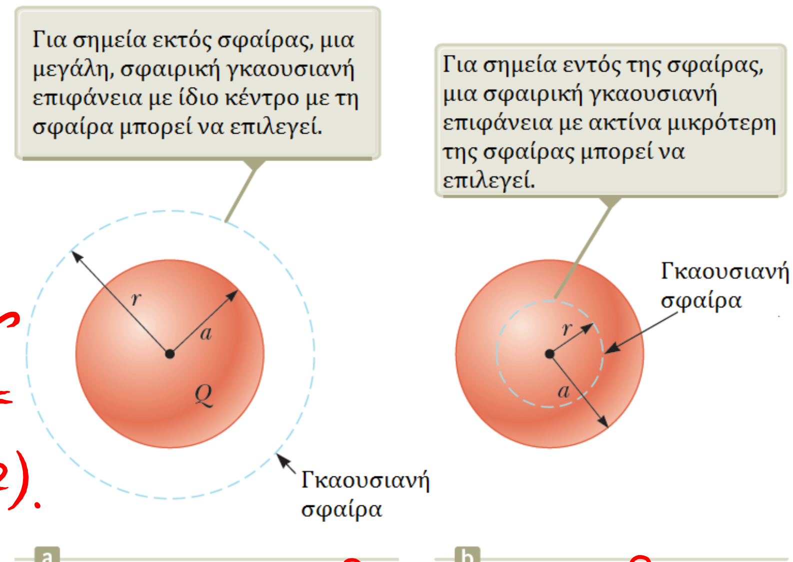
$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow E = \dfrac{q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E = k_e \dfrac{q_{in}}{r^2} \\ q_{in} = Q \end{array}\right\} \Rightarrow E = k_e \frac{Q}{r^2}.$$

Ο νόμος του Gauss

$\rho = \frac{Q}{V}$: χωρική (1)

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
    B) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο *εντός* της σφαίρας

Από (1) $\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V_{σφ.}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ (2)



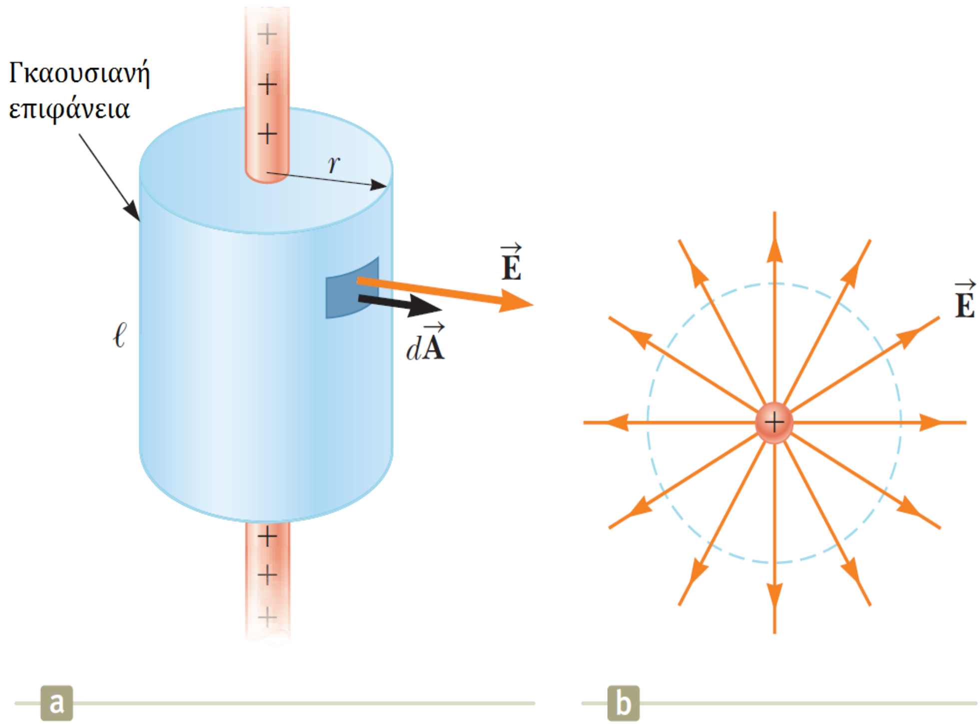
Επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r (r<a). Ο όγκος της σφαίρας ακτίνας r είναι $V_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow q_r = \rho V_r = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$. Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1,2).

Άρα $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \oint dA = \frac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_r}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{q_r}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

Όμως $E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3}$.

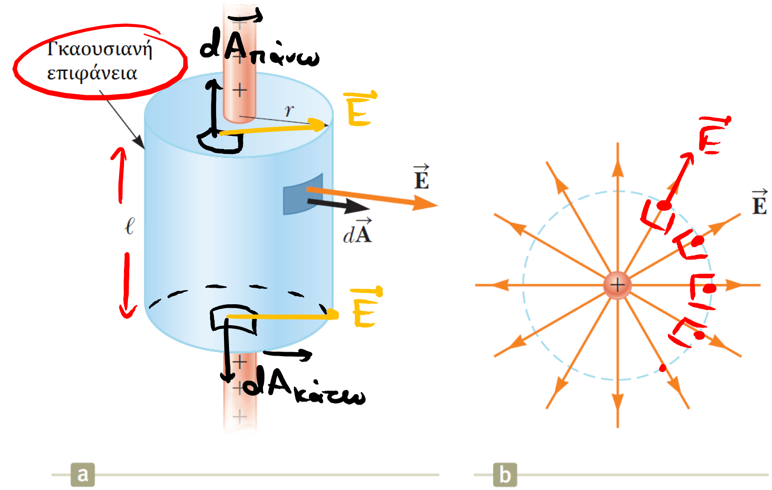
Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκους λ.



Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκος λ.



Επιλέξαμε κυλινδρική επιφάνεια γύρω από τη ράβδο. Μπορεί να δείξει κανείς ότι λόγω του άπειρου μήκους της φορτισμένης ράβδου, το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ είναι σταθερό σε ένα σημείο απόστασης r από αυτήν. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (1).

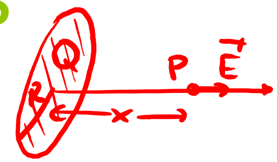
Στο "καπάκι" και στον "πάτο" της επιφάνειας, $\vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = 0$, άρα ικανοποιείται η συνθήκη (3). Στην πλευρά του κυλίνδρου, $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, άρα — " — " — (2). Οπότε:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 2k_e\frac{\lambda}{r}.$$

Ο νόμος του Gauss

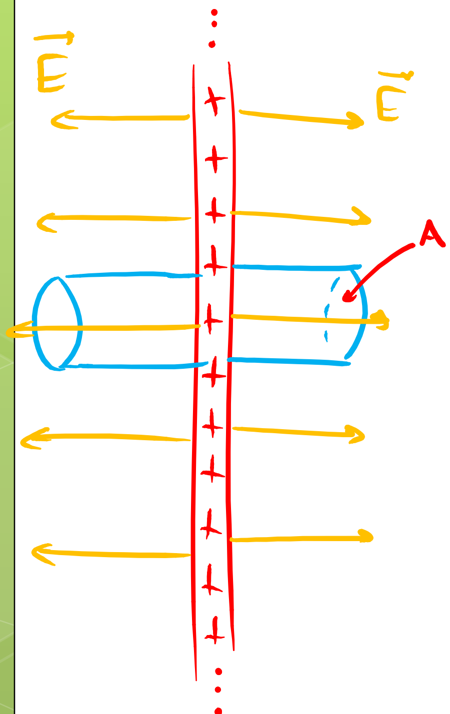
Hint από κυκλικό δίσκο:

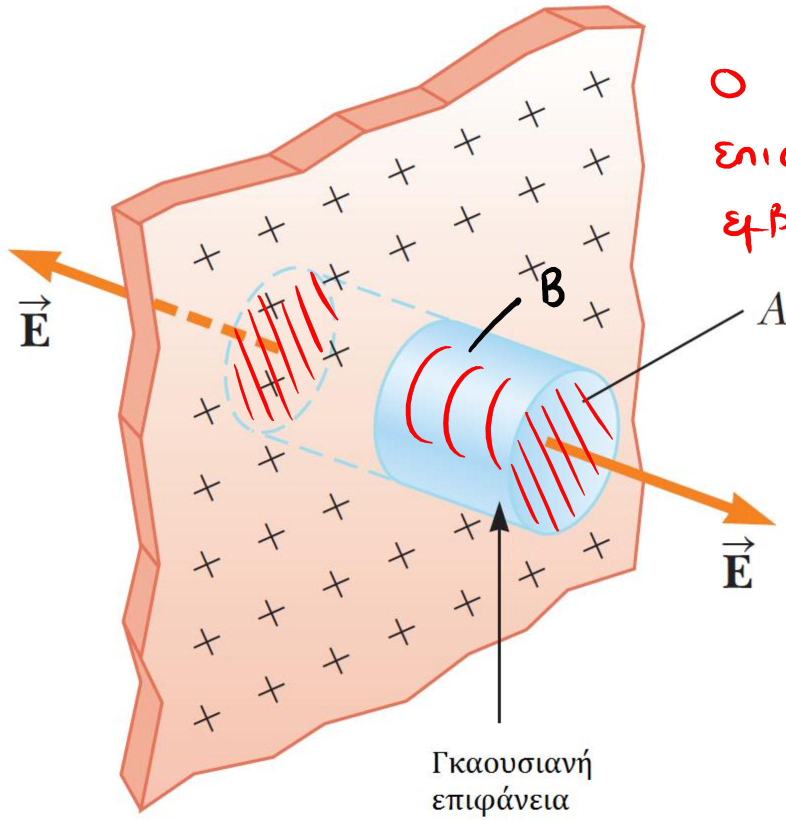


$$E = 2k_e\pi\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} E = 2k_e\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.

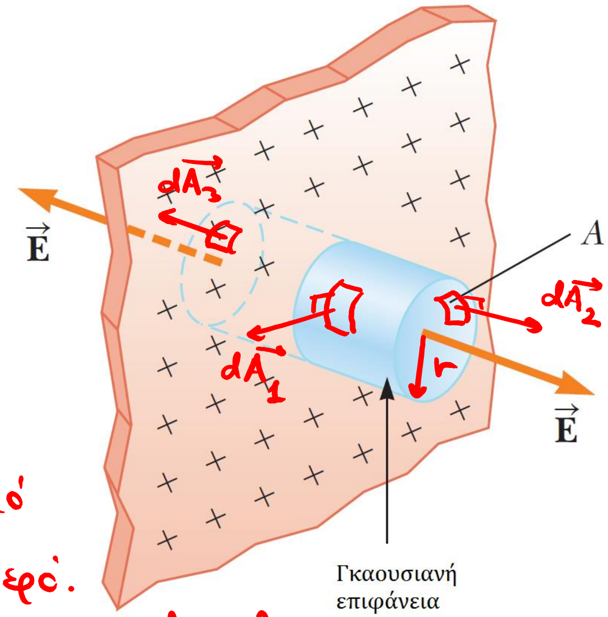




Ο κύλινδρος έχει 3 επιφάνειες: τις 2 με εμβαδό A και τη μια με εμβαδό B (την πλευρική κυλινδρική επιφ.)

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιό-μορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.



Επιλέγω κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r.

Το ηλ. πεδίο σε κάθε σημείο που ισαπέχει από την επιφάνεια με οποιοδήποτε άλλο είναι σταθερό.

Ικανοποιείται η συνθήκη (1). Για τις επιφάνειες dA_1, dA_2, dA_3:

Ισχύει $\vec{E} \perp d\vec{A}_1 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = 0 \Rightarrow$ ικανοποιείται η (3).

Ισχύει $\vec{E} \,//\, d\vec{A}_2 \,//\, d\vec{A}_3 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E \cdot dA_2 \cdot \cos\theta = E \cdot dA_2$

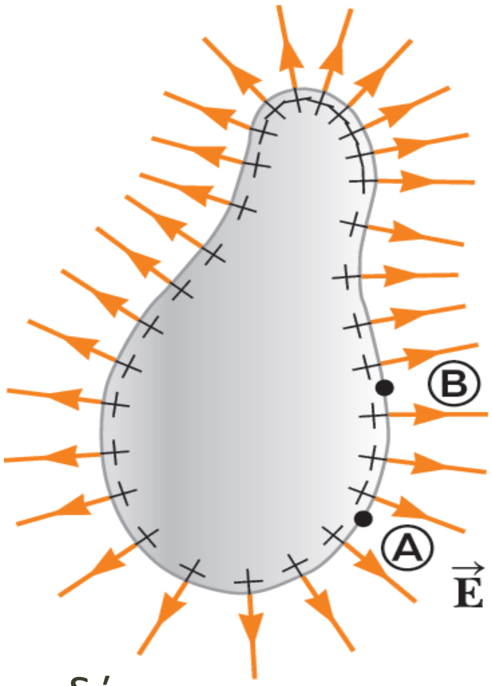
$\vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = E \cdot dA_3 \cdot \cos\varphi = E \cdot dA_3$ | ικανοποιείται η (2)

Άρα $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E \cdot 2A = \dfrac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2EA = \dfrac{\sigma A}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = \dfrac{\sigma A}{2A\epsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$, ανεξάρτητη της θέσης του σημείου!!!

Ο νόμος του Gauss

- **Αγωγοί – Ηλεκτρικό Πεδίο**
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι ένας στέρεος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
    - Το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς **έξω** από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνειά του και έχει μέτρο $\mathrm{E} = \sigma/\epsilon_0$



    - Το ηλεκτρικό πεδίο **εντός** του αγωγού είναι μηδέν
      - ...είτε ο αγωγός είναι συμπαγής είτε «κούφιος»
    - Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνειά του
    - Σε έναν αγωγό ακαθόριστου σχήματος, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη εκεί που η κυρτότητά του είναι μεγαλύτερη

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Εικόνα: Οι διαδικασίες που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας προκαλούν μεγάλες διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα στα σύννεφα και στο έδαφος. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι μια ηλεκτρική εκφόρτιση που τη λέμε «κεραυνό», όπως στην εικόνα.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Εισαγωγή**

  - Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής *δύναμης*
  - Τώρα, θα συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της *ενέργειας*
  - Θα ορίσουμε την έννοια του **ηλεκτρικού δυναμικού**
  - Θα περιγράψουμε φαινόμενα με μεγαλύτερη ευκολία απ’ ότι με χρήση πεδίων και δυνάμεων
  - Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει μεγάλη εφαρμογή στη λειτουργία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συσκευών

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Έστω ένα φορτίο q τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
  - Έστω το φορτίο και το πεδίο ως ένα ***σύστημα***
  - Δύναμη $F_e = qE$ ασκείται στο φορτίο
    - Η δύναμη οφείλεται στο πεδίο
    - Το φορτίο κινείται λόγω της ηλεκτρ. δύναμης
    - Η δύναμη είναι **συντηρητική** και ***εσωτερική*** δύναμη του συστήματος
    - Άρα το έργο της είναι εσωτερικό στο σύστημα
  - Άρα το πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα
    - Όπως ακριβώς η βαρύτητα (βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα Γης-βιβλίου, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Για μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{s}$ ενός σημειακού φορτίου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο
    - Το έργο της ηλεκτρ. δύναμης είναι
$$dW_{int} = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$
    - Θυμηθείτε: το έργο μιας εσωτερικής δύναμης σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας (εδώ: **ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας**)
$$dW_{int} = -dU$$
    - Άρα
$$dU = -dW_{int} = -q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$
    - Για πεπερασμένη μετατόπιση από το σημείο (Α) στο (Β) είναι
$$\Delta \mathrm{U} = -\mathrm{q} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Η qE δεν εξαρτάται από το μονοπάτι (συντηρητική δύναμη)!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Για μια συγκεκριμένη θέση του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια U, σε σχέση με μια θέση όπου έχει δυναμική ενέργεια $U = 0$
  - Διαιρώντας τη U με το φορτίο
$$V = \frac{U}{q}$$
το οποίο ονομάζεται ***ηλεκτρικό δυναμικό*** V
  - Η ***διαφορά δυναμικού*** ορίζεται ως η μεταβολή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (Α) και (Β), δια το φορτίο αυτό:
$$\Delta \mathrm{V} = \frac{\Delta \mathrm{U}}{q} = -\frac{1}{q} q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$
  - Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρά δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου: J/C = Volt (V)

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Δεν εξαρτάται από το φορτίο q, παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο!
- Παρατηρήστε ότι Volt = Nm/C
- Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο *διαφορές* δυναμικού έχουν νόημα
  - Πολλές φορές ορίζουμε εμείς ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου ως μηδενικού δυναμικού

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Προσοχή: η διαφορά δυναμικού δεν είναι το ίδιο με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας
    - Η διαφορά δυναμικού μεταξύ (A) και (B) υπάρχει αποκλειστικά λόγω **μιας πηγής φορτίου** και εξαρτάται από την κατανομή αυτής
    - Για να υπάρχει διαφορά δυναμικής ενέργειας, πρέπει να υπάρχει ένα σύστημα με τουλάχιστον **δυο** φορτία!
      - Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και αλλάζει μόνον αν ένα φορτίο μετακινηθεί σε σχέση με τη θέση ηρεμίας του συστήματος!
  - Σκεφτείτε το όμοια με το ηλεκτρικό πεδίο...
    - Το πεδίο υπάρχει λόγω μιας πηγής φορτίου
    - Η ηλ. δύναμη εγείρεται σε άλλο φορτίο στο χώρο του πεδίου
      - Απαιτούνται δηλαδή τουλάχιστον δυο φορτία!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό**

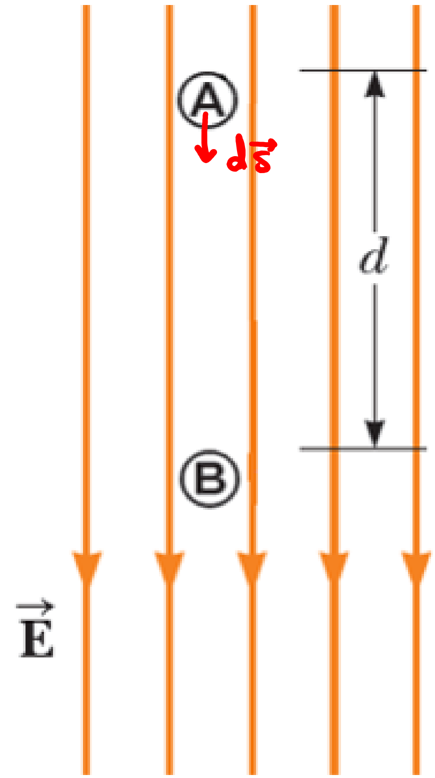
  - Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου κάποια **εξωτερική** δύναμη μετακινεί ένα φορτίο στο πεδίο
    - Από ένα σημείο (Α) σε ένα (Β)
    - Χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια
    - Αλλάζει όμως η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια!

  - Το έργο αυτής της δύναμης θα είναι:

$$W_{ext} = \mathit{\Delta} K + \mathit{\Delta} U = 0 + q\Delta\mathrm{V} = q\mathit{\Delta} V$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα ☺
  - Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
  - Ας υπολογίσουμε τη ΔV ανάμεσα στα σημεία (A), (B), απόστασης d



  - Η μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές

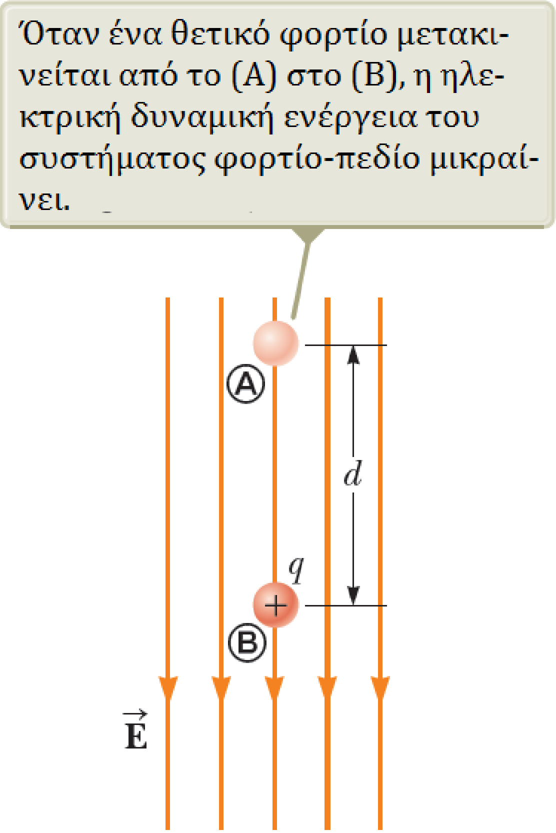
$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B E(ds)\cos 0 = -E\int_A^B ds = -Ed$$

  - Άρα

$$\Delta V = -Ed$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φορτίο +q που κινείται από το (A) στο (B)
  - Τότε $\Delta U = q\Delta V_{A\rightarrow B} = -qEd$
  - Βλέπουμε ότι ΔU < 0
    - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όταν το θετικό φορτίο κατευθύνεται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
    - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (A) ένα φορτίο q > 0, αυτό θα κινηθεί προς τα «κάτω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
      - Άρα επιταχύνεται → αποκτά κινητική ενέργεια
      - Όσο προχωρά προς τα κάτω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου με την αύξηση της κιν. ενέργειας!
        - Σας εκπλήσσει αυτό; ☺ Γιατί συμβαίνει;



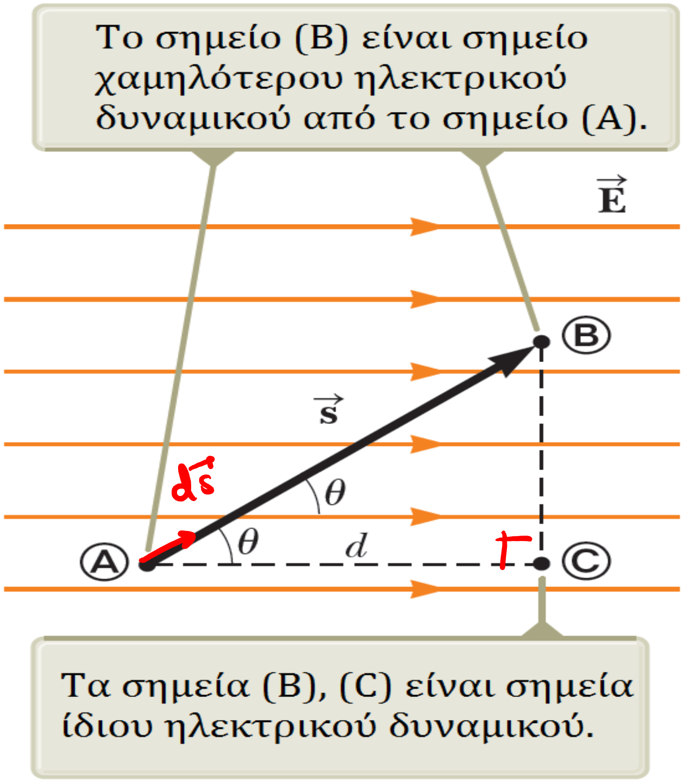
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας θεωρήσουμε – στην ίδια διάταξη – τώρα ένα φορτίο –q που κινείται από το (Β) στο (Α) (δε γίνεται να κινηθεί Α → Β)
  - Τότε $\Delta U = -q\Delta \mathrm{V}_{B\rightarrow A} = -q(Ed) = -qEd$
    - …αφού τώρα μετράμε $\Delta \mathrm{V}_{B\rightarrow A}$ και όχι $\Delta \mathrm{V}_{\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B}}$
  - Βλέπουμε ότι πάλι ΔU < 0!
    - Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει ξανά όταν το αρνητικό φορτίο κατευθύνεται προς αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
    - Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (Β) ένα φορτίο q < 0, αυτό θα κινηθεί προς τα «πάνω» λόγω ηλεκτρ. δύναμης
      - Άρα επιταχύνεται → αποκτά κινητική ενέργεια
      - Όσο προχωρά προς τα πάνω, η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μειώνεται εξίσου.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Ας γενικεύσουμε τώρα
    - Έστω ότι η μετατόπιση $\vec{s}$ από το (A) στο (B) ΔΕΝ είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές
    - Τότε για τη μετατόπιση $\vec{s}$



$$\Delta V_1 = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} = -E\underbrace{s\cos(\theta)}_{d} = -Ed$$

γιατί $\cos\theta = \frac{d}{s}$

Άρα για το σύστημα πεδίο-φορτίο

$$\Delta U = -q\vec{E} \cdot \vec{s} = -qEd$$

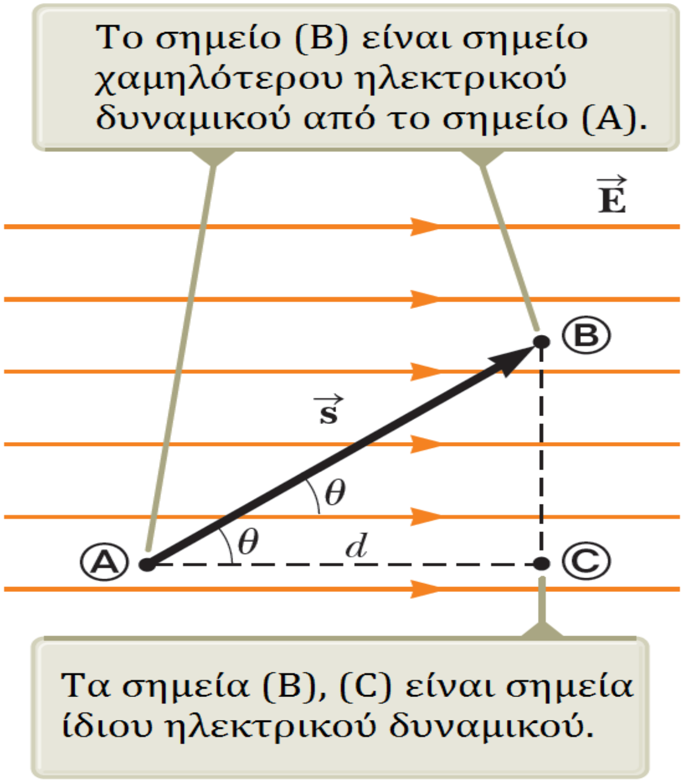
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Άρα για το σύστημα πεδίο-φορτίο

$$\Delta U = -q\vec{E}\cdot\vec{s} = -qEd$$

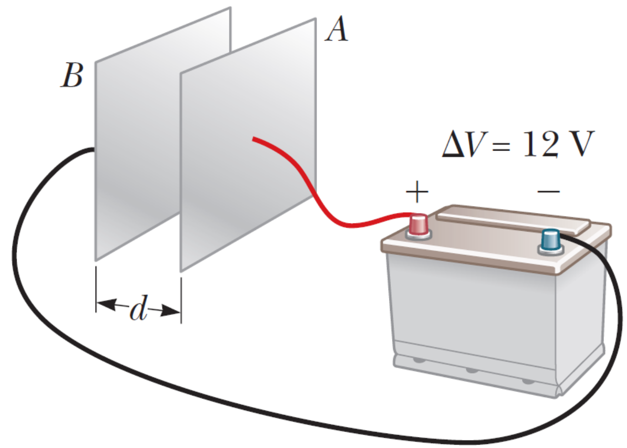
  - Όμως είδαμε πριν ότι

$$\Delta V_2 = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_A^C d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\vec{s} = -Ed$$



- <u>Συμπέρασμα</u>: *όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στο πεδίο έχουν ίδιο δυναμικό (ισοδυναμική επιφάνεια)*

Ηλεκτρικό Δυναμικό

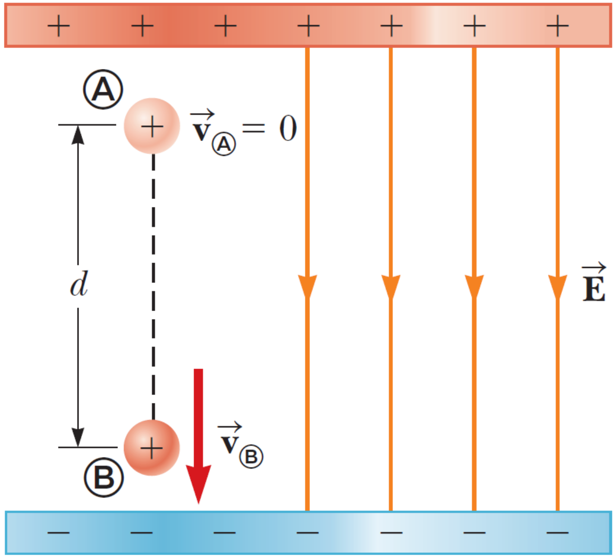


- **Διαφορά Δυναμικού**
  - (μικρό) Παράδειγμα:
    - *Ποιο το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες A, B, που απέχουν d=0.3 cm;*
  - Απάντηση:

$$|\Delta \mathrm{V}| = Ed \Rightarrow E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = 4 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

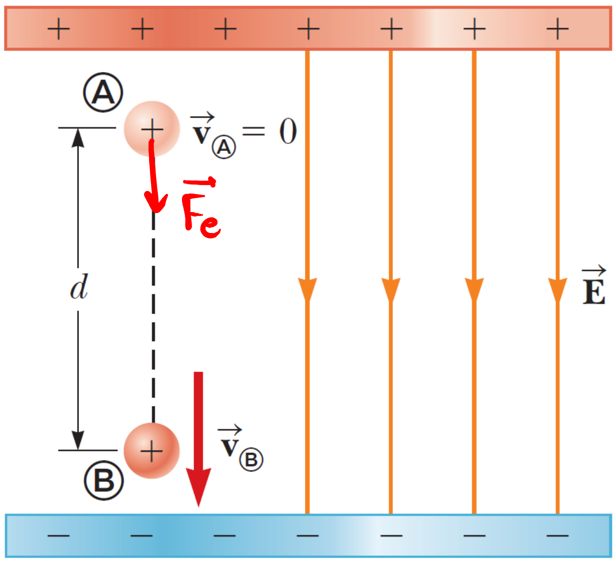
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (Α) σε ομογενές ηλ. πεδίο μέτρου $8 \times 10^4 \frac{V}{m}$. Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου $d = 0.5\ m$ στο σημείο (Β) στην κατεύθυνση του $\vec{E}$. Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου αμέσως μετά τη μετατόπισή του. Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ και $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (A) σε ομογενές ηλ. πεδίο μέτρου $8 \times 10^4 \frac{V}{m}$. Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου $d = 0.5\ m$ στο σημείο (B) στην κατεύθυνση του $\vec{E}$. Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου αμέσως μετά τη μετατόπισή του. Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ και $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$.



Θεωρούμε ως απομονωμένο σύστημα το "πεδίο + φορτίο". Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι συντηρητικές, οπότε ισχύει η ΑΔΜΕ.

ΑΔΜΕ: $E_{ΜΗΧ}^{A} = E_{ΜΗΧ}^{B} \Leftrightarrow \Delta E_{ΜΗΧ}^{A\to B} = 0 \Rightarrow \Delta K^{A\to B} + \Delta U_e^{A\to B} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m_p u_B^2 - \underset{0}{\cancel{\frac{1}{2} m_p u_A^2}} + \Delta U_e^{A\to B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m_p u_B^2 + \Delta U_e^{A\to B} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m_p u_B^2 - qEd = 0 \Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2qEd}{m_p} \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m_p}} = 2.8 \times 10^6 \frac{m}{s}$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Διαφορά Δυναμικού**
  - Θα μελετήσουμε διαφορές δυναμικού σε δυο περιπτώσεις
  - 1. Δυναμικό από σημειακά φορτία
  - 2. Δυναμικό από κατανομή φορτίου

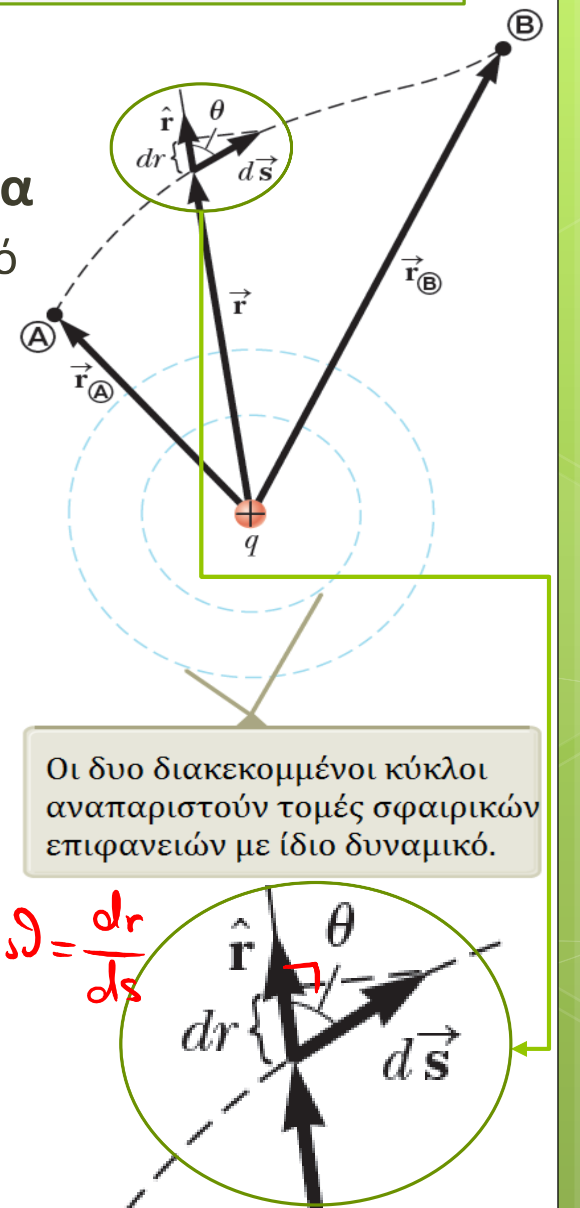
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε ένα σημειακό φορτίο +q
  - Ξέρουμε ότι υπάρχει ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο γύρω του
  - Ας βρούμε το δυναμικό σε απόσταση *r* απ'το φορτίο, ξεκινώντας από το γενικό ορισμό της διαφοράς δυναμικού

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B k_e \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_A^B k_e \frac{q}{r^2}\,|\hat{\mathbf{r}}|\,ds\cos(\theta)$$

$$= -\int_A^B k_e \frac{q}{r^2}\,ds\cos(\theta) = -\int_A^B k_e \frac{q}{r^2}\,dr$$



$\cos\theta = \dfrac{dr}{ds}$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

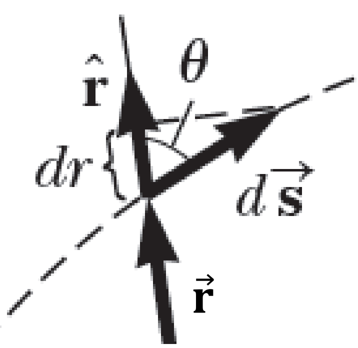
- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Κάθε μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) προκαλεί μια μεταβολή $d\vec{r}$ στο μέτρο του $\vec{\mathbf{r}}$

$$\Delta V = -\int_A^B k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r} \Big]_{r = r_A}^{r = r_B}$$

  - Οπότε

$$\Delta V = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \overbrace{k_e q \frac{1}{r_B}}^{V_B} - \overbrace{k_e q \frac{1}{r_A}}^{V_A}$$

  - Βλέπετε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής
    - Άρα το πεδίο είναι ***συντηρητικό***
  - Επίσης, εξαρτάται μόνο από τα r_i



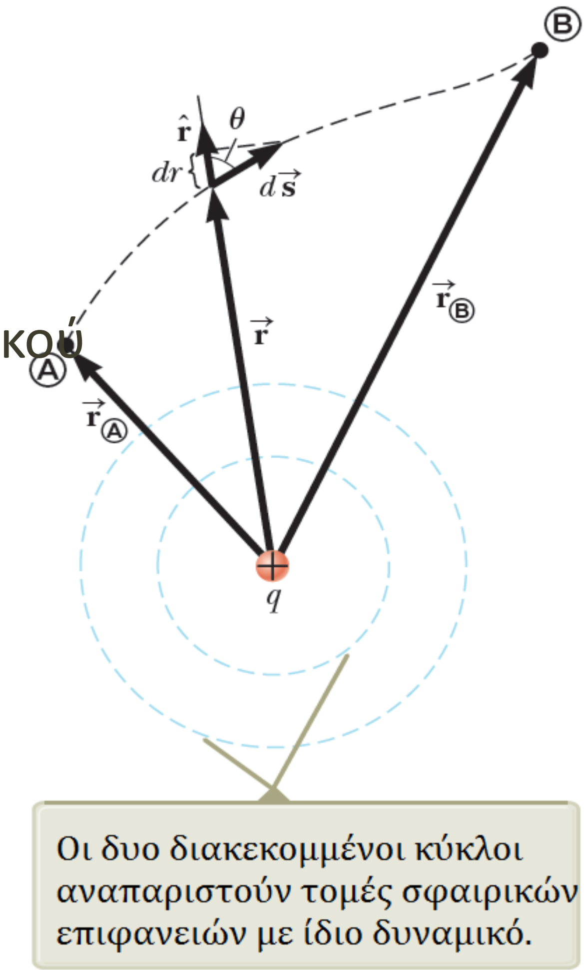
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Συνήθως θεωρούμε ότι $V = 0$ σε ένα σημείο (Α) όπου $r_A = \infty$
  - Το ηλεκτρικό δυναμικό V λόγω σημειακού φορτίου σε απόσταση r από το φορτίο είναι

$$V - V_A = V - 0 = k_e \frac{q}{r}$$

  - Για πολλά φορτία,

$$V = \sum V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο φορτίου q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω **εξωτερικής** δύναμης έργου $W = q_2 \Delta \mathrm{V}$
    - Το φορτίο q_2 έρχεται από πολύ «μακριά»: $V_{\mu\alpha\kappa\rho\iota\alpha} = 0$
    - Επίσης, όταν το q_2 βρίσκεται «μακριά», η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων θεωρείται μηδενική
    - Το έργο W μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια U του συστήματος των φορτίων
    - Όμως $W = \Delta \mathrm{U}$, άρα η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους φορτίων είναι

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{W} = q_2 \Delta \mathrm{V} = q_2 (V - V_{\mu\alpha\kappa\rho\iota\alpha})$$

$$U - 0 = q_2 \left(k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0 \right)$$

$$\boxed{U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Δυναμικό από σημειακά φορτία**
  - Για ένα φορτίο q_2 που έρχεται στο πεδίο φορτίου q_1 σε απόσταση r_{12} μέσω εξωτερικής δύναμης

$$\boxed{U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

  - Αν $U > 0$, το έργο της δύναμης είναι θετικό
    - Τα φορτία απωθούνται, άρα πρέπει να παραχθεί έργο από την εξωτερική δύναμη για να τα φέρει σε απόσταση r_{12}
  - Αν $U < 0$, το έργο της δύναμης είναι αρνητικό
    - Χρειάζεται δύναμη αντίθετη στην μετατόπιση (έλξη) των φορτίων

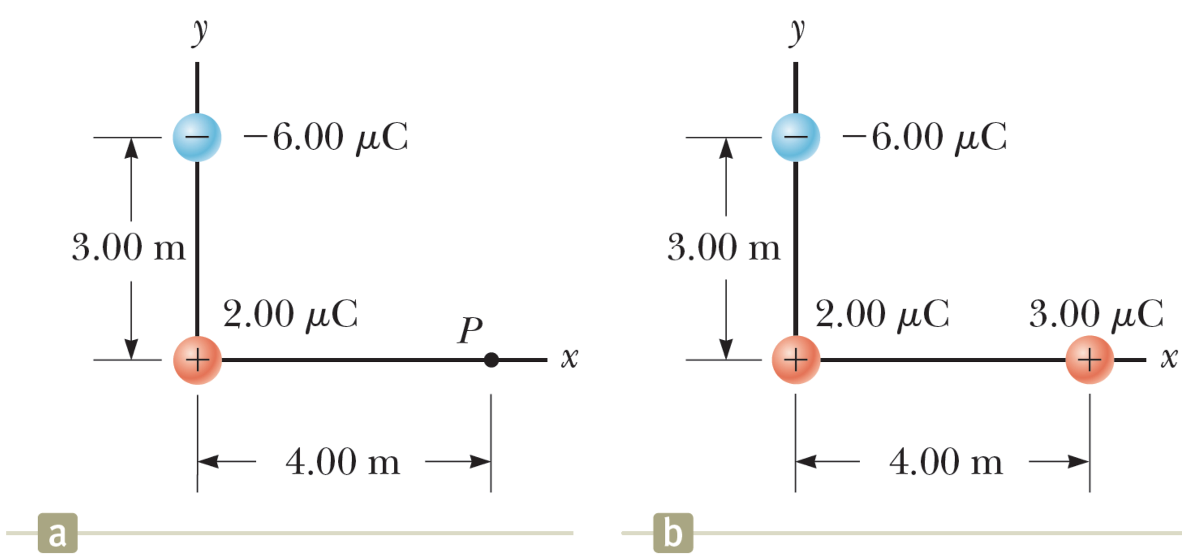
  - Για πολλά φορτία,

$$\boxed{U = k_e \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \,, i < j}$$

    - Αθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων

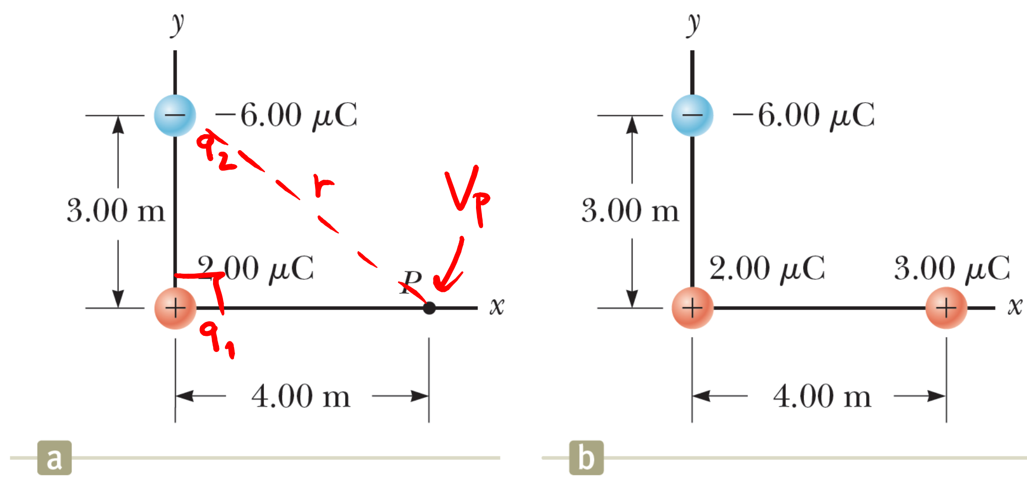
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)\ m$.
    Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0)\ m$.
    Β) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3\ \mu C$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)\ m$.
    Α) Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες $(4, 0)\ m$.



Είναι :

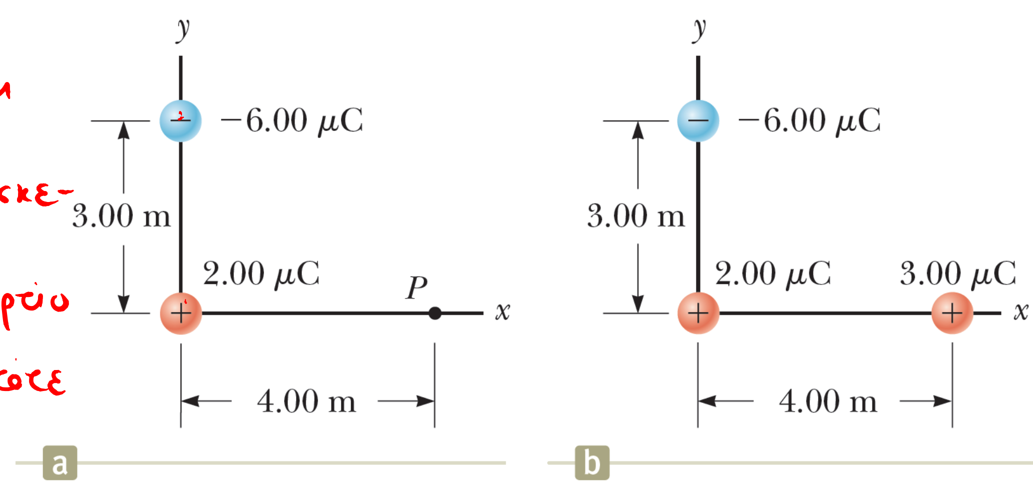
$$V_P = V_{q_1} + V_{q_2} = k_e \frac{q_1}{4} + k_e \frac{q_2}{r}$$

Όμως $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ m$

Άρα $V_P = k_e \frac{2\cdot 10^{-6}}{4} + k_e \frac{-6\cdot 10^{-6}}{5} = k_e \cdot 10^{-6}\left(\frac{2}{4} - \frac{6}{5}\right) = -6.29\cdot 10^{3}\ V$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα φορτίο $q_1 = 2\ \mu C$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6\ \mu C$ στη θέση $(0, 3)\ m$.
    Β) Βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3\ \mu C$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P.



Για το σύστημα, θεωρούμε ότι $U_{ΑΡΧΙΚΗ} = 0$, όταν το q_3 βρίσκεται στο άπειρο. Όταν το φορτίο q_3 έρχεται στο σημείο P, τότε

$U_{ΤΕΛΙΚΗ} = q_3 \cdot V_P$. Άρα

$\Delta U = U_{ΤΕΛ} - U_{ΑΡΧ} = U_{ΤΕΛ} = q_3 V_P = -1.9 \cdot 10^{-2}\ J$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ από το δυναμικό ΔV;
  - Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ δυο σημείων απόστασης $\mathrm{d}\vec{s}$, τότε

$$\mathrm{dV} = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  - Αν το ηλεκτρ. πεδίο έχει μόνο μια συνιστώσα (έστω x), τότε

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E_x \mathrm{d}x$$

και άρα

$$E_x = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}}$$

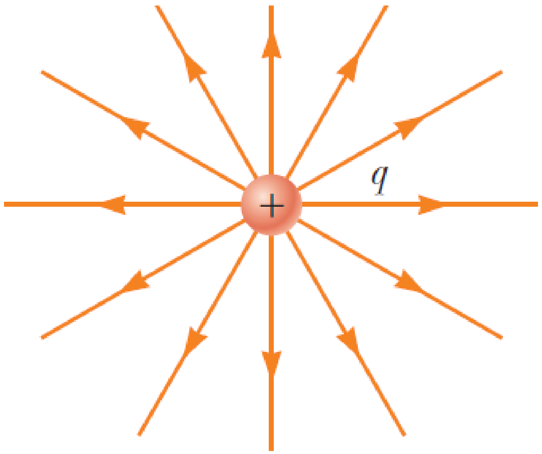
Τι σας θυμίζει??

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό**
  - Αν όμως η κατανομή φορτίου που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο έχει σφαιρική συμμετρία, τότε η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται από την ακτινική απόσταση r
  - Τότε, όμοια με πριν

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

  - Παράδειγμα, ένα σημειακό φορτίο:



$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\frac{k_e q}{r} = -k_e q \frac{d}{dr}\frac{1}{r} = k_e \frac{q}{r^2}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Συνεχής κατανομή φορτίου**
  - Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
  - Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:
    - **1. Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή: θεωρούμε το δυναμικό dV σε σημείο P απόστασης r λόγω σημειακού φορτίου dq, το οποίο είναι**

      $$\mathrm{d}V = k_e \frac{dq}{r}$$

      και ολοκληρώνουμε, παίρνοντας

      $$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r}$$

      Σημείο μηδενικού δυναμικού θεωρείται ένα σημείο απείρως μακριά από το φορτίο.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

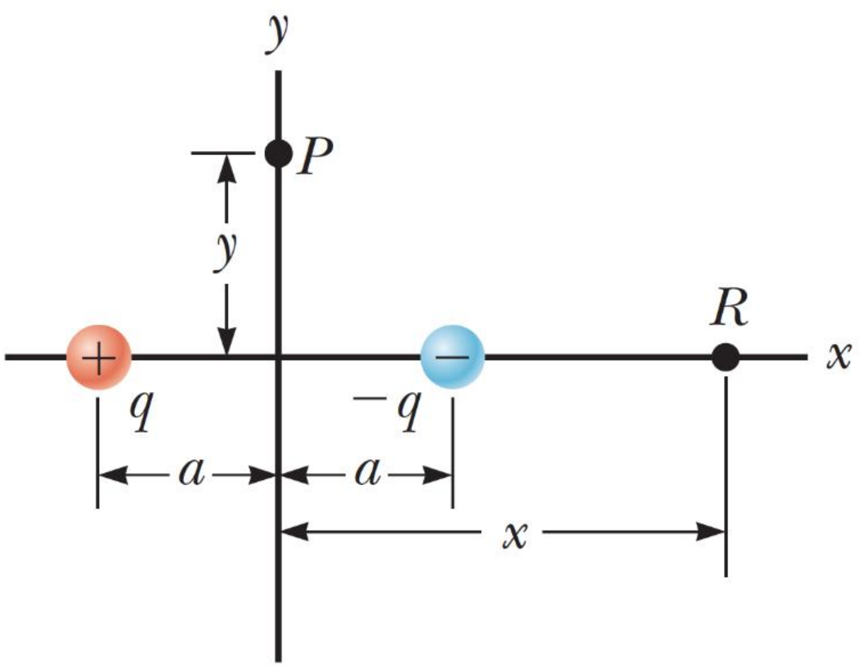
- **Συνεχής κατανομή φορτίου**
  - Ας γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας σε μια συνεχή κατανομή φορτίου
  - Υπάρχουν δυο τρόποι υπολογισμού δυναμικού σε συνεχή κατανομή φορτίου:
    - **2. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό από κάποια άλλη μέθοδο (π.χ. νόμος Gauss): αν η κατανομή φορτίου είναι επαρκώς συμμετρική, εκτιμούμε το $\vec{E}$ με το νόμο του Gauss, και αντικαθιστούμε στην**

$$\Delta V = -\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού ΔV. Τέλος, επιλέγουμε βολικό σημείο μηδενικού δυναμικού.

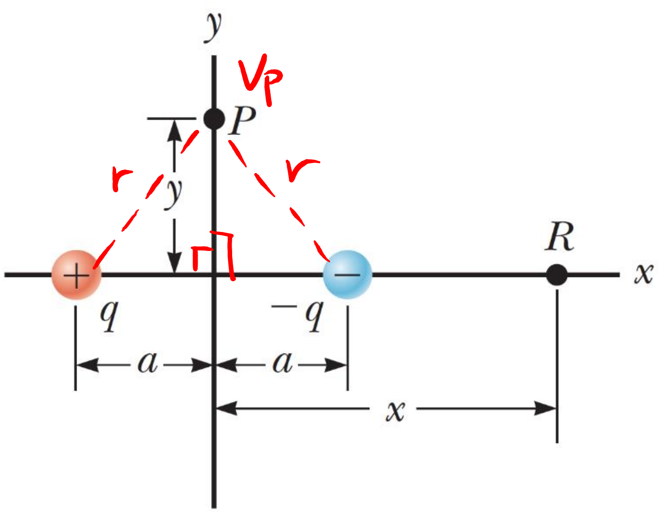
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 1:**
  - Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δυο φορτία ίσου μέτρου και αντίθετου προσήμου που απέχουν απόσταση 2a μεταξύ τους, όπως στο σχήμα. Το δίπολο βρίσκεται στον άξονα x και έχει κέντρο του την αρχή των αξόνων.
    Α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P.
    Β) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο R.
    Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό και το E_x σε ένα σημείο του άξονα μακριά από το δίπολο.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P.



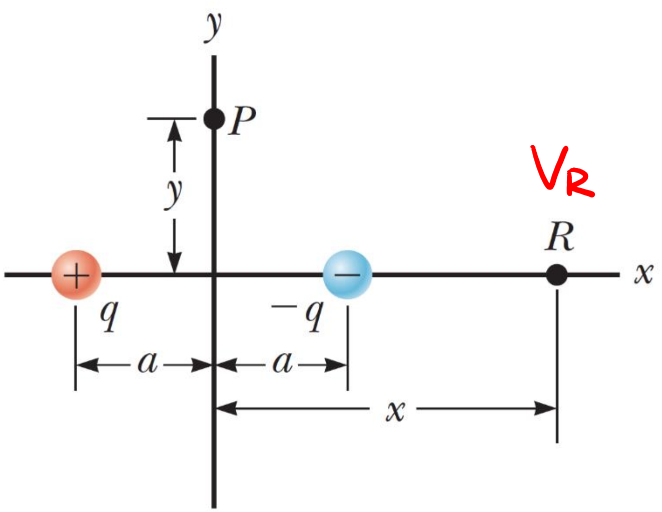
Είναι $r = \sqrt{a^2 + y^2}$, και έχουμε

$$V_P = V_q + V_{(-q)} = k_e \frac{q}{r} + k_e \frac{-q}{r} = 0$$

Άρα $V_P = 0$!

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - B) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο R.



Είναι $V_R = V_{R_q} + V_{R_{(-q)}}$

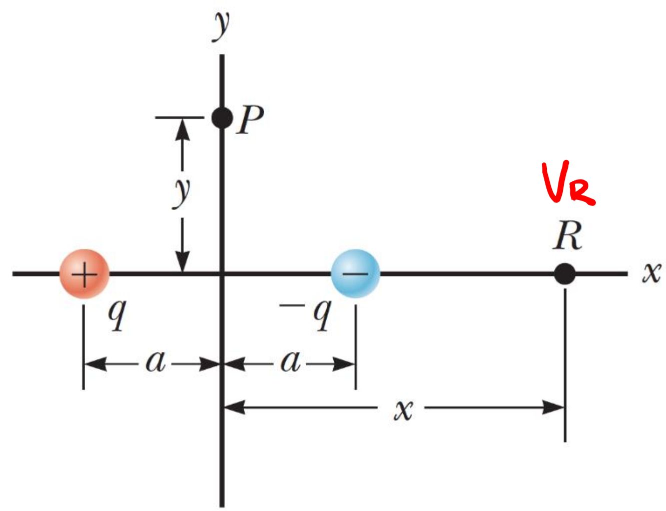
$= k_e \dfrac{q}{a+x} + k_e \dfrac{-q}{x-a}$

$= -2k_e \dfrac{qa}{x^2-a^2}$

Άρα $V_R = -2k_e \dfrac{aq}{x^2-a^2}$.

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό και το E_x σε ένα σημείο του άξονα μακριά από το δίπολο.



Γνωρίζαμε ότι $V_R = -2k_e \dfrac{aq}{x^2-a^2}$

Αν $x >> a$, τότε $x^2 - a^2 \approx x^2$ $\Rightarrow$

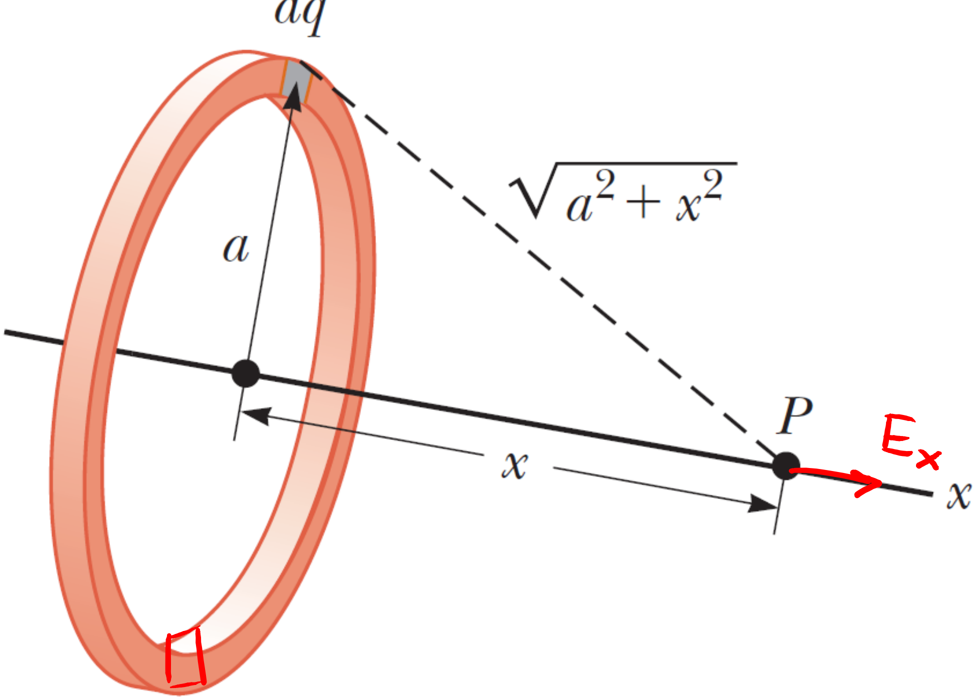
το δυναμικό σε ένα σημείο R' μακριά από το δίπολο είναι

$V_{R'} = -2k_e \dfrac{aq}{x^2}$. Επίσης, $E_x = -\dfrac{d}{dx} V_{R'} = -\dfrac{d}{dx}\left(-2k_e \dfrac{aq}{x^2}\right)$

$= 2k_e aq \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x^2} = -4k_e \dfrac{aq}{x^3}$, όταν $x >>> a$.

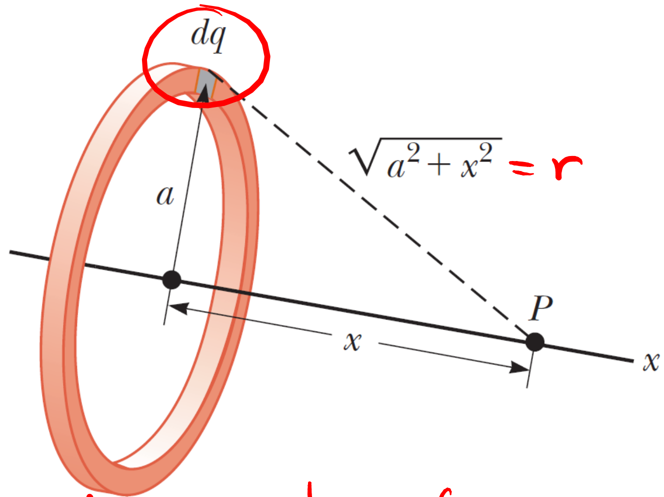
Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 2:**
  - A) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P, όπως στο σχήμα.
    B) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, όπως στο σχήμα.



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 2 – Λύση:**
  - Α) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P, όπως στο σχήμα.



Έστω φορτίο dq όπως στο σχήμα.

Για αυτό το φορτίο, έχουμε

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Για όλο το δακτύλιο, $V_P = \int dV_P = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq$

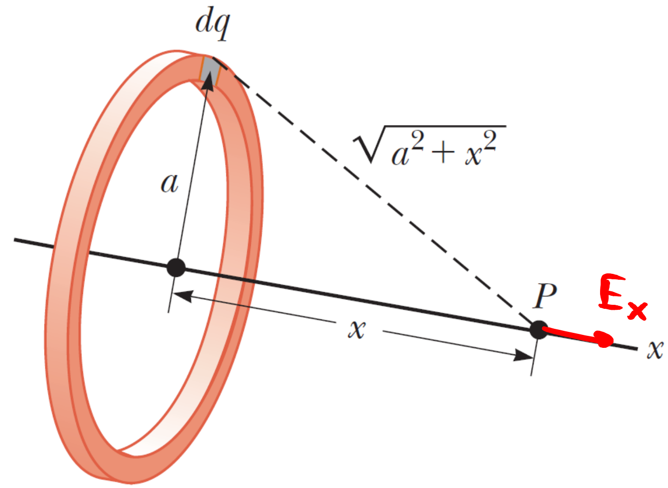
$$= \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)' = f'(x)\left(-\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\right)$$

An. I

- **Παράδειγμα 2 – Λύση:**
  - Β) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, όπως στο σχήμα.



Ξέραμε ότι

$$E_x^P = -\frac{d}{dx}V_P = -\frac{d}{dx}\left(k_e\frac{Q}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

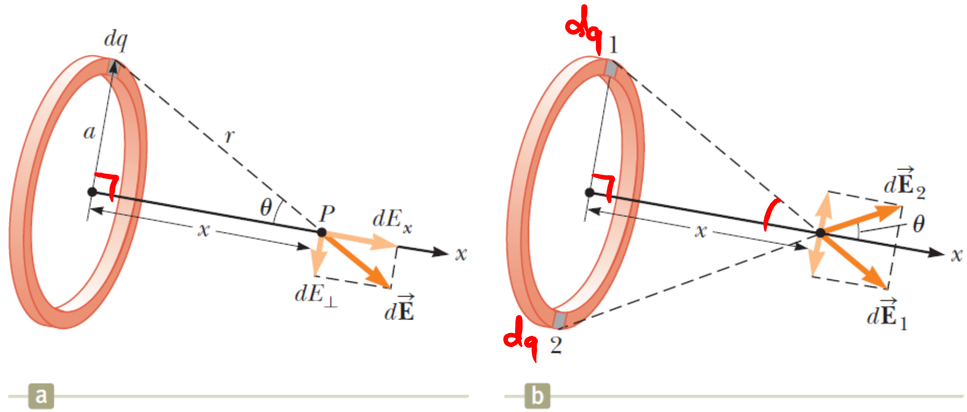
$$= -k_e Q\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$= k_e\frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 2 – Αναλυτική λύση με ηλ. Πεδίο (1/2):**
  - Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες $dE_\perp^1$, $dE_\perp^2$ των σημειακών φορτίων dq_1, dq_2 αλληλοαναιρούνται, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.

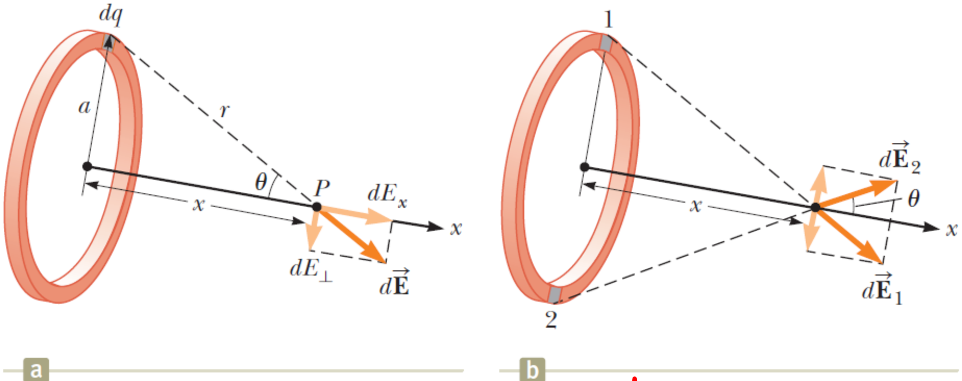
$$dE_x: \quad \left.\begin{array}{l} dE_x = k_e \dfrac{dq}{r^2}\cdot\cos\theta \\ r^2 = a^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} dE_x = k_e \dfrac{dq}{a^2+x^2}\cdot\cos\theta \\ \cos\theta = x/r \\ r = \sqrt{a^2+x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{a^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= k_e \frac{dq\cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1)$$

Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 2 – Αναλυτική λύση με ηλ. Πεδίο (2/2):**
  - Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



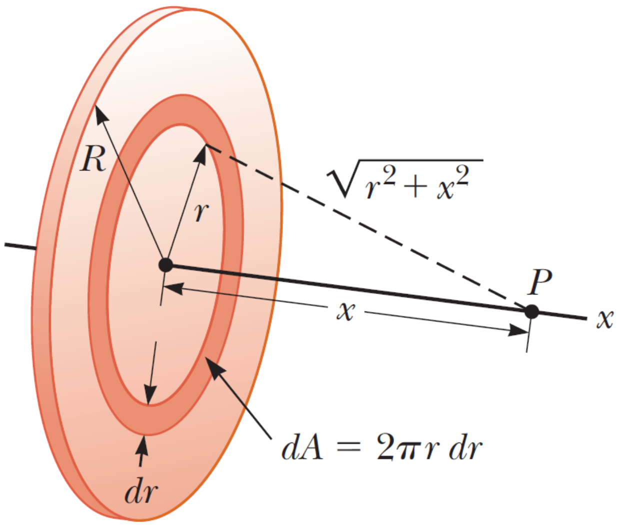
Αθροίζοντας ($\int$) όλες τις συνεισφορές dE_x για κάθε σημειακό φορτίο dq, έχουμε:

$$E_P = E_x^P = \int dE_x^P = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Τα x, k_e, a είναι σταθερές!

Άρα $$E_P = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = k_e \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q = k_e \frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

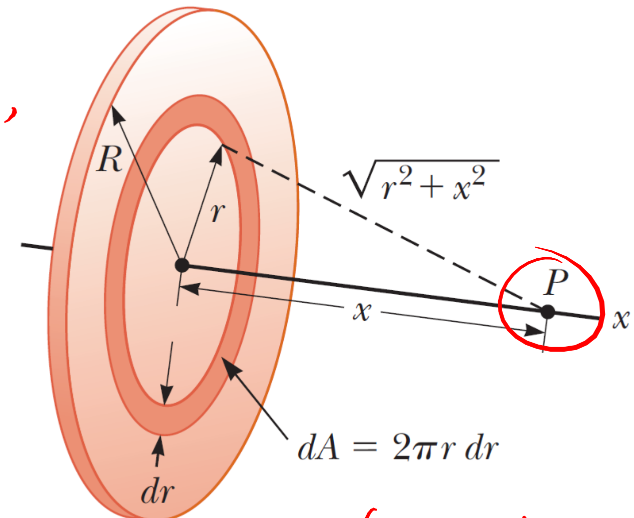
- **Παράδειγμα 3:**
  - Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.
    A) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P όπως στο σχήμα.
    B) Βρείτε τη x-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P.



$$* = \int_0^R k_e \frac{2\pi\sigma r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr = 2\pi k_e \sigma\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right).$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.
    Α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P όπως στο σχήμα.



Γνωρίζαμε ότι για ένα δακτύλιο πάχους dr, το ηλ. δυναμικό στο σημείο P είναι:

$$dV_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2+x^2}} \xrightarrow[a=r]{Q=dq} k_e \frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Είναι $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \Rightarrow dq = \sigma\, dA$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dV_P = k_e \frac{\sigma\, dA}{\sqrt{x^2+r^2}} \Bigg\} = k_e \frac{2\pi\sigma r}{\sqrt{r^2+x^2}}\, dr.$$

Συνολικά, $V_P = \int dV_P = *$

$dA = 2\pi r \cdot dr$

Ηλεκτρικό Δυναμικό

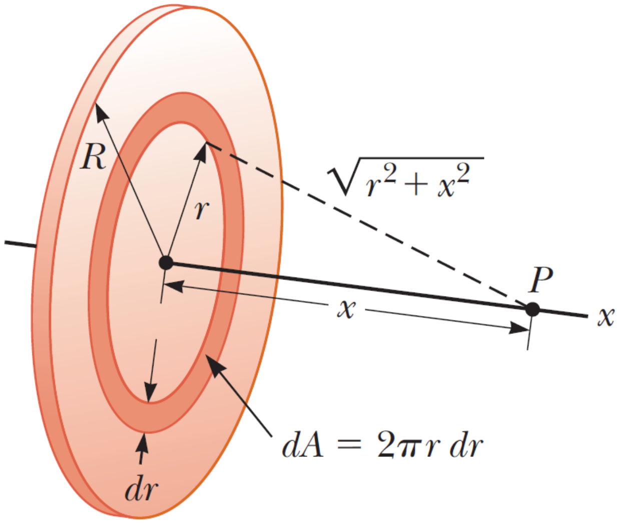
- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος έχει ακτίνα R και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.
    B) Βρείτε τη x-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P.

Ξέραμε ότι $E_x^P = -\frac{d}{dx} V_P =$

$$= -\frac{d}{dx}\left(2\pi k_e \sigma \left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)\right)$$

$= \ldots$

$$= 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right).$$



Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

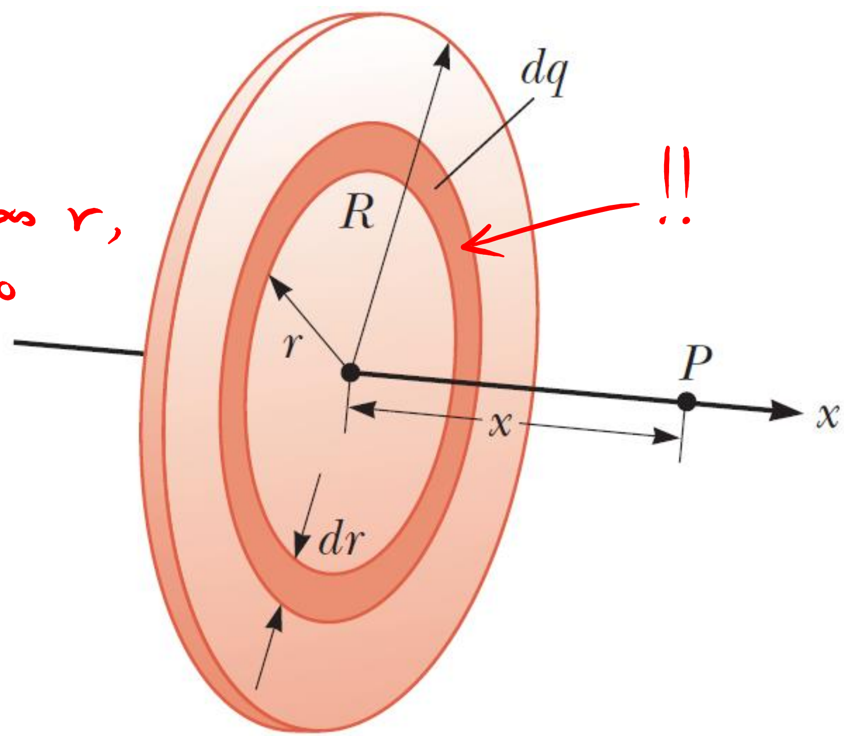
Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{A}}$$ ← εμβαδό

- **Παράδειγμα 3 – Λύση (1/3):**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.

Από προηγ. ερώτημα, γνωρίζαμε ότι ένας δακτύλιος φορτίου dq, ακτίνας r, και πάχους dr συνεισφέρει ηλ. πεδίο στο σημείο P ίσο με:

$$dE_P = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1)$$

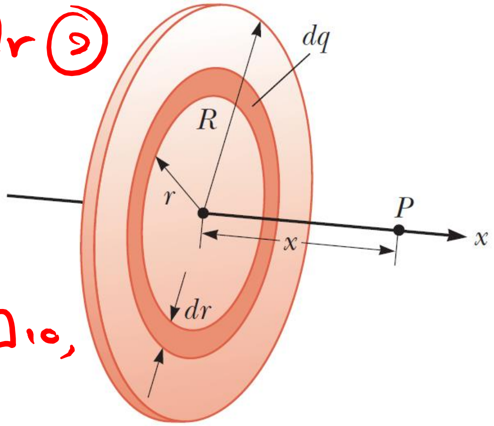


Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA}$$

- **Παράδειγμα 3 – Λύση (2/3):**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.



Έχουμε $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r \cdot dr} \Rightarrow dq = 2\pi r \cdot \sigma \cdot dr$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow} dE_p = k_e \frac{2\pi r \sigma x\, dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Αθροίζοντας, όλες τις συνεισφορές για κάθε δακτύλιο, θα έχω:

$$E_p = \int dE_p = \int k_e \frac{2\pi r \sigma x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \pi \sigma x k_e \int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr \quad (3)$$

Είναι $\int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$. Θέτω $u = r^2+x^2 \Rightarrow du = 2r \cdot dr + 0 = 2r \cdot dr$

Είναι $u_1 = x^2$, $u_2 = R^2+x^2$

Υπενθύμιση: Λύση με Πεδίο

Ηλεκτρικό Δυναμικό

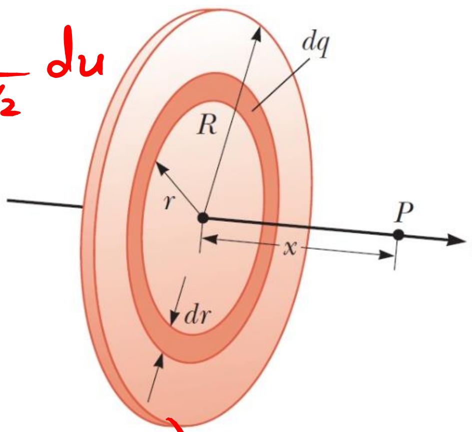
- **Παράδειγμα 3 – Λύση (3/3):**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Άρα $\int_0^R \frac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}} du$

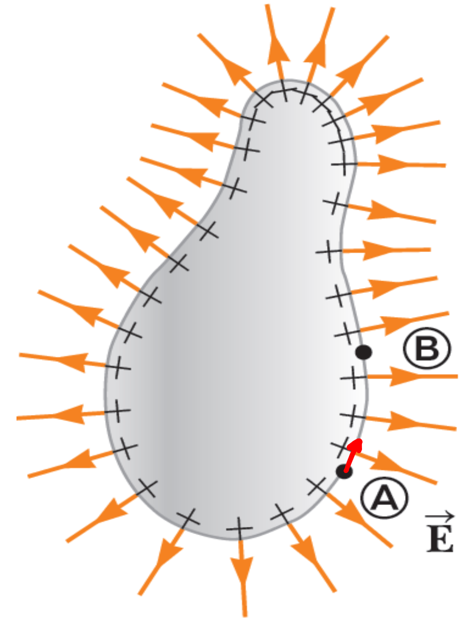
$= \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -2k_e \pi x \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{R^2+x^2} =$

$= 2k_e x \pi \sigma \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right).$



Ηλεκτρικό Δυναμικό

- **Αγωγοί – Δυναμικό**
  - Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες σχετιζόμενες με το δυναμικό
  - Έστω δυο σημεία Α και Β της επιφάνειας
    - Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνειά του από το Α στο Β, το ηλ. πεδίο είναι κάθετο στη μετατόπιση $d\vec{s}$
    - Άρα



$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \ V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

  - ***Συμπέρασμα***: η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια

Εικόνα: Όλες οι παραπάνω συσκευές είναι πυκνωτές, οι οποίοι αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο και ενέργεια. Ο πυκνωτής είναι ένα είδος κυκλώματος που μπορούμε να συνδυάσουμε με άλλα για να φτιάξουμε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Φυσική για Μηχανικούς

Χωρητικότητα

Εικόνα: Όλες οι παραπάνω συσκευές είναι πυκνωτές, οι οποίοι αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο και ενέργεια. Ο πυκνωτής είναι ένα είδος κυκλώματος που μπορούμε να συνδυάσουμε με άλλα για να φτιάξουμε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Φυσική για Μηχανικούς

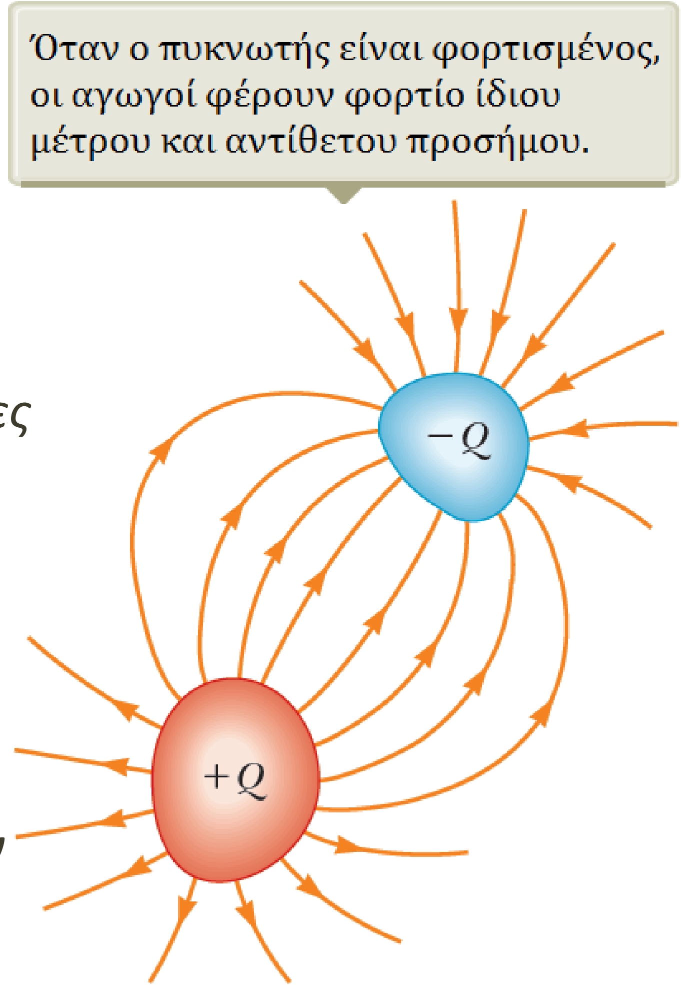
Χωρητικότητα

Χωρητικότητα

- **Εισαγωγή**
  - Σε αυτή τη διάλεξη θα μιλήσουμε για το πρώτο από τα τρία βασικά συστατικά των ηλεκτρικών κυκλωμάτων
  - Τον πυκνωτή!
    - Οι πυκνωτές είναι διατάξεις που αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο
    - Πυκνωτές χρησιμοποιούνται
      - για την επιλογή συχνότητας στο ραδιόφωνό σας
      - ως φίλτρα σε παροχές ρεύματος
      - για αποτροπή σπιθών σε συστήματα ανάφλεξης
      - για αποθήκευση ενέργειας σε «φλασάκια» (flash disks)

Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**
  - Έστω δυο αγωγοί όπως στο σχήμα
  - Αυτή η διάταξη ονομάζεται **πυκνωτής**
    - Οι αγωγοί λέγονται *αγώγιμες πλάκες*
    - Αν οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου και αντίθετου προσήμου, τότε αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους
  - Τι καθορίζει πόσο φορτίο μπορούν να φέρουν;



Χωρητικότητα

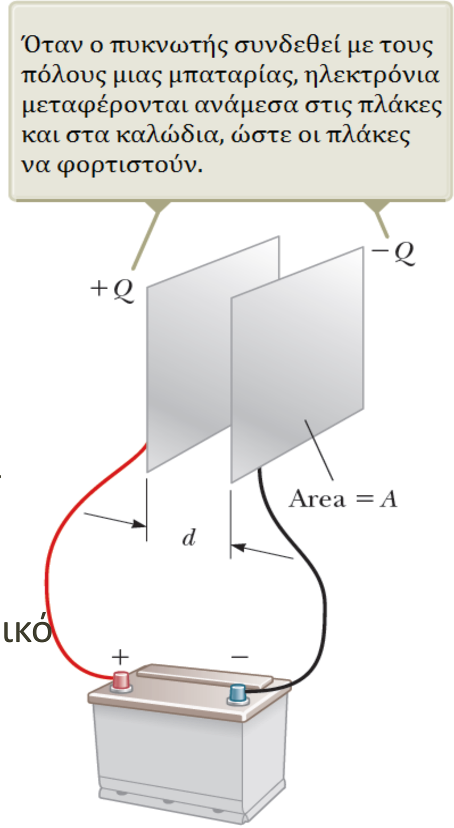
- **Χωρητικότητα**
  - Πειραματικά, έχει δειχθεί ότι η ποσότητα φορτίου Q σε έναν πυκνωτή είναι γραμμικά ανάλογη με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους αγωγούς
    - Δηλ. $Q \propto \Delta V$
  - Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από το σχήμα και την απόσταση των αγωγών
  - Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως $\boldsymbol{Q = C\Delta V}$, αν ορίσουμε τη χωρητικότητα ως:
    - *Η **χωρητικότητα $\boldsymbol{C}$** ενός πυκνωτή ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου του φορτίου σε οποιονδήποτε αγωγό προς το μέτρο της διαφοράς δυναμικού ανάμεσά τους:*

$$\boldsymbol{C \equiv \frac{|Q|}{|\Delta V|}}$$

Μονάδα μέτρησης: 1 C/V = 1 Farad (F)

Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**
  - Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες
  - Αν είναι αρχικά αφόρτιστος, η μπαταρία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στα καλώδια
  - Ας δούμε την «αρνητική» πλάκα
    - Το πεδίο στο καλώδιο εφαρμόζει δύναμη στα ηλεκτρόνια του και αυτά κινούνται προς την πλάκα
    - Η κίνηση συνεχίζεται ως ότου η πλάκα, το καλώδιο, και ο αρνητικός πόλος της μπαταρίας έχουν όλα το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό
    - Όταν αυτό γίνει, η διαφορά δυναμικού παύει να υπάρχει
    - Έτσι, δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται
    - Η πλάκα φέρει πλέον αρνητικό φορτίο
  - Όμοια ισχύουν και για τη «θετική» πλάκα
    - …μόνο που εκεί τα ηλεκτρόνια κινούνται από την πλάκα στο καλώδιο
    - …αφήνοντάς τη φορτισμένη θετικά



Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**

- Ας βρούμε μια έκφραση για τη χωρητικότητα ενός ζεύγους πλακών φορτίου μέτρου Q

- Η διαδικασία είναι εν γένει η εξής:
  - 1. Υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών
  - 2. Βρίσκουμε τη χωρητικότητα με τη σχέση $C = Q/\Delta V$

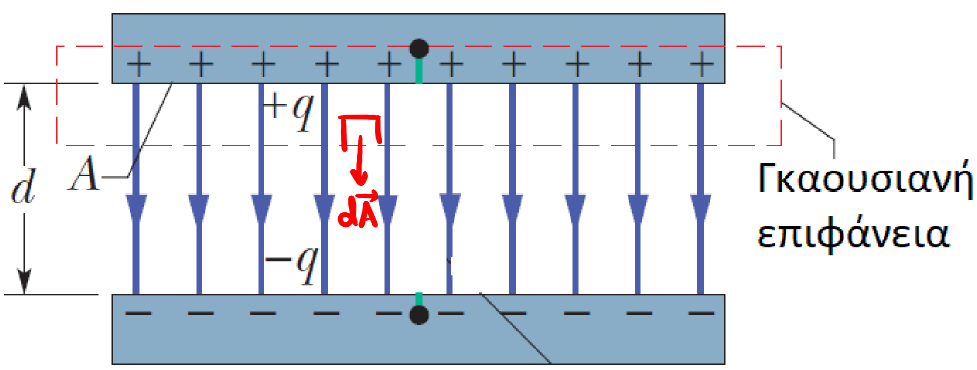
- Ο υπολογισμός είναι απλός αν η γεωμετρία του πυκνωτή είναι απλή

Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**
  - Έστω ότι οι πλάκες έχουν απόσταση *d* και εμβαδόν *A*, η μια πλάκα φέρει φορτίο Q ενώ η άλλη φορτίο –Q
    - Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma = Q/A$
    - Αν οι πλάκες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, μπορούμε να θεωρήσουμε ως **ομογενές** το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ τους
    - Για το φορτίο Q, θεωρούμε γκαουσιανή επιφάνεια στην οποία:
      - Τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους
      - Το πεδίο είναι **σταθερό**
      - Νόμος Gauss:

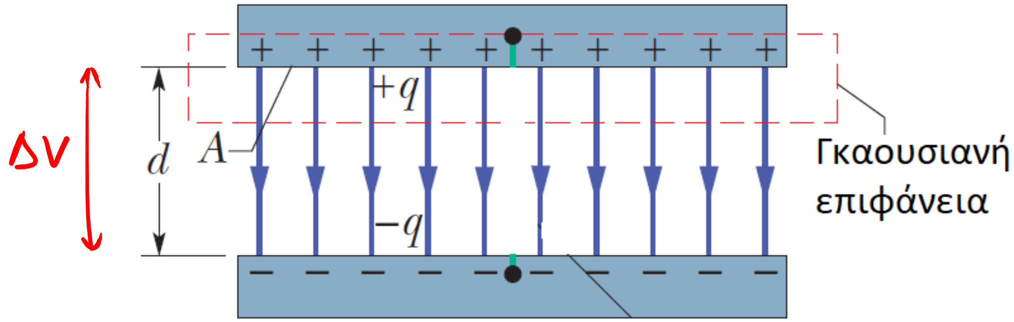
$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = EA\epsilon_0$$



Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**



- Η διαφορά δυναμικού είναι

$$\Delta V = -Ed$$

λόγω ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου

  - Έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη διάλεξη

- Άρα η χωρητικότητα ενός πυκνωτή παράλληλων πλακών δίνεται ως

$$\boxed{C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

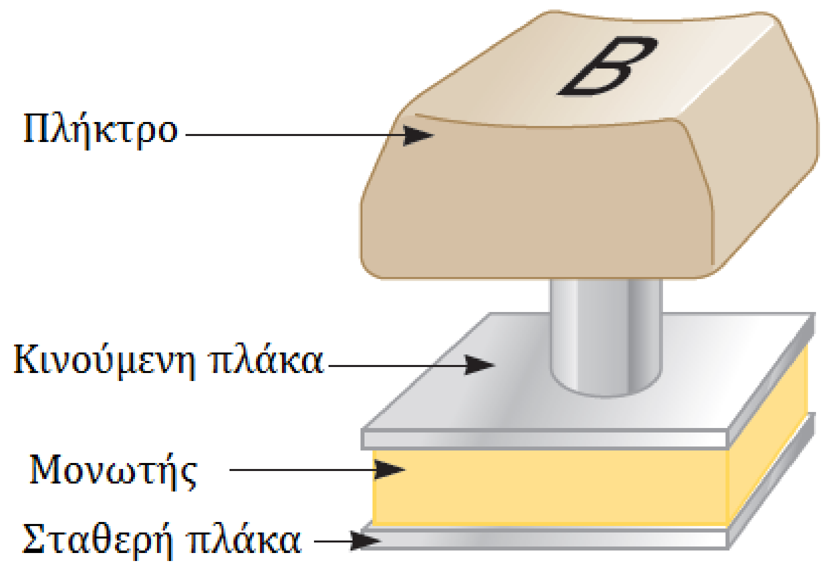
Χωρητικότητα

- **Χωρητικότητα**

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

- Χωρητικότητα
  - Ανάλογη του εμβαδού των πλακών
  - Αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ τους

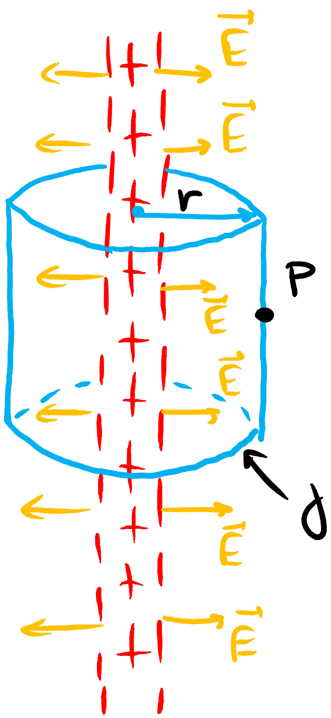
- Παράδειγμα εφαρμογής:



Χωρητικότητα

- **Παράδειγμα:**
  - Ένας στέρεος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a και φορτίου Q είναι ομοαξονικός με κυλινδρικό κέλυφος αμελητέου πάχους, ακτίνας b > a, και φορτίου –Q. Βρείτε τη χωρητικότητά αυτού του κυλινδρικού πυκνωτή αν το μήκος του είναι l.

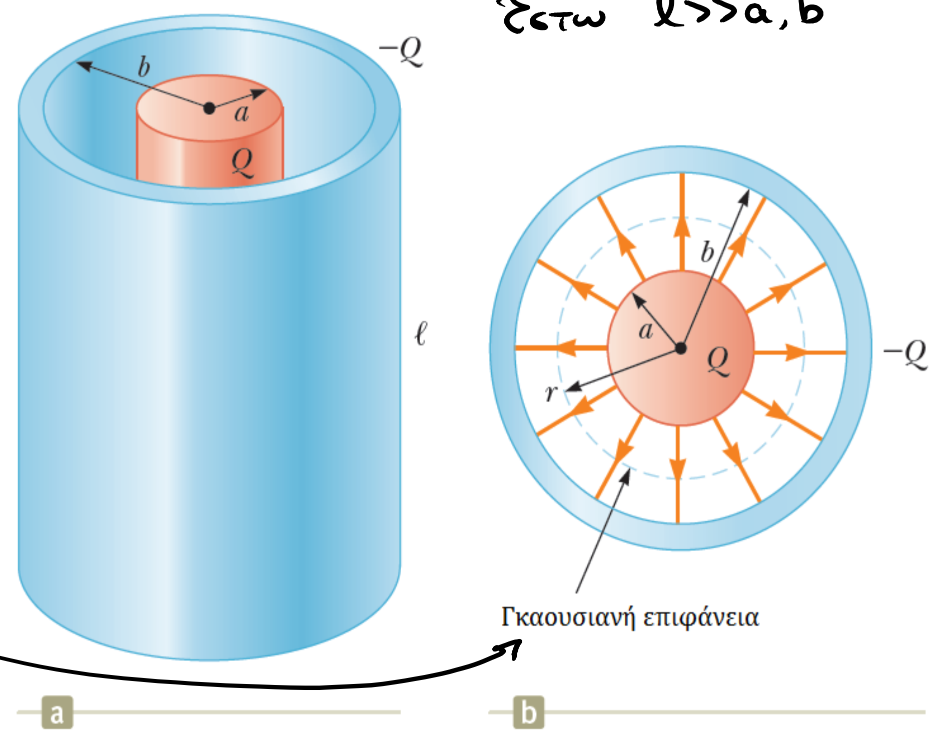
Έστω $l \gg a, b$



$$E_p = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

(από διαλέξεις νόμου Gauss)

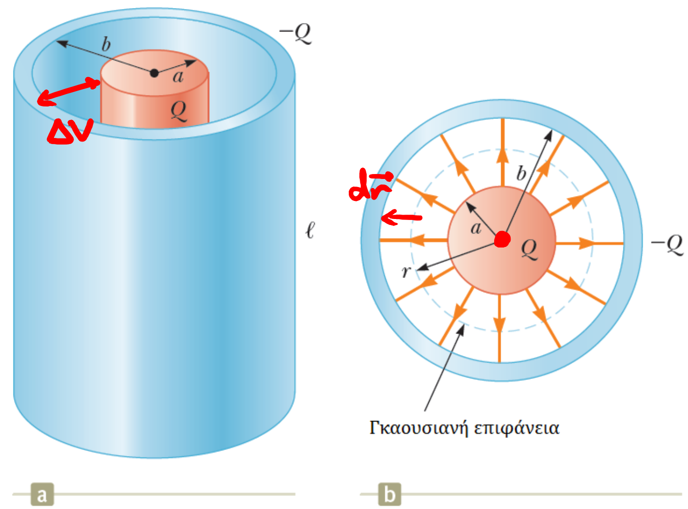
γκαουσιανή επιφάνεια



* Άρα $C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{2k_e\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ell}{2k_e\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$.

Χωρητικότητα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένας στέρεος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a και φορτίου Q είναι ομοαξονικός με κυλινδρικό κέλυφος αμελητέου πάχους, ακτίνας b > a, και φορτίου –Q. Βρείτε τη χωρητικότητά αυτού του κυλινδρικού πυκνωτή αν το μήκος του είναι l.



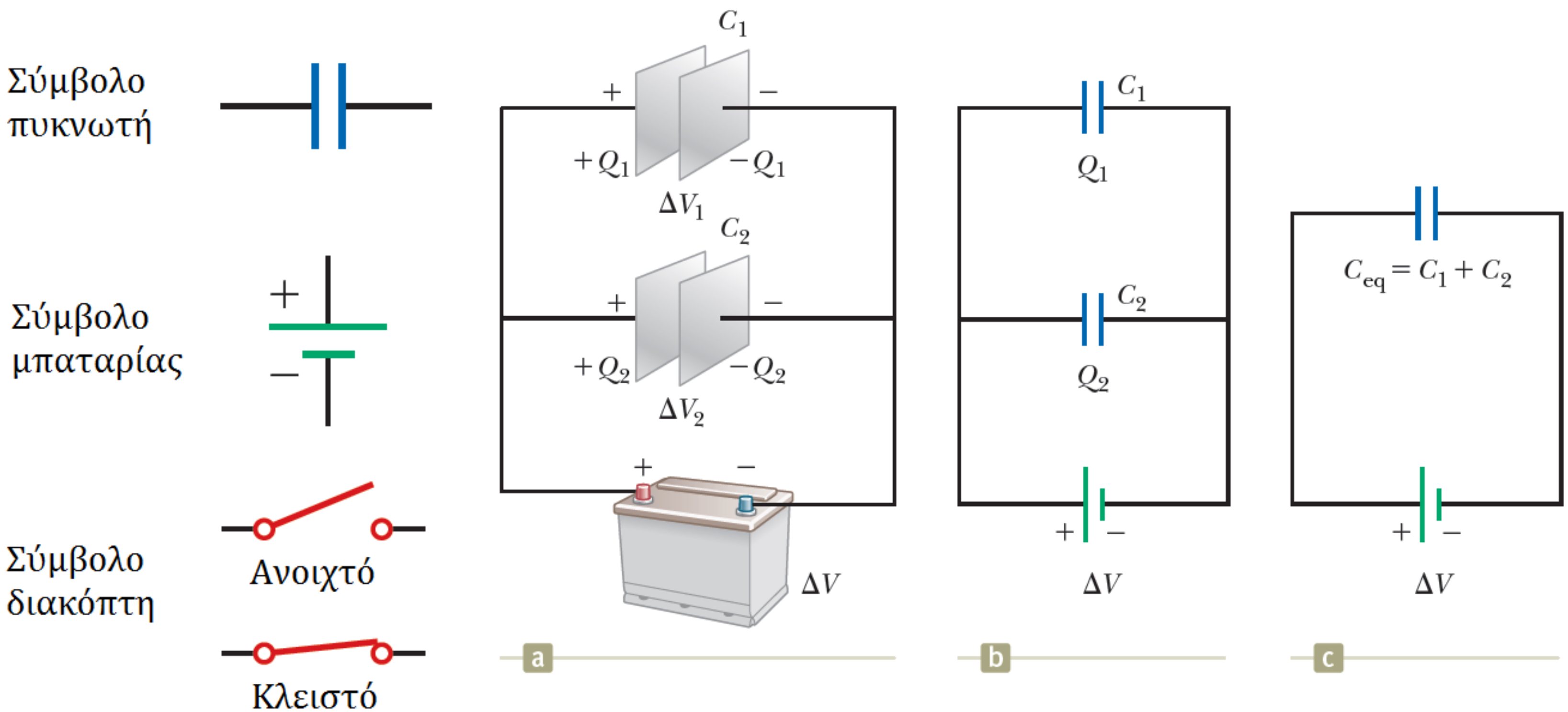
Έχουμε δείξει σε προηγ. διάλεξη ότι το ηλ. πεδίο μιας φορτισμένης ράβδου απείρου μήκους σε απόσταση r είναι: $E_r = \frac{2k_e\lambda}{r}$, επιλέγοντας γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r. Χρειαζόμαστε τη διαφορά δυναμικού $\Delta V = V_b - V_a$. Είναι:

$$\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int \vec{E_r}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{2k_e\lambda}{r}dr = -2k_e\lambda\int_a^b \frac{1}{r}dr$$

$$= -2k_e\lambda\ln(r)\Big]_a^b = -2k_e\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow |\Delta V| = 2k_e\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right) \;*$$

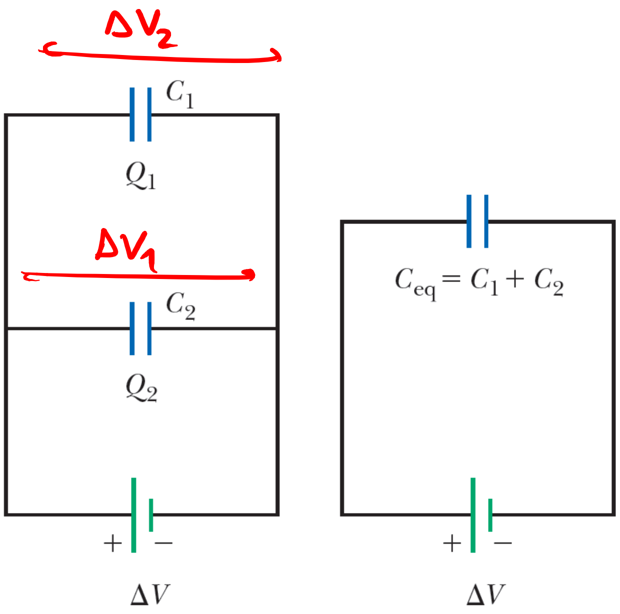
Χωρητικότητα

- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
  - Συμβολισμοί



Χωρητικότητα

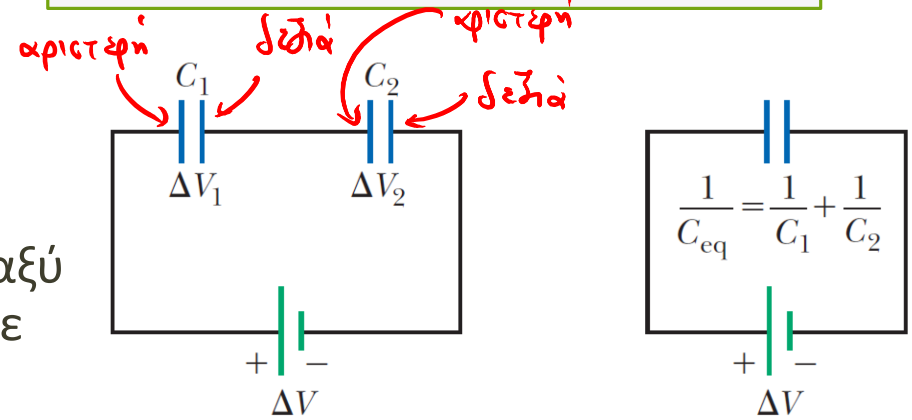
- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
  - Η διαφορές δυναμικού μεταξύ πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα είναι η ίδια και ίση με ΔV
    - Δηλ. $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$
    - Οι πυκνωτές αποκτούν φορτίο $Q_1 = C_1 \Delta V,\ Q_2 = C_2 \Delta V$
    - Το συνολικό φορτίο είναι $Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V$
    - Άρα οι δυο πυκνωτές μπορούν να αντικατασταθούν από έναν, με χωρητικότητα $C_{eq} = C_1 + C_2$
  - Γενικότερα: παράλληλη σύνδεση πυκνωτών



$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i}$$

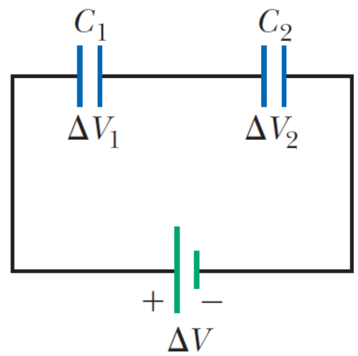
Χωρητικότητα

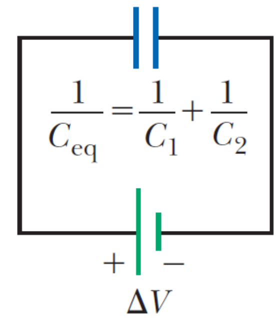
- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
  - Η διαφορές δυναμικού μεταξύ πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά είναι διαφορετικές



   - Η αριστερή πλάκα του C_1 και η δεξιά πλάκα του C_2 είναι συνδεδεμένες με την πηγή
   - Οι άλλες δυο πλάκες είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους μόνο
     - Το συνολικό τους φορτίο είναι μηδέν, και πρέπει να παραμείνει τόσο, εφόσον αποτελούν απομονωμένο σύστημα!
   - Ας θεωρήσουμε αρχικά αφόρτιστους πυκνωτές
     - Όταν συνδέσουμε την μπαταρία, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από την αριστερή πλάκα του C_1 στη δεξιά πλάκα του C_2
     - Ένα ισόποσο αρνητικό φορτίο εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2, και άρα αυτή έχει πλεόνασμα φορτίου (θετικού)
     - Το αρνητικό φορτίο που εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2 προκαλεί συσσώρευση αρνητικού φορτίου στην δεξιά πλάκα του C_1
   - Έτσι, και οι δυο πυκνωτές έχουν δεξιές πλάκες με φορτίο –Q και αριστερές πλάκες με φορτίο +Q

Χωρητικότητα





- **Συνδυασμοί Πυκνωτών**
  - Άρα το φορτίο των δυο πυκνωτών σε σειρά είναι ίδιο, $Q_1 = Q_2 = Q$
  - Προφανώς ισχύει $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$
  - Όμως

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

  - Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή που έχει την ίδια επίδραση στο κύκλωμα με τους δυο πυκνωτές

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

  - Τότε

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$$

  - Άρα γενικά

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$

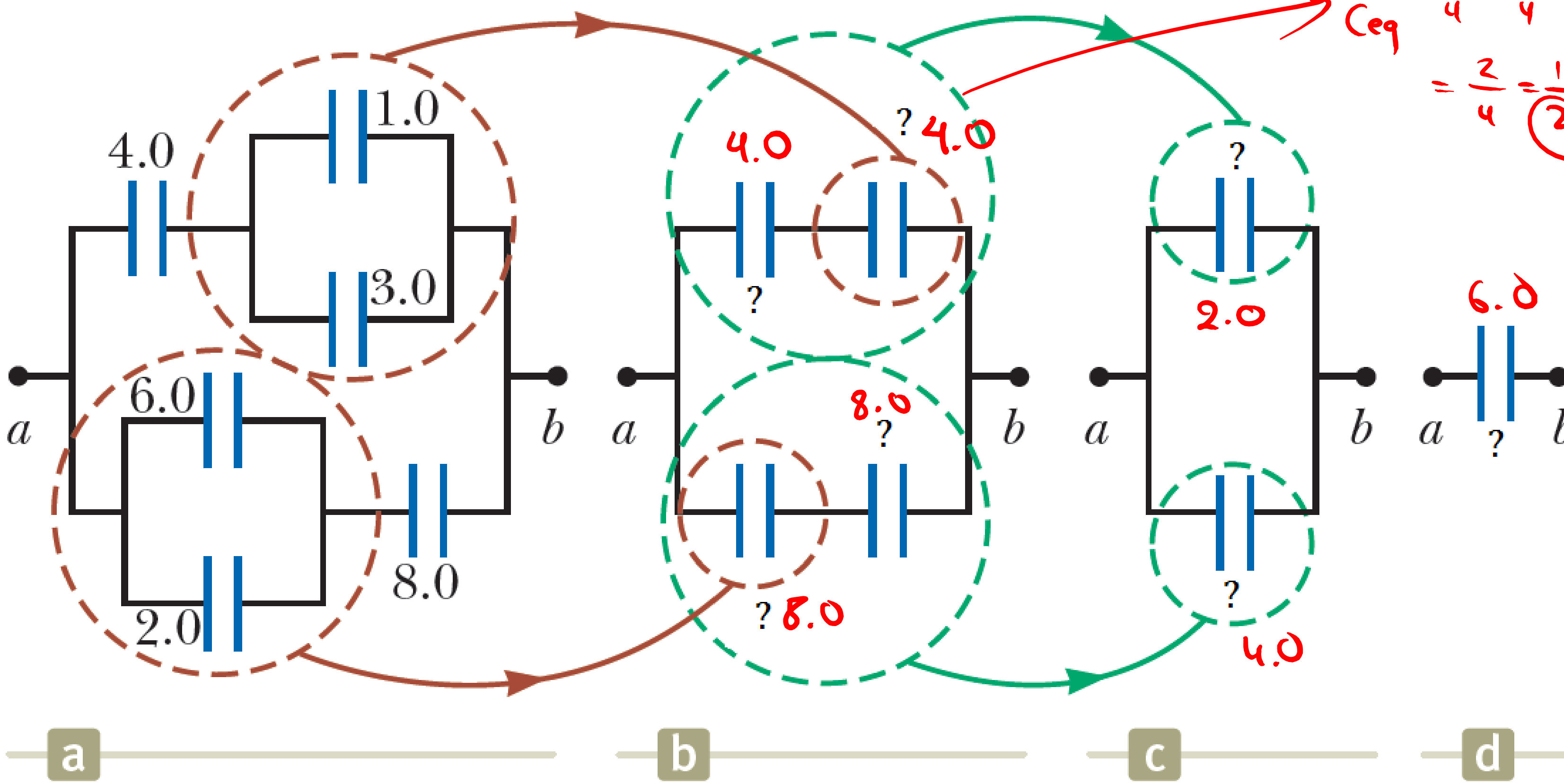
Χωρητικότητα

- **Παράδειγμα:**

Σειρά: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$

Παράλληλα: $C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Χωρητικότητα

- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
  - Ας θεωρήσουμε μια υπεραπλουστευμένη, «μηχανική» διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή
    - Ένα μικρό ποσό φορτίου μεταφέρεται από τη μια πλάκα μέσω δύναμης προς την άλλη πλάκα
      - Ασκείται έργο στο φορτίο
    - Δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού (μικρή) ανάμεσα στις πλάκες
    - Όσο μεταφέρουμε φορτίο από τη μια πλάκα στην άλλη, τόσο μεγαλώνει η διαφορά δυναμικού
      - Περισσότερο έργο απαιτείται για τη μεταφορά μιας ποσότητας φορτίου
    - Το έργο που παράγεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εμφανίζεται ως μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος (διατήρηση της ενέργειας)

Χωρητικότητα

- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
  - Ας υποθέσουμε ότι ο πυκνωτής έχει φορτίο q σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας
    - Η διαφορά δυναμικού θα είναι $\Delta V = \frac{q}{C}$
  - Το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά ενός φορτίου *dq* από μια πλάκα φορτίου *–q* σε αυτή φορτίου *+q* είναι

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

  - Άρα το συνολικό έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του πυκνωτή από μηδενικό φορτίο σε φορτίο Q είναι:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Χωρητικότητα

- **Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή**
  - Το έργο που παράγεται κατά τη φόρτιση του πυκνωτή αποθηκεύεται ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_E και άρα

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q\Delta\mathrm{V} = \frac{1}{2} C(\Delta\mathrm{V})^2$$

  - Θεωρούμε την ενέργεια σε έναν πυκνωτή ως αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες του, όσο φορτίζεται
  - Για έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες που απέχουν d, είναι

$$U_E = \frac{1}{2} \overbrace{\left(\frac{\epsilon_0 \mathrm{A}}{d}\right)}^{C} \overbrace{(Ed)}^{\Delta V}{}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A a E^2$$

Φυσική για Μηχανικούς

Ρεύμα και Αντίσταση

Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

Εικόνα: Οι γραμμές ρεύματος μεταφέρουν ενέργεια από την ηλεκτρική εταιρία στα σπίτια και τις επιχειρήσεις μας. Η ενέργεια μεταφέρεται σε πολύ υψηλές τάσεις, πιθανότατα εκατοντάδων χιλιάδων volt. Αν και αυτό καθιστά της ηλεκτροφόρες γραμμές επικίνδυνες, η υψηλή τάση συνεισφέρει στη λιγότερη απώλεια ενέργειας λόγω αντιστάσεων των καλωδίων (Telegraph Colour Library/FPG)

Φυσική για Μηχανικούς

Ρεύμα και Αντίσταση

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Εισαγωγή**
  - Σε αυτή τη διάλεξη θα ασχοληθούμε με την *κίνηση* ηλεκτρικών φορτίων σε μια περιοχή του χώρου
    - Ως τώρα θεωρούσαμε τα φορτία στάσιμα!
  - Θα μάθουμε τον όρο *ηλεκτρικό ρεύμα* (ή απλώς *ρεύμα*) για την περιγραφή του ρυθμού της ροής του φορτίου
  - Επίσης, θα μιλήσουμε για την *ηλεκτρική αντίσταση*
  - Θα εισάγουμε ένα νέο στοιχείο, τον *αντιστάτη*

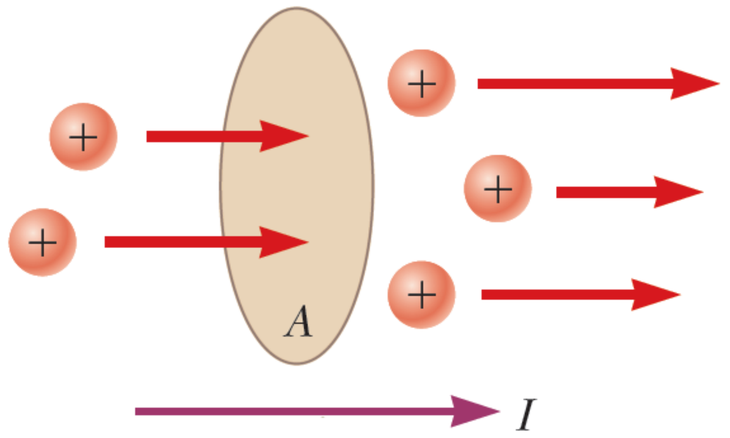
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό Ρεύμα**
  - Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη της ροής ηλεκτρικού φορτίου σε ένα τμήμα υλικού
  - Η ποσότητα της ροής εξαρτάται από
    - το είδος του υλικού
    - τη διαφορά δυναμικού κατά μήκος του υλικού
  - Όταν έχουμε ροή ηλεκτρικού φορτίου μέσα από μια περιοχή, τότε λέμε ότι υπάρχει ***ηλεκτρικό ρεύμα***
    - Σκεφτείτε αναλογίες με:
      - Ροή νερού, ροή ποταμού κλπ.

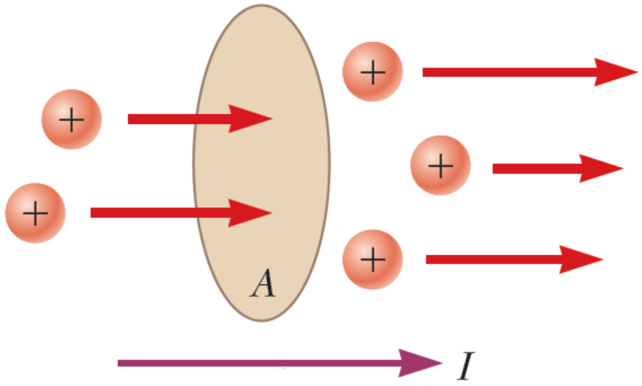
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό Ρεύμα**
  - Ας ορίσουμε το ρεύμα ποσοτικά:
    - Έστω μια ποσότητα φορτίου που κινείται κάθετα σε μια επιφάνεια εμβαδού A
    - Το **ρεύμα** ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο το φορτίο ρέει μέσα από την επιφάνεια
    - Αν η ποσότητα του φορτίου που περνάει από την επιφάνεια σε χρόνο Δt είναι ΔQ, τότε το **μέσο ρεύμα** ισούται με

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



Ρεύμα και Αντίσταση

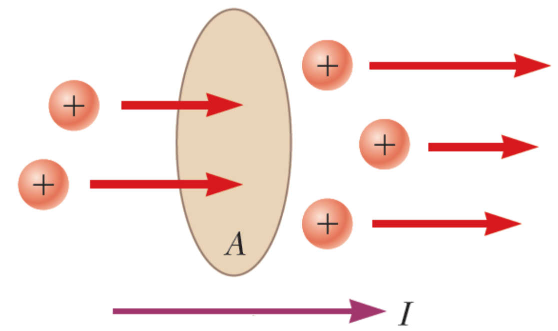


- **Ηλεκτρικό Ρεύμα**
  - Το **στιγμιαίο ρεύμα** ορίζεται ως το όριο του μέσου ηλεκτρικού ρεύματος όταν $\Delta t \to 0$

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

  - Μονάδα μέτρηση τους ρεύματος: 1 Ampere (A)
    - Ισούται με 1 C/s
  - Τα φορτισμένα σωματίδια που διαπερνούν μια επιφάνεια μπορεί να είναι θετικά, αρνητικά, ή και τα δυο
    - Έχει συμφωνηθεί να θεωρούμε ως κατεύθυνση του ρεύματος την κατεύθυνση των θετικών φορτίων
      - Δηλ. αντίθετη στην κίνηση των ηλεκτρονίων

Ρεύμα και Αντίσταση



- **Ηλεκτρικό Ρεύμα**
  - Αν τα άκρα ενός αγώγιμου καλωδίου ενωθούν σε ένα βρόχο, όλα τα σημεία του βρόχου έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό
    - Άρα το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι μηδέν
    - Άρα δεν υπάρχει ρεύμα
  - Αν όμως τα άκρα του συνδεθούν σε μια μπαταρία (πηγή διαφοράς δυναμικού), δεν έχουν όλα τα σημεία του βρόχου το ίδιο δυναμικό!
    - Η μπαταρία εγκαθιστά διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του βρόχου
      - Δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο καλώδιο
      - Το πεδίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια του καλωδίου, προκαλώντας την κίνησή τους
      - Δημιουργώντας έτσι το ηλεκτρικό ρεύμα!

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό ρεύμα**
  - Ας ορίσουμε ως ***πυκνότητα ρεύματος J*** σε ένα καλώδιο ως το ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας

$$J = \frac{I}{A}$$

  - Η πυκνότητα ρεύματος περιγράφει πως το φορτίο ρέει μέσα από κάθε κομμάτι ενός συγκεκριμένου είδους μετάλλου ως απάντηση στο ηλεκτρικό πεδίο E
    - Ισχύει μόνο για ομοιόμορφη πυκνότητα και για επιφάνεια A κάθετη στη διεύθυνση του ρεύματος
  - Ας ορίσουμε ως ***ειδική αγωγιμότητα σ*** ενός υλικού μια σταθερά που περιγράφει την πυκνότητα ρεύματος J δεδομένης μιας τιμής ηλεκτρικού πεδίου E

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό ρεύμα**
  - Σε μερικά υλικά (αρκετά, συμπεριλαμβανομένων και πολλών μετάλλων), η πυκνότητα ρεύματος είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου
$$\boldsymbol{J = \sigma E}$$
  - Υλικά που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση λέμε ότι ακολουθούν το **νόμο του Ohm:**
    - ***Ο λόγος της πυκνότητας ρεύματος J προς το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E είναι σταθερός και ίσος με σ, και ανεξάρτητος από το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το ρεύμα***
$$\boldsymbol{\sigma = \frac{J}{E}}$$
    - Ο νόμος του Ohm δεν είναι «νόμος» της Φύσης, αλλά μια εμπειρική σχέση που ισχύει μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις
    - Μπορούμε να λάβουμε όμως μια πιο χρήσιμη σχέση όπως θα δούμε στη συνέχεια…

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρικό ρεύμα**
  - Ο νόμος του Ohm είναι μια σχέση με πολύ μεγάλη σημασία. Γιατί;
  - Μας λέει **τρία** πράγματα:

1. Το ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο που ασκεί δυνάμεις στους φορείς φορτίου
2. Η πυκνότητα ρεύματος, και ως εκ τούτου το ρεύμα, εξαρτάται με γραμμικό τρόπο από το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου: $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma E}$
3. Η πυκνότητα ρεύματος εξαρτάται και από την αγωγιμότητα του υλικού

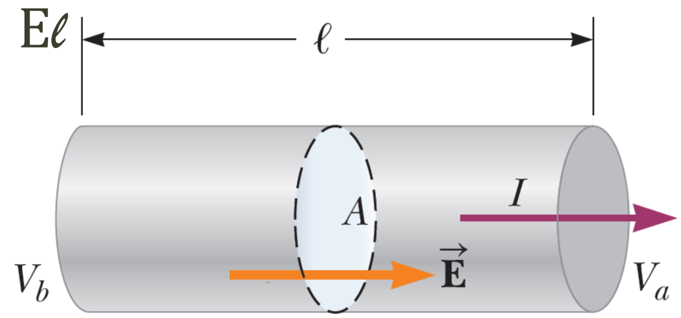
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Αντίσταση**
  - Ας θεωρήσουμε ένα καλώδιο με ομοιόμορφη επιφάνεια διατομής εμβαδού A και με μήκος ℓ
  - Μια διαφορά δυναμικού ΔV δημιουργείται κατά μήκος του καλωδίου αν το συνδέσουμε με μια μπαταρία (π.χ.)
    - Δημιουργώντας έτσι εντός του καλωδίου ένα ηλεκτρικό πεδίο και ένα ρεύμα
  - Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο της διαφοράς δυναμικού κατά μήκος του καλωδίου είναι

$$|\Delta V| = |V_b - V_a| = E\ell$$

  - Έτσι, η πυκνότητα ρεύματος είναι

$$J = \sigma \frac{|\Delta V|}{\ell}$$



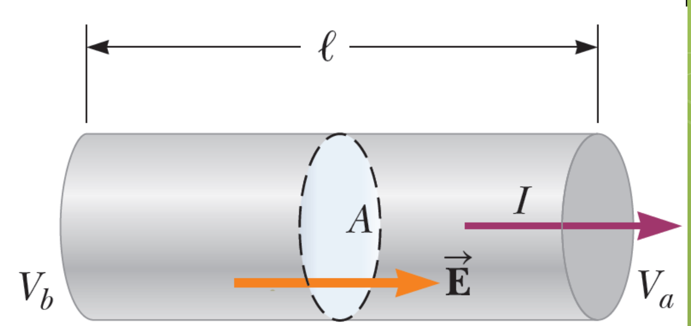
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Αντίσταση**
  - Επειδή όμως $J = \frac{I}{A}$, η διαφορά δυναμικού είναι

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma} J = \frac{\ell}{\sigma A} I = RI$$

  - Η ποσότητα $R = \frac{\ell}{\sigma A}$ ονομάζεται **αντίσταση** του αγωγού
  - Ορίζουμε λοιπόν την **αντίσταση** ενός αγωγού ως *το λόγο της διαφοράς δυναμικού προς το ρεύμα που τον διαρρέει*

$$\boldsymbol{R \equiv \frac{\Delta V}{I}}$$



  - Μονάδα μέτρησης: 1 Ohm (Ω)

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Αντίσταση**
  - Το αντίστροφο της αγωγιμότητας ονομάζεται ***ειδική αντίσταση ρ:***

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

    με μονάδες μέτρησης Ω·m

  - Επειδή

$$R = \frac{\ell}{\sigma \mathrm{A}}$$

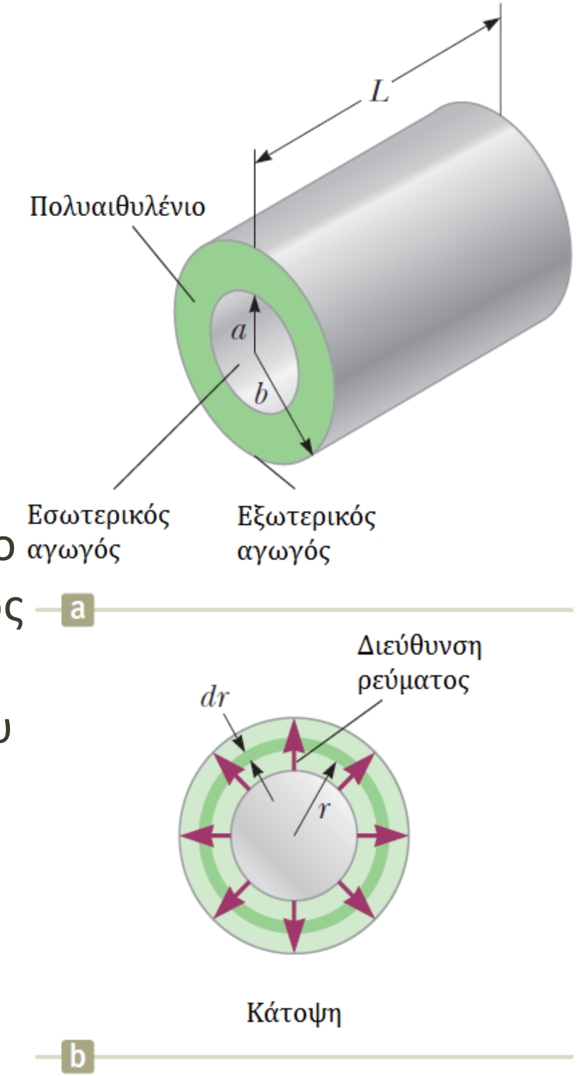
    μπορούμε να εκφράσουμε την αντίσταση ενός ομογενούς τμήματος υλικού μήκους ℓ ως

$$R = \rho \frac{\ell}{\mathrm{A}}$$

  - Ίσως γνωρίζετε ότι η ειδική αντίσταση ρ σχετίζεται γραμμικά με τη θερμοκρασία
    - Αυτό ισχύει μόνο για ένα συγκεκριμένο εύρος θερμοκρασιών

Ρεύμα και Αντίσταση

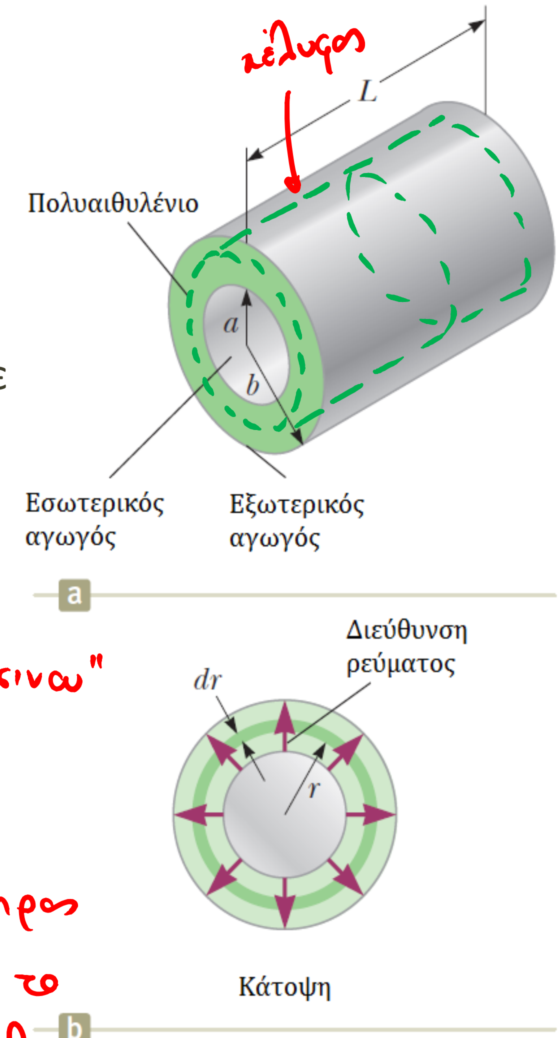
- **Παράδειγμα:**
  - Τα ομοαξονικά καλώδια χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην καλωδιακή τηλεόραση και σε άλλες ηλεκτρικές συσκευές. Ένα ομοαξονικό καλώδιο περιλαμβάνει δυο ομόκεντρους κυλινδρικούς αγωγούς. Η περιοχή ανάμεσά τους είναι γεμάτη με πολυαιθυλένιο (πλαστικό). Η διαρροή ρεύματος μέσα από το πλαστικό, σε ακτινική διεύθυνση, είναι άκρως ανεπιθύμητη.
    Η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού είναι a, του εξωτερικού αγωγού είναι b, και το μήκος του είναι L. Η ειδική αντίσταση του πλαστικού είναι ρ. Βρείτε την αντίσταση του πλαστικού ανάμεσα στους δυο αγωγούς.



Ρεύμα και Αντίσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού είναι a, του εξωτερικού αγωγού είναι b, και το μήκος του είναι L. Η ειδική αντίσταση του πλαστικού είναι ρ. Βρείτε την αντίσταση του πλαστικού ανάμεσα στους δυο αγωγούς.



Η ακτινική διαρροή ρεύματος (Σχήμα b) είναι ανεπιθύμητη. Ζητάμε την αντίσταση R του "πράσινου" υλικού. Χωρίζουμε το πλαστικό σε ομόκεντρα, κυλινδρικά κέλυφη ("τσόφλια") πάχους dr.

Οποιοδήποτε φορτίο (ρεύμα) κινείται ακτινικά προς τα έξω (Σχήμα b), θα περνά αναπόφευκτα από το κέλυφος αυτό, πάχους dr. Γνωρίζουμε ότι $R = \rho \frac{l}{A}$.

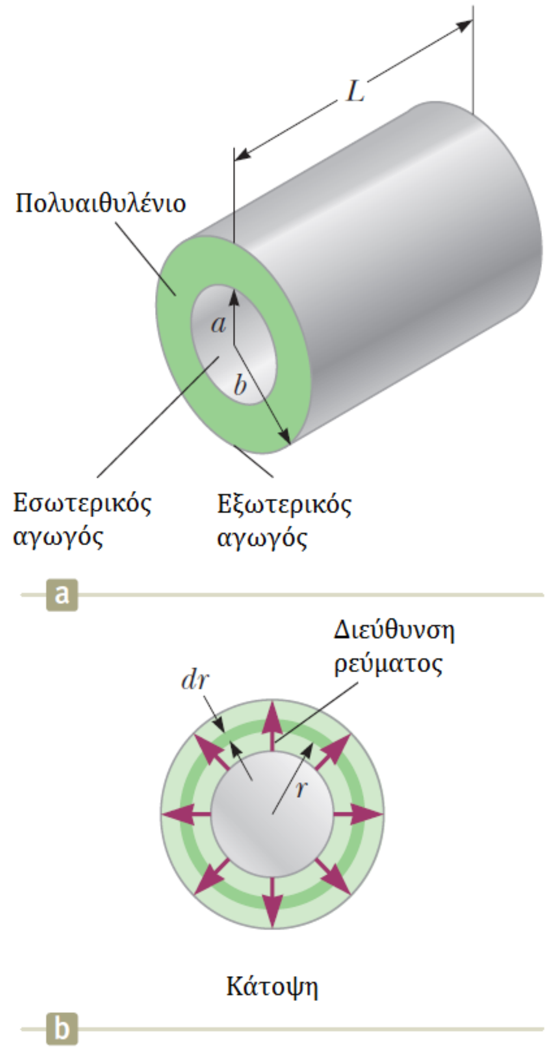
Έστω ότι το κέλυφος πάχους dr έχει αντίσταση dR.

αντίσταση ενός κελύφους πλαστικού πάχους dr

Ρεύμα και Αντίσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Η ακτίνα του εσωτερικού αγωγού είναι a, του εξωτερικού αγωγού είναι b, και το μήκος του είναι L. Η ειδική αντίσταση του πλαστικού είναι ρ. Βρείτε την αντίσταση του πλαστικού ανάμεσα στους δυο αγωγούς.



Είναι

$$dR = \rho\frac{l}{A} = \rho\frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L}\frac{dr}{r}.$$

Οπότε

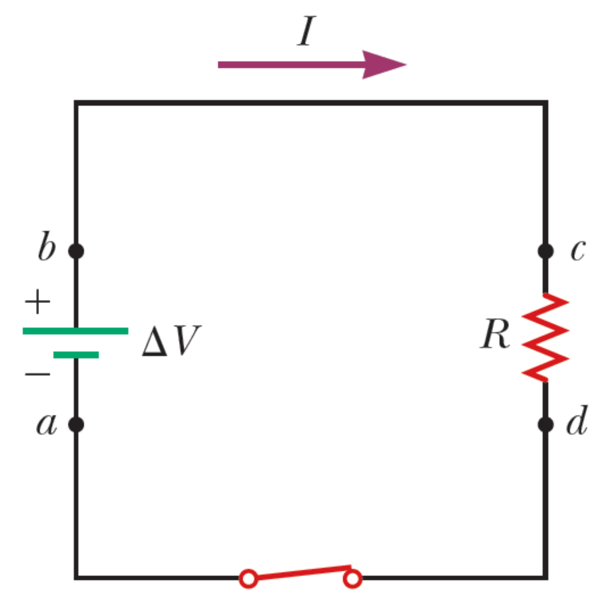
$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln(r)\Big]_{r=a}^{r=b}$$

$$= \frac{\rho}{2\pi L}(\ln b - \ln a) = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

αντίσταση ολόκληρου του πλαστικού ("πράσινο")

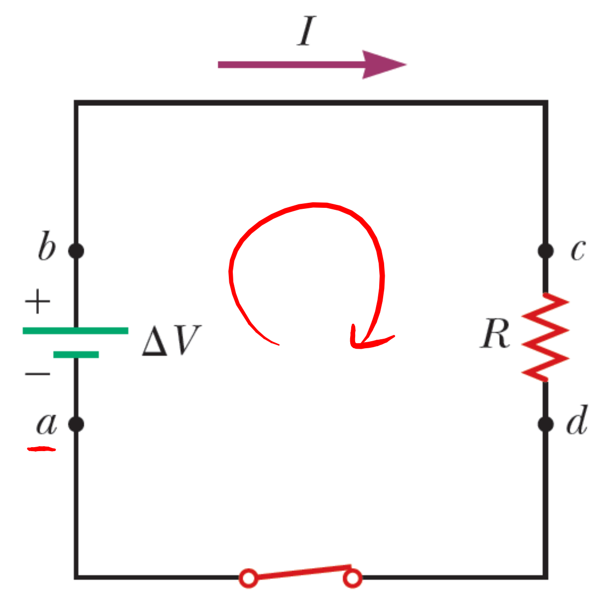
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Σε τυπικά ηλεκτρικά κυκλώματα, η ενέργεια μεταφέρεται από μια πηγή όπως η μπαταρία, σε μια λάμπα ή μια συσκευή
  - Ας βρούμε μια έκφραση που θα μας δίνει το ρυθμό μεταφοράς αυτής της ενέργειας!
  - Ας θεωρήσουμε το παρακάτω κύκλωμα όπου ενέργεια μεταφέρεται σε έναν αντιστάτη
    - Στην πραγματικότητα, κάποια ενέργεια μεταφέρεται και στα καλώδια, την οποία θεωρούμε αμελητέα



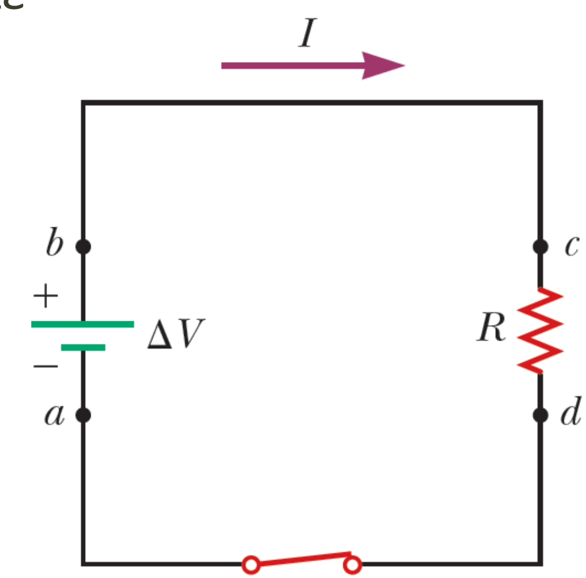
Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Ας θεωρήσουμε ότι ακολουθούμε ένα φορτίο Q που κινείται στο κύκλωμα κατά τη φορά του ρολογιού, ξεκινώντας και καταλήγοντας στο σημείο *α*
    - Από το *a* στο *b*, η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται κατά QΔV
      - …ενώ η χημική δυναμική ενέργεια της μπαταρίας μειώνεται εξίσου
    - Όσο το φορτίο κινείται από το *c* στο *d*, η ηλεκτρ. δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται λόγω της σύγκρουσης ηλεκτρονίων με τα άτομα του αντιστάτη
      - Μετατροπή ηλ. δυναμικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια



Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Όταν το φορτίο επιστρέφει στο *α*, το συνολικό αποτέλεσμα είναι ότι ένα τμήμα της χημικής δυναμικής ενέργειας της μπαταρίας μεταφέρθηκε στον αντιστάτη και έμεινε εκεί ως εσωτερική ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση των ατόμων του αντιστάτη
  - Συνήθως ο αντιστάτης είναι σε επαφή με τον αέρα
    - Μεταφέρεται ενέργεια μέσω θερμότητας
    - Εκπέμπεται επίσης ακτινοβολία
  - Μετά από λίγο, ο αντιστάτης επανέρχεται σε φυσιολογική θερμοκρασία



Ρεύμα και Αντίσταση

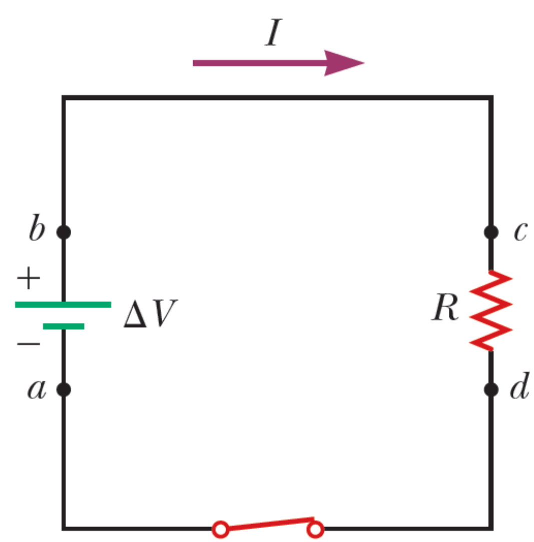
- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Ας μετρήσουμε τώρα το ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φθίνει όσο το φορτίο Q περνά από τον αντιστάτη:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

  - Το σύστημα αποκτά ξανά αυτή τη δυναμική ενέργεια όταν το φορτίο περάσει ξανά από την μπαταρία
    - Φυσικά, με το κόστος απώλειας χημικής ενέργειας από την μπαταρία
  - Ο ρυθμός αυτός είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η εσωτερική ενέργεια στον αντιστάτη
  - Ισχύς P που παραδίδεται:

$\frac{\Delta V}{R}$

$$P = I\underbrace{\Delta V}_{IR} = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}$$

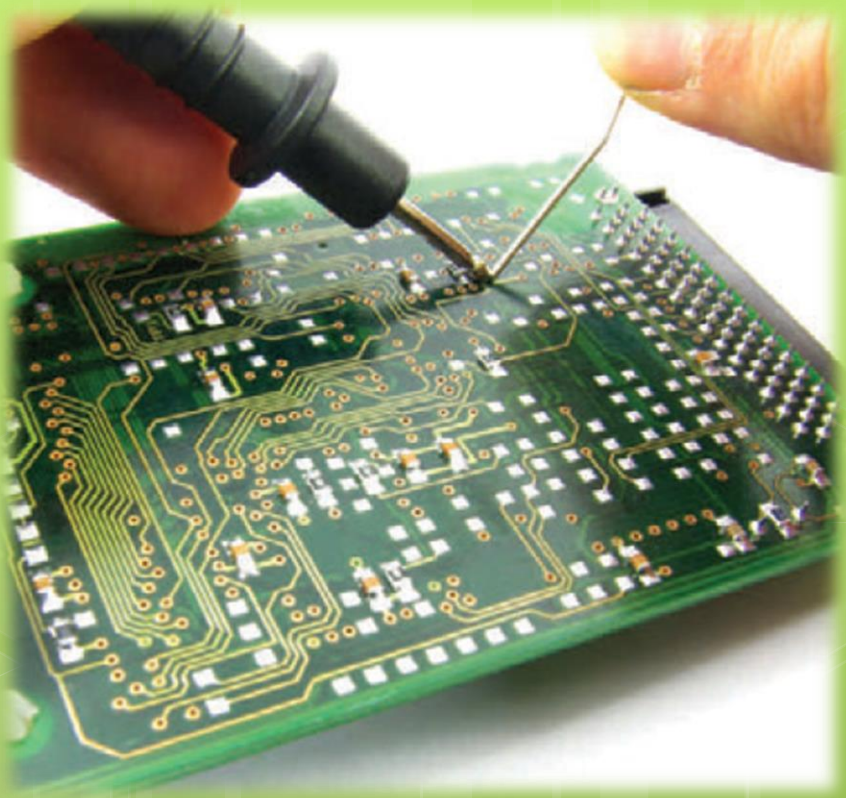


Ρεύμα και Αντίσταση

- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Το ηλεκτρικό ρεύμα συνήθως χρειάζεται να μεταφερθεί σε μεγάλες αποστάσεις
  - Η μεταφορά αυτή γίνεται με πυλώνες υψηλής τάσης και καλώδια
  - Όταν η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται μέσα από καλώδια (τα οποία έχουν υψηλό R), στην πράξη ένα μέρος της μετατρέπεται σε θερμότητα, όπως είδαμε
  - Όσο περισσότερη θερμότητα δημιουργείται κατά τη μεταφορά, τόσο λιγότερη ωφέλιμη ενέργεια φτάνει στον τελικό χρήστη
    - Για να μειωθούν οι απώλειες και το κόστος, η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται στα καλώδια σε *υψηλή τάση*
      - $P_{\kappa\alpha\lambda\omega\delta\iota o\upsilon} = I^2 R \rightarrow$ υψηλή ένταση, υψηλή ενέργεια στα καλώδια
      - $P_{\kappa\alpha\lambda\omega\delta\iota o\upsilon} = \frac{\Delta V^2}{R} \rightarrow$ υψηλή τάση, χαμηλή ενέργεια στα καλώδια

Ρεύμα και Αντίσταση

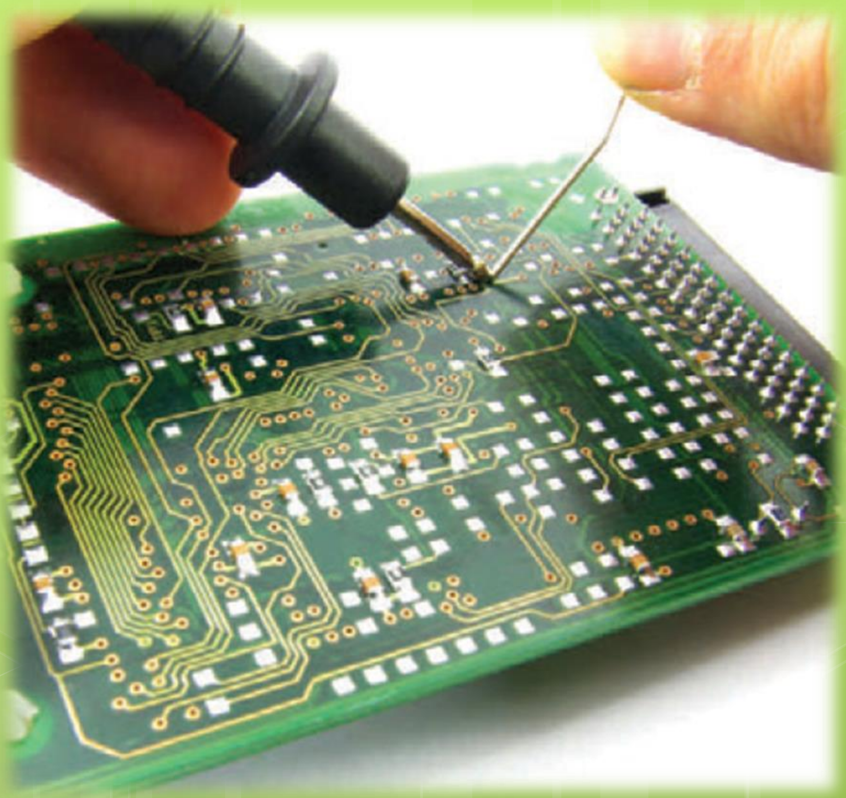
- **Ηλεκτρική Ισχύς**
  - Όταν το ηλεκτρικό ρεύμα φτάσει στα σπίτια μας, πρέπει να μετατραπεί σε χαμηλή τάση 240 V. Πώς γίνεται αυτό;
    - Αν παρατηρήσετε τις κολώνες της ΔΕΗ, ίσως προσέξετε ότι κάποιες από αυτές έχουν επάνω κάποιους κλωβούς που παράγουν συνήθως και κάποιο θόρυβο
    - Αυτοί είναι οι λεγόμενοι μετασχηματιστές, που μετατρέπουν το ηλεκτρικό ρεύμα υψηλής τάσης που έρχεται από το εργοστάσιο παραγωγής σε ηλεκτρικό ρεύμα χαμηλότερης τάσης (~4 kV)
    - Επιπλέον μετασχηματιστές μετατρέπουν αυτήν την τάση σε κατάλληλη για οικιακή χρήση (240 V)



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

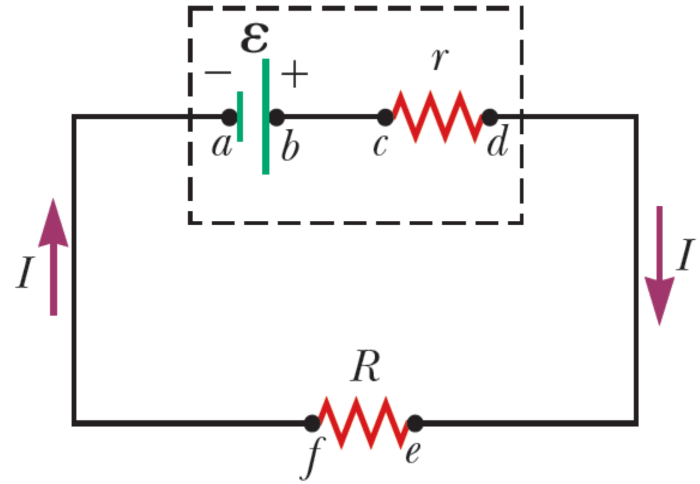
- **Εισαγωγή**
  - Τα κυκλώματα που θα δούμε περιέχουν τους δομικούς λίθους που συζητήσαμε ως τώρα
    - Αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηγές διαφοράς δυναμικού (μπαταρίες)
  - Στην προσπάθεια ανάλυσής τους θα μάθουμε για τους ***Κανόνες του Kirchhoff***
    - Προέρχονται από την ***αρχή διατήρησης της ενέργειας*** και την ***αρχή διατήρησης του φορτίου***
  - Το ρεύμα που θα διαρρέει τα κυκλώματά μας θα είναι σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Ηλεκτρεγερτική Δύναμη**
  - Η διαφορά δυναμικού στους πόλους μιας μπαταρίας είναι σταθερή για ένα δεδομένο κύκλωμα, το ρεύμα στο κύκλωμα είναι επίσης σταθερό σε μέτρο και κατεύθυνση, και λέγεται ***συνεχές ρεύμα***
  - Η μπαταρία καλείται είτε ***πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης*** είτε ***πηγή ΗΕΔ***
  - Η **ΗΕΔ *Ɛ*** μιας μπαταρίας είναι η **μέγιστη δυνατή τάση (ΔV)** ανάμεσα στους πόλους της
  - Σε όλη μας τη συζήτηση θα υποθέσουμε ότι τα καλώδια δεν έχουν αντίσταση
  - Ο θετικός πόλος της μπαταρίας είναι υψηλότερου δυναμικού από τον αρνητικό

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

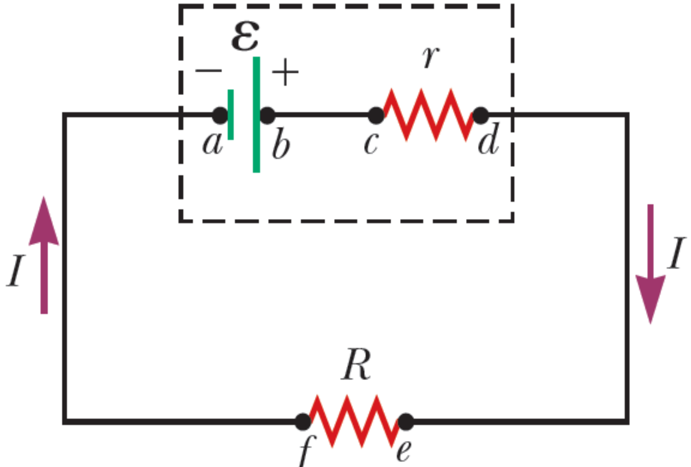
- **Ηλεκτρεγερτική Δύναμη**
  - Η μπαταρία έχει κι αυτή τη δική της αντίσταση
    - Την ονομάζουμε ***εσωτερική αντίσταση r***
  - Ιδανικά, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας ισούται με την ΗΕΔ
  - Στην πράξη όμως, δεν ισχύει. Γιατί;
    - Το σχήμα δείχνει ένα μοντέλο μπαταρίας (κουτί διακ/μένων)
    - Ιδανική ΗΕΔ και αντίσταση ***r*** σε σειρά:



$$V_d - V_a = \Delta V = \boldsymbol{\varepsilon} - I\boldsymbol{r}$$

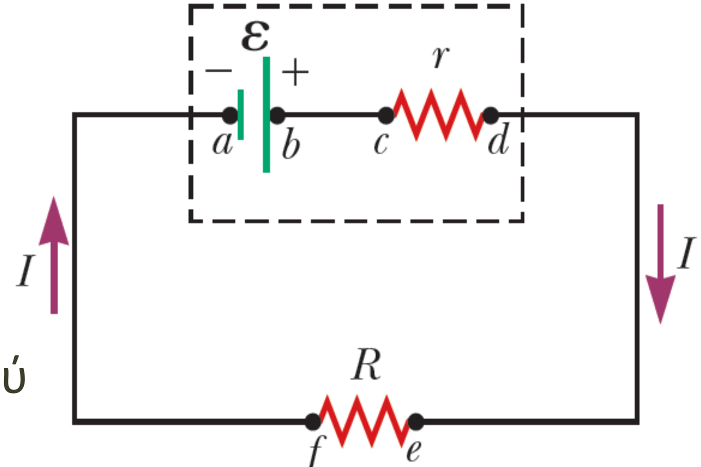
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Ηλεκτρεγερτική Δύναμη**
  - Το σχήμα δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R είναι
$$\Delta V = IR$$
  - Σύμφωνα με τη σχέση που υπολογίσαμε πριν, θα έχουμε
$$\Delta V = IR = \boldsymbol{\varepsilon} - I\boldsymbol{r}$$
  οπότε
$$I = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R + \boldsymbol{r}}$$
  - Άρα το ρεύμα εξαρτάται τόσο από την R όσο κι από την $\boldsymbol{r}$



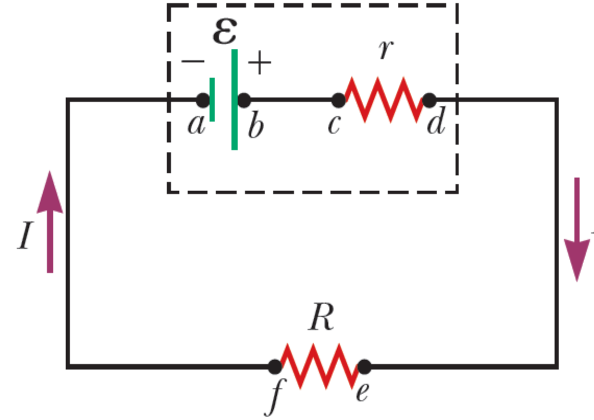
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Ηλεκτρεγερτική Δύναμη**
  - Πολλαπλασιάζοντας με I, έχουμε $I\boldsymbol{\varepsilon} = I^2R + I^2\boldsymbol{r}$
  - Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ισχύς κατανέμεται τόσο στην εξωτερική αντίσταση R όσο και στην εσωτερική αντίσταση $\boldsymbol{r}$
  - Στην πράξη, η R είναι αρκετά μεγαλύτερη από την $\boldsymbol{r}$
    - Όσο «γερνάει» η μπαταρία τόσο μεγαλώνει η τιμή του $\boldsymbol{r}$ της
  - Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μπαταρία είναι μια πηγή σταθερής ΗΕΔ
    - Όχι σταθερού ρεύματος
    - Όχι σταθερής διαφοράς δυναμικού



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα**
  - Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $\boldsymbol{r} =$ 0.05 Ω. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με R=3 Ω.
  - A) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας
  - B) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $r = 0.05$ Ω. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με R=3 Ω.
  - Α) Βρείτε το ρεύμα και τη διαφορά δυναμικού της μπαταρίας

Ξέρουμε ότι για το απλό αυτό κύκλωμα ισχύει ότι

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12}{3.05} \cong 3.93 \simeq 4.0 \text{ A}$$

Δείξαμε ότι $\Delta V_{\mu\pi.} = \mathcal{E} - Ir = 12 - 4.0 \cdot 0.05 \cong 11.8$ V

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 12 V και εσωτερική αντίσταση $\boldsymbol{r} = 0.05$ Ω. Οι πόλοι της συνδέονται σε μια εξωτερική αντίσταση με R=3 Ω.
  - Β) Υπολογίστε την ισχύ που λαμβάνει ο αντιστάτης, η εσωτερική αντίσταση και την ισχύ που δίνει η μπαταρία

Είναι

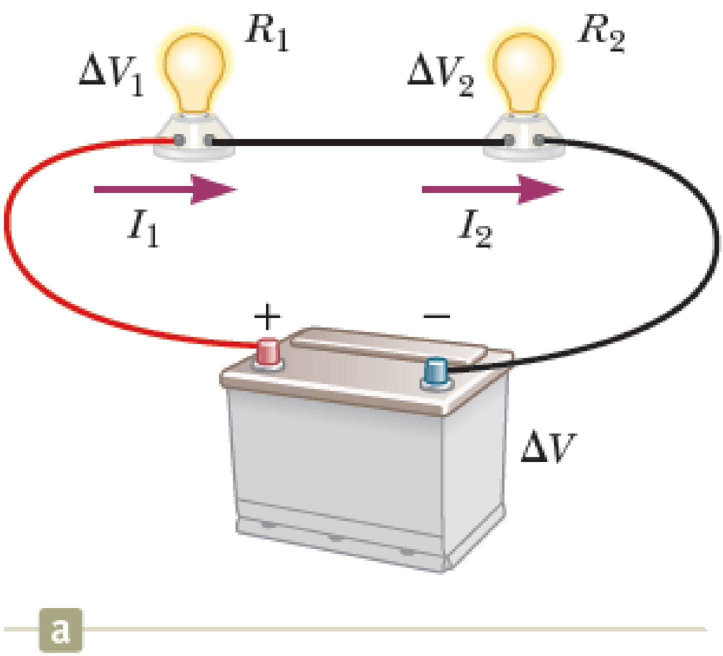
$$P_R = I^2 \cdot R \simeq 4^2 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48 \text{ Watt}$$

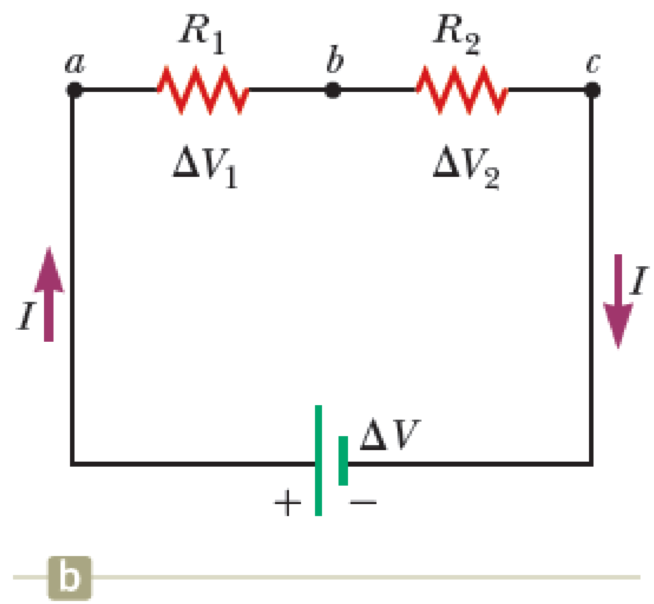
$$P_r = I^2 \cdot r \simeq 4^2 \cdot 0.05 = 0.772 \text{ W}$$

$$P = P_R + P_r = 48.7 \text{ W}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

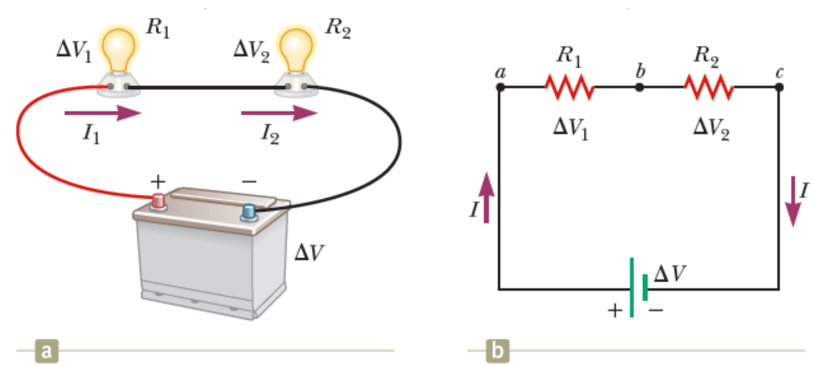
- **Αντιστάτες σε σειρά & παράλληλα**
  - Ας δούμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το ίδιο «σχέδιο» όπως κάναμε με τους πυκνωτές
  - Ας ξεκινήσουμε με μια διάταξη σε σειρά





Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Αντιστάτες σε σειρά**
  - Προφανώς, η ποσότητα φορτίου Q που εξέρχεται του αντιστάτη R_1 θα πρέπει να είναι ίδια με αυτή που εισέρχεται στον R_2



  - Άρα $\mathrm{I} = I_1 = I_2$, αν Ι είναι το ρεύμα που άγει η μπαταρία
  - Η διαφορά δυναμικού δίνεται ως

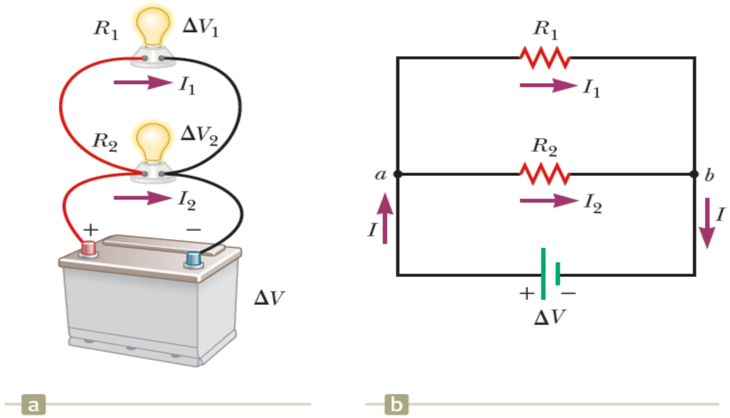
$$\Delta \mathrm{V} = \Delta V_1 + \Delta \mathrm{V}_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathrm{I}(R_1 + R_2)$$

  - Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση $R_{eq} = R_1 + R_2$
  - Γενικότερα

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Αντιστάτες σε παραλληλία**
  - Προφανώς, η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι η ίδια
  - Άρα $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, αν ΔV είναι η διαφορά δυναμικού που εγκαθιστά η μπαταρία
  - Το ρεύμα I χωρίζεται σε δυο μονο-πάτια



  - Επειδή όμως το συνολικό φορτίο διατηρείται

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta \mathrm{V}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

  - Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

  - Γενικότερα

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

Πυκνωτές

- Σε σειρά:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

- Σε παραλληλία:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Αντιστάτες

- Σε σειρά:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

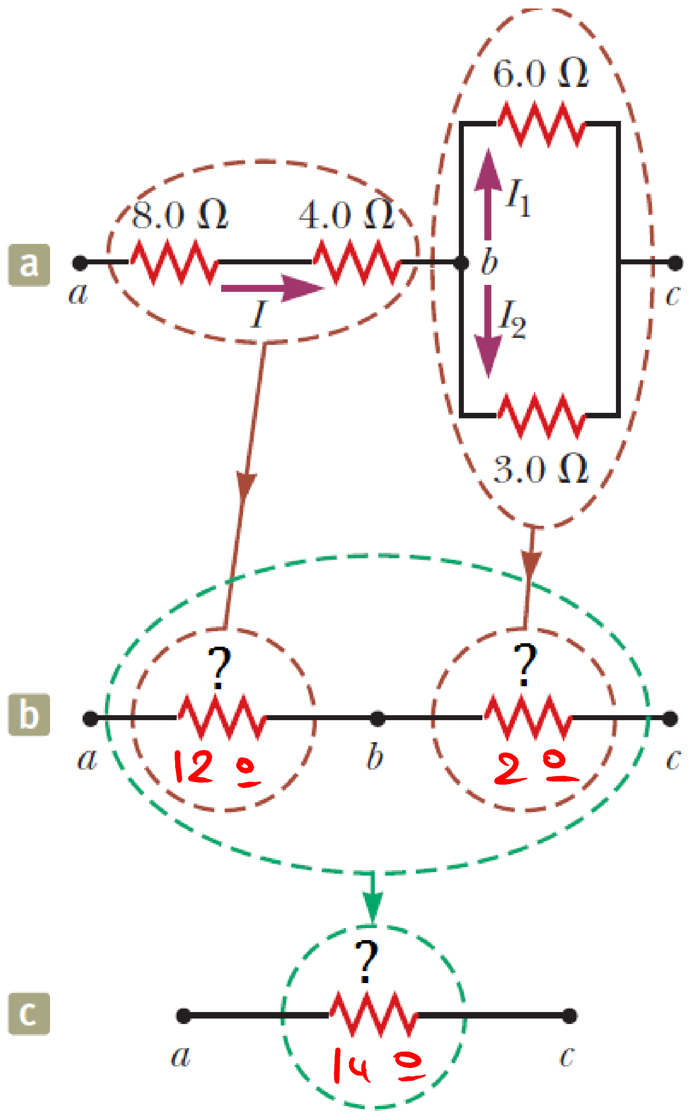
- Σε παραλληλία:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα**
  - Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Οι Κανόνες του Kirchhoff**
  - Για πιο περίπλοκα κυκλώματα, ακολουθούμε κάποιους κανόνες, του λεγόμενους ***κανόνες του Kirchhoff***
    - 1. ***Κανόνας κόμβου:*** σε οποιονδήποτε κόμβο, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{κόμβος} I = 0$$

      - ***Τα ρεύματα που <u>μπαίνουν</u> στον κόμβο έχουν <u>θετικό</u> πρόσημο, ενώ αυτά που <u>βγαίνουν</u>, <u>αρνητικό</u>.***
      - Εναλλακτικά:

$$I_{in} = I_{out}$$

    - 2. ***Κανόνας βρόχου:*** το άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε ένα βρόχο πρέπει να είναι μηδέν

$$\sum_{βρόχος} \Delta V = 0$$

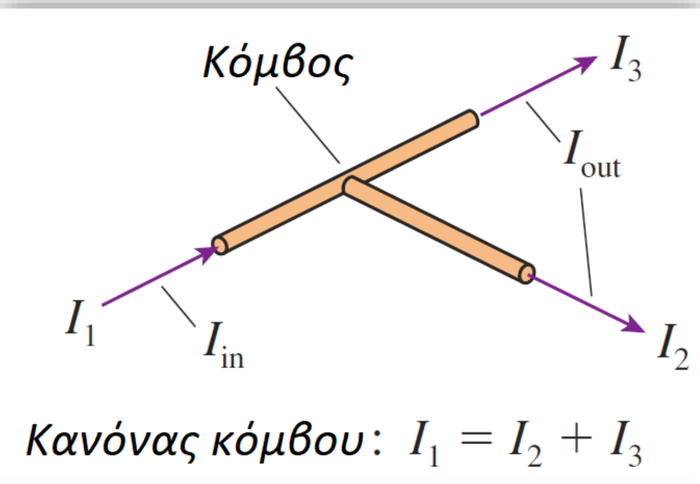
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Οι Κανόνες του Kirchhoff**

  - 1. ***Κανόνας κόμβου:***

$$I_{in} = I_{out}$$

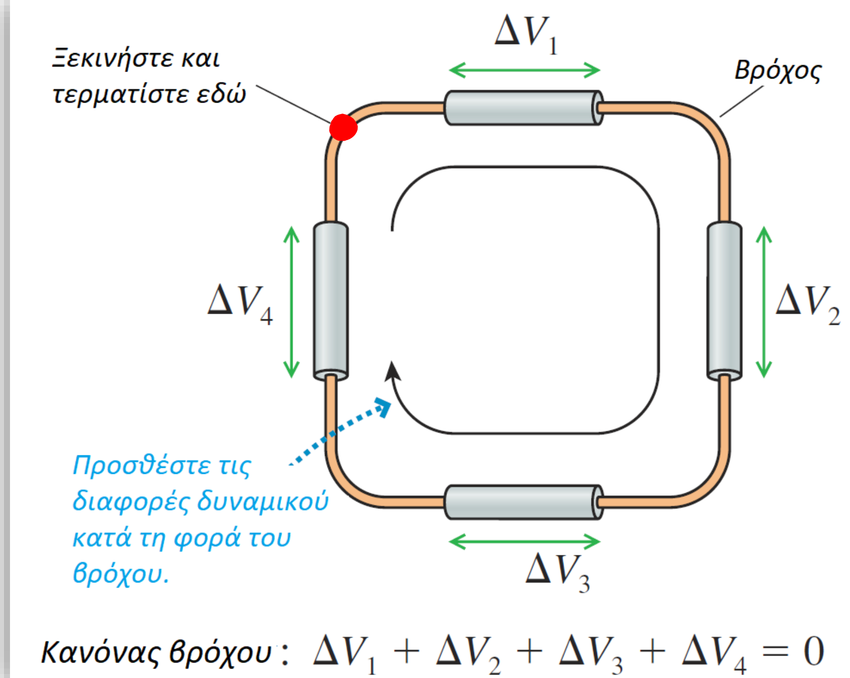
Προέρχεται από την αρχή διατήρησης του φορτίου



  - 2. ***Κανόνας βρόχου:***

$$\sum_{\beta\rho\acute{o}\chi o\varsigma} \Delta V = 0$$

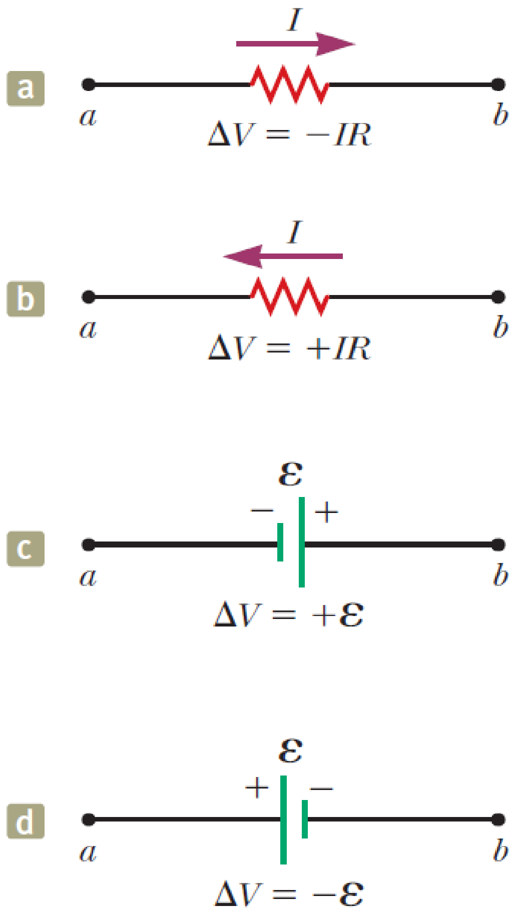
  - Προέρχεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας



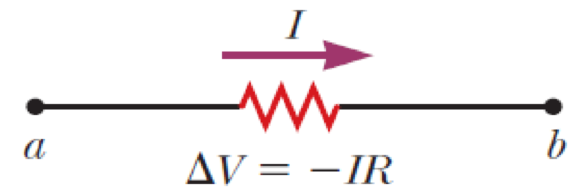
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Κανόνες προσήμου**
  - a. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά τη φορά του ρεύματος είναι $-IR$
  - b. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη κατά την αντίθετη φορά του ρεύματος είναι $+IR$
  - c. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι +**ε** αν τη διατρέχουμε από τα αρνητικά προς τα θετικά
  - d. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ΗΕΔ είναι -**ε** αν τη διατρέχουμε από τα θετικά προς τα αρνητικά

Σε κάθε διάγραμμα, ΔV = Vb - Va και το στοιχείο κυκλώματος διατρέχεται από το a στο b, αριστερά προς δεξιά.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

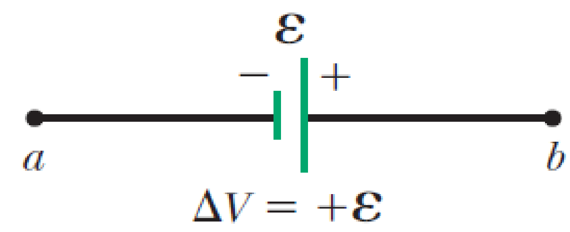


- **Κανόνες προσήμου**
- Έστω ότι δε θυμάστε ποιο πρόσημο αντιστοιχεί που…
  - Θέλετε να υπολογίστε το $V_b - V_a = \Delta V$ για ένα στοιχείο όπως στο σχήμα.
    - Το ρεύμα κινείται προς τα «δεξιά»
      - Φορά ρεύματος = αντίθετη στην πραγματική κίνηση των φορέων φορτίων, δηλ. των ηλεκτρονίων
      - Άρα τα ηλεκτρόνια κινούνται από το b στο α (προς τα «αριστερά»)
      - Η κίνησή τους οφείλεται σε ηλεκτρική δύναμη που προέρχεται από ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, που εγκαθίσταται λόγω της διαφοράς δυναμικού
    - Αν θεωρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο εντός του αγωγού ως ομογενές, προς τα πού δείχνει το διάνυσμα του πεδίου $\vec{E}$?
      - Υποχρεωτικά θα «δείχνει» από το α προς το b!
      - Ειδάλλως το ηλεκτρόνιο δε θα κινούνταν από το b στο α, δηλ. προς «αριστερά»!
      - Το ηλεκτρικό πεδίο «δείχνει» πάντα προς περιοχές χαμηλού δυναμικού

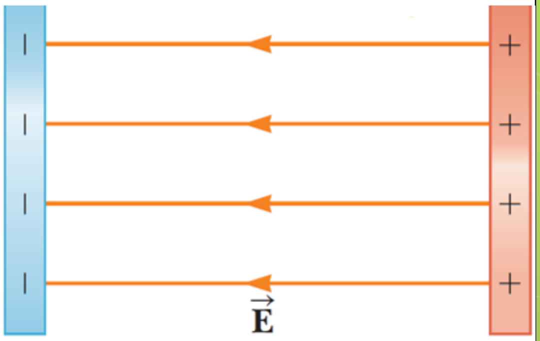
διάλεξη 19,
διαφάνειες 18-19

  - Άρα $V_b < V_a \Rightarrow V_b - V_a < 0 \Rightarrow \Delta V = -IR$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

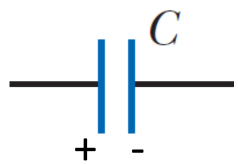


- **Κανόνες προσήμου**
- Έστω ότι δε θυμάστε ποιο πρόσημο αντιστοιχεί που…
  - Θέλετε να υπολογίστε το $V_b - V_a = \Delta V$ για ένα στοιχείο όπως στο σχήμα.



    - Φανταστείτε ότι ανάμεσα στις «πλάκες» της πηγής υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο
    - Το ηλεκτρικό πεδίο ξεκινά από τη θετική πλάκα και «δείχνει»/καταλήγει στην αρνητική
    - Το ηλεκτρικό πεδίο «δείχνει» πάντα προς περιοχές χαμηλού δυναμικού
  - Άρα

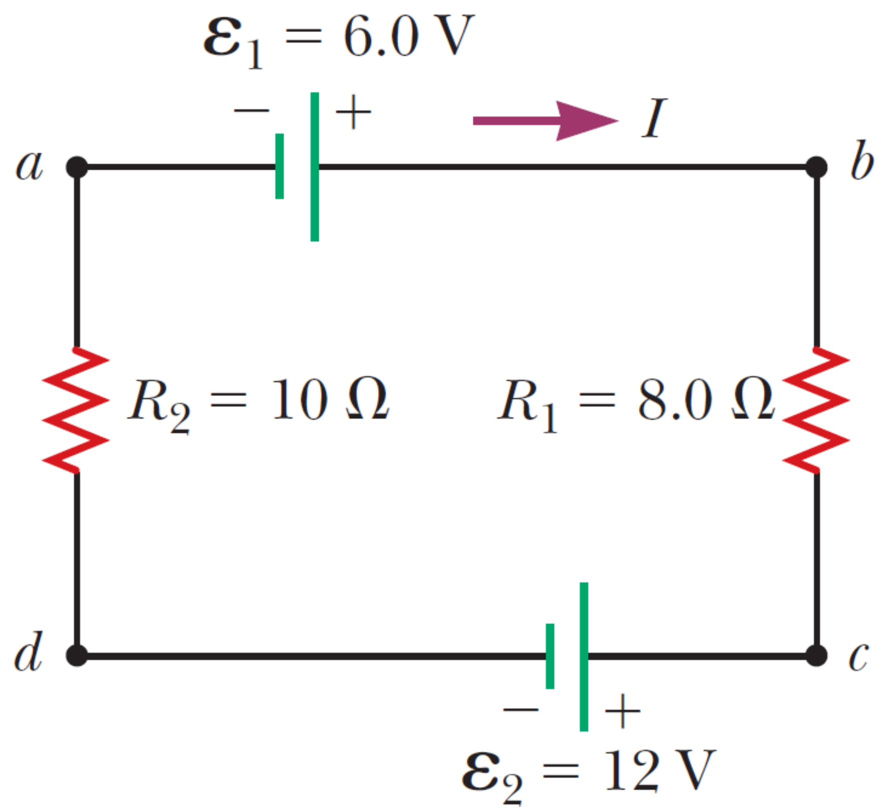
$$V_b > V_a \Rightarrow V_b - V_a > 0 \Rightarrow \Delta V = +\boldsymbol{\varepsilon}$$



  - Ακριβώς όμοιο το σκεπτικό για ένα πυκνωτή

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα κύκλωμα απλού βρόχου περιέχει δυο αντιστάτες και δυο πηγές όπως στο σχήμα. Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

α) Δεν υπάρχουν κόμβοι στο κύκλωμα, άρα δεν χρειάζεται ο 1ος κ.κ.

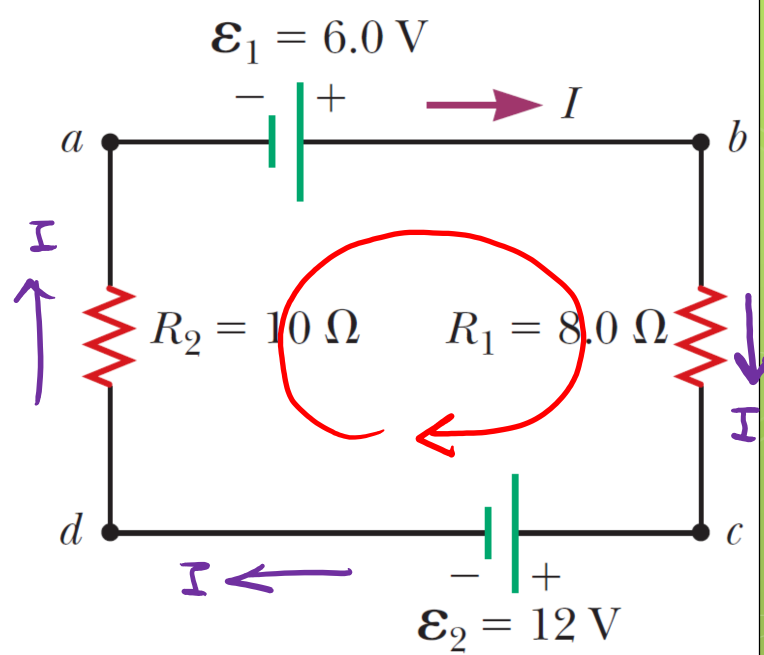
β) 2ος κ.κ. : $\sum_{dabcd} \Delta V = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -IR_2 + \varepsilon_1 - IR_1 - \varepsilon_2 = 0$

$\Leftrightarrow -I \cdot 10 + 6 - I \cdot 8 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow -18I - 6 = 0$

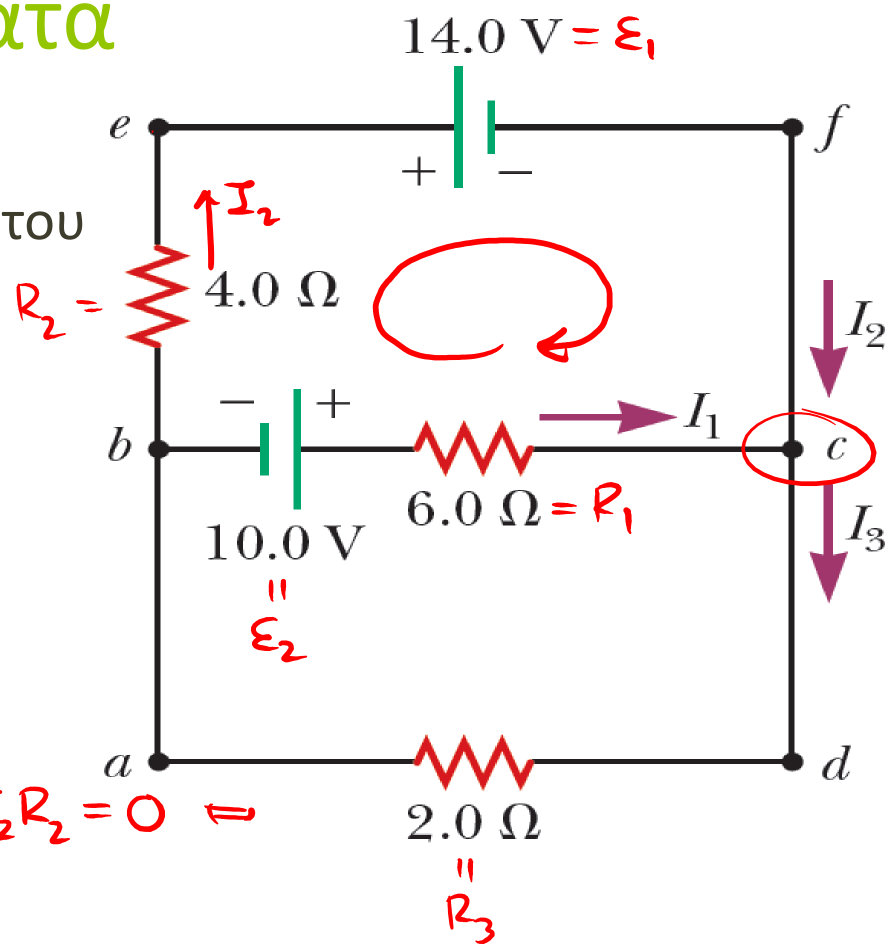
$\Leftrightarrow I = -\frac{1}{3}\ A \simeq -0.33\ldots\ A$



Το "μείον" σημαίνει ότι το ρεύμα κινείται αντίθετα απ' ότι έχω υποθέσει.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 του διπλανού κυκλώματος



Στον κόμβο c :

1ος Κ.Κ : $I_1 + I_2 = I_3$ (1)

Στο βρόχο efcbe, έχουμε:

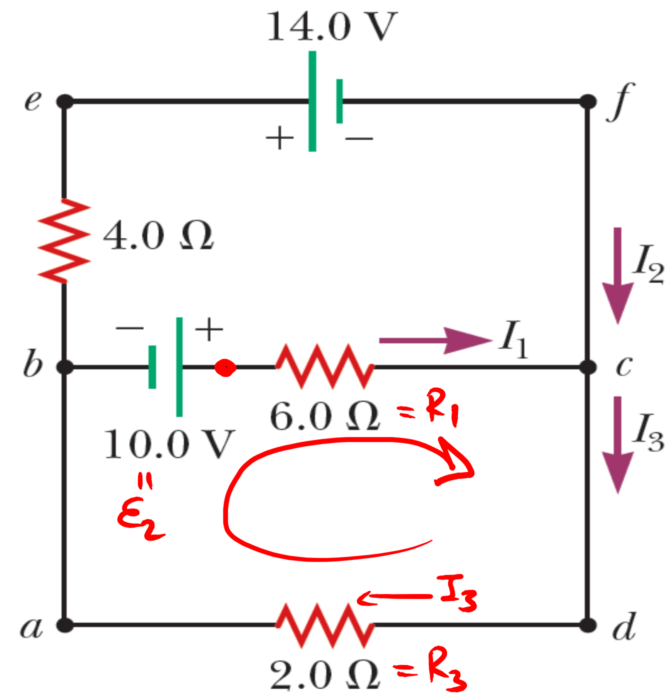
$$\sum_{efcbe} \Delta V = 0 \Leftrightarrow -\mathcal{E}_1 + I_1R_1 - \mathcal{E}_2 - I_2R_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -14 + 6I_1 - 10 - 4I_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 + 6I_1 - 4I_2 = 0 \quad (2)$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Στο βρόχο abcda, έχουμε:

$$\sum_{abcda} \Delta V = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_2 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \quad (3)$$

Άρα:

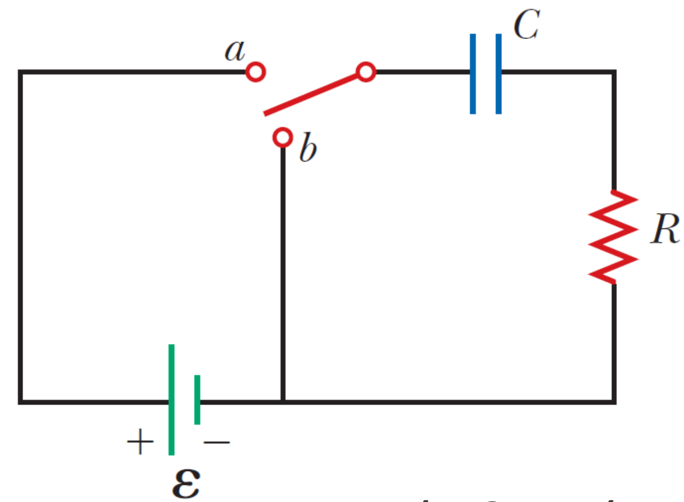
$$\left.\begin{array}{l} I_2 + I_1 = I_3 \\ -24 + 6I_1 - 4I_2 = 0 \\ 10 - 6I_1 - 2I_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{λύνονται} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = 2\text{ A} \\ I_2 = -3\text{ A} \\ I_3 = -1\text{ A} \end{array}$$

Τα αρνητικά πρόσημα δηλώνουν ότι το ρεύμα I_2, I_3 έχει αντίθετη φορά από αυτή του σχήματος.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Κυκλώματα RC**
  - Ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό.
  - Αν όμως αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα εξακολουθεί να έχει την ίδια κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές
  - Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται ***RC-κύκλωμα***

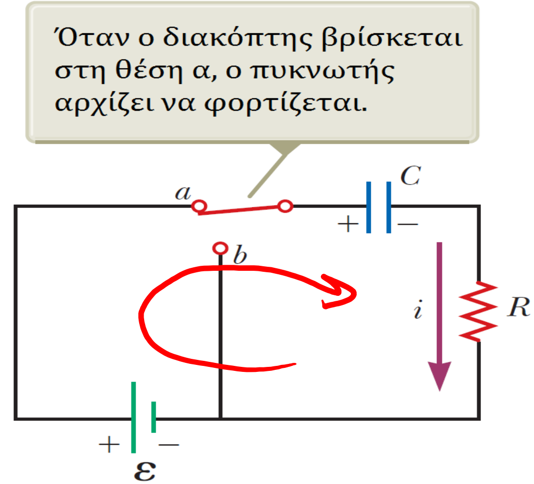
Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή
  - Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή $t = 0$, (θέση α) ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, κι ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται
  - Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται
  - Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται! Γιατί;
    - Γιατί δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα!
    - Ο πυκνωτής έχει ΔV = $\boldsymbol{\varepsilon}$!

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ας αναλύσουμε τη διαδικασία ποσοτικά
  - Σύμφωνα με το 2ο κανόνα του Kirchhoff:



$$\sum \Delta V = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta V_c + \Delta V_R = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{q}{C} - iR = 0$$

με i, q το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t > 0$

  - Αποτελούν δηλαδή ***στιγμιαίες*** τιμές
- Αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$I_i = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R}, \qquad t = 0$$

  - …γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδέν
  - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Στο τέλος, όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν
    - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή
    - Το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = \mathrm{C}\Delta\mathrm{V} = C\boldsymbol{\varepsilon}$$

  - Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή t, και όχι μόνο τι συμβαίνει στις δυο ακραίες καταστάσεις που περιγράψαμε
  - Ας το δούμε…

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ξέρουμε ότι $i = \frac{dq}{dt}$ και άρα
$$\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{q}{C} - iR = 0 \leftrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\boldsymbol{\varepsilon}}{RC}$$
  - Πολλαπλασιάζοντας με dt και αναδιατάσσοντας
$$\frac{dq}{q - C\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{RC}dt$$
  - Ολοκληρώνοντας
$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \leftrightarrow \ln\left(\frac{q - C\boldsymbol{\varepsilon}}{-C\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = -\frac{t}{RC}$$
  - Άρα
$$\boxed{q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

ως προς το χρόνο έχουμε ότι

$$\boxed{i(t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} e^{-t/RC}}$$

  - Η ποσότητα RC ονομάζεται ***χρονική σταθερά τ***

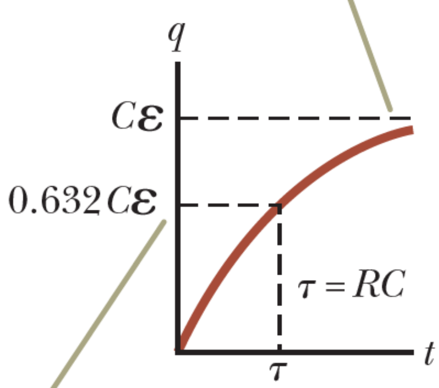
$$\tau = RC$$

    - Εκφράζει τη χρονική στιγμή όπου το ρεύμα φθίνει στο $1/e$ της αρχική του τιμής $(0.368 I_i)$,
    - Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή όπου το φορτίο αυξάνει από $q = 0$ στην τιμή $q = 0.632 C\boldsymbol{\varepsilon}$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

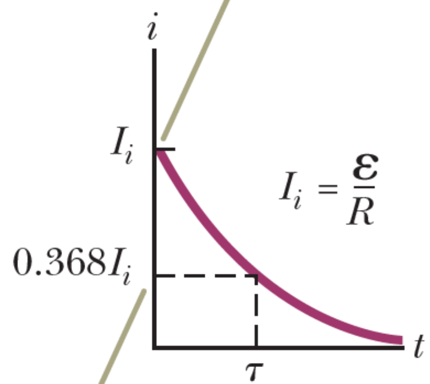
- **Φόρτιση πυκνωτή**

Το φορτίο πλησιάζει τη μέγιστη τιμή του, C**ε**, όσο το t πλησιάζει στο άπειρο.



Μετά από χρονικό διάστημα ίσο με μια χρονική σταθερά τ, το φορτίο έχει το 63.2% της μέγιστης τιμής του C**ε**.

Το ρεύμα αποκτά τη μέγιστη τιμή του, I = ε/R, όταν t = 0, και φθίνει στο μηδέν εκθετικά όσο το t πλησιάζει στο άπειρο.

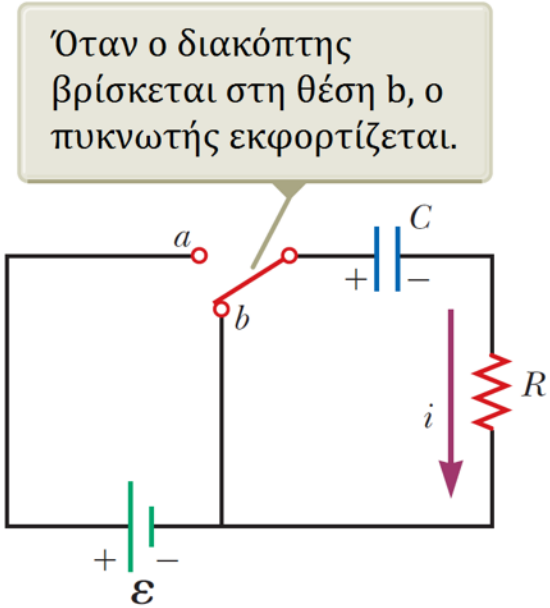


Μετά από χρονικό διάστημα ίσο με μια χρονική σταθερά τ, το ρεύμα έχει το 36.8% της αρχικής του τιμής.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

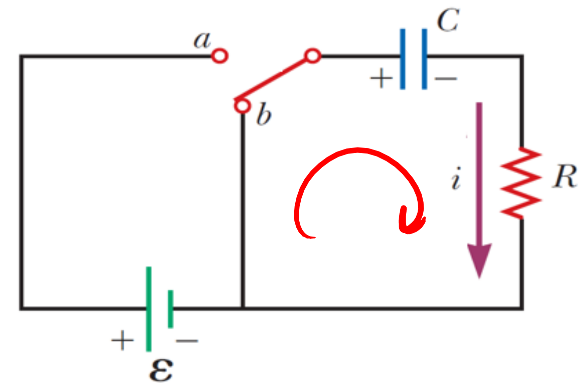
- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Έστω ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με κάποιο φορτίο Q_i
  - Στα άκρα του θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V = Q_i / C$$



  - Ο αντιστάτης έχει μηδενική διαφορά δυναμικού, αφού δεν υπάρχει πλέον ροή ρεύματος
  - Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$, κλείσουμε το διακόπτη στη θέση b, τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη
  - Έστω μια χρονική στιγμή t
    - Ο πυκνωτής θα έχει φορτίο q
    - Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι i

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Από το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα, έχουμε

$$\Delta V_{\pi\upsilon\kappa\nu} + \Delta V_{R} = 0 \leftrightarrow -\frac{q}{C} - iR = 0$$

  - Ξανά, θέτοντας $i = \frac{dq}{dt}$, έχουμε

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

  - Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{Q_i}^{q}\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_{0}^{t}dt \leftrightarrow \ln\left(\frac{q}{Q_i}\right) = -\frac{t}{RC}$$

  - Άρα

$$\boxed{q(t) = Q_i e^{-t/RC}}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC}$$

ως προς το χρόνο, έχουμε

$$\boxed{i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_i e^{-\frac{t}{RC}}}$$

  - Το παραπάνω αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε όταν ο πυκνωτής φορτιζόταν

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**

$$q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**

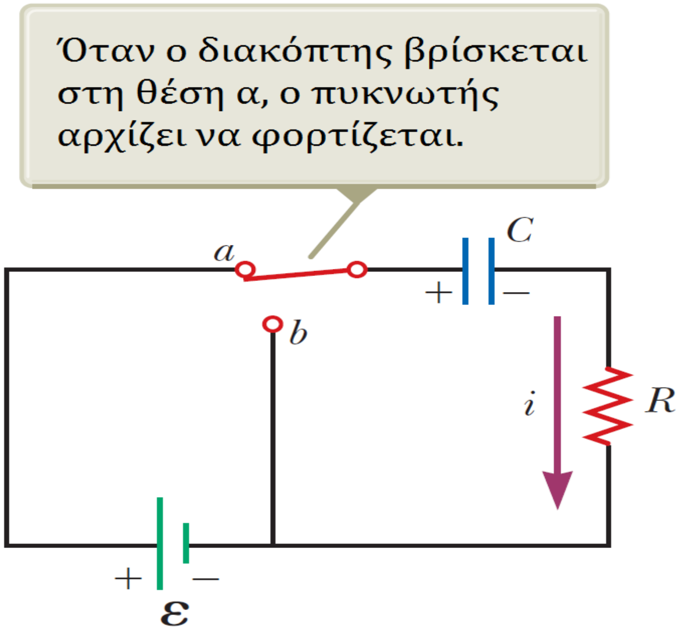
$$q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Όλα τα παραπάνω ορίζονται για t > 0

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
  - Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 12 V, C = 5 μF, και $R = 8 \times 10^5$ Ω. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση a. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 12 V, C = 5 μF, και $R = 8 \times 10^5$ Ω. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση a. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

$$\tau = RC = 8\cdot 10^{5}\cdot 5\cdot 10^{-6} = 40\cdot 10^{-1} = 4\ s$$

$$Q_{max} = C\mathcal{E} = 5\cdot 10^{-6}\cdot 12 = 60\cdot 10^{-6} = 60\ \mu C$$

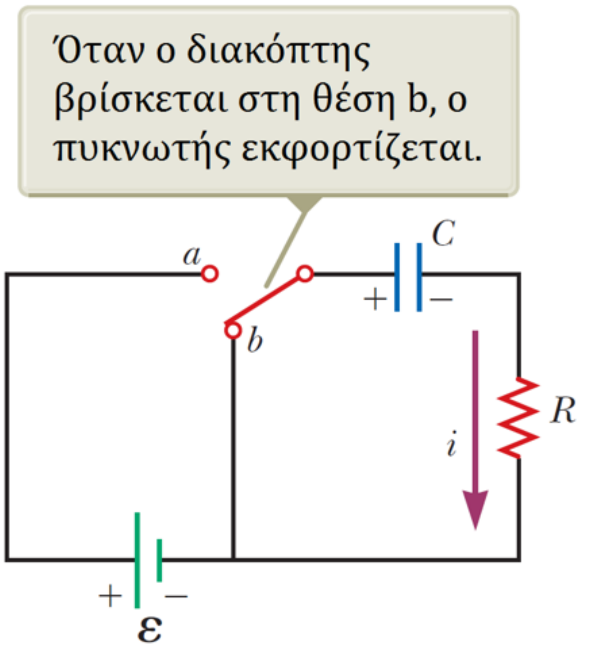
$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12}{8\cdot 10^{5}} = 15\ \mu A$$

$$q(t) = Q_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = (60\ \mu C)\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)$$

$$i(t) = I_{max}\, e^{-t/RC} = (15\ \mu A)\cdot e^{-t/4}.$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
    A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το ¼ της αρχικής του τιμής;
    B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το ¼ της αρχικής της τιμής;



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
    A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το ¼ της αρχικής του τιμής;

Ξέραμε $q(t) = Q_i \, e^{-\frac{t}{RC}}$, $RC = \tau$

Θέλαμε $Q_i \, e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{4} Q_i \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ln e^{-\frac{t}{\tau}} = \ln \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} \cancelto{1}{\ln e} = \cancelto{0}{\ln 1} - \ln 4 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = -\ln 4 \Leftrightarrow \boxed{t = \tau \cdot \ln 4}$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
    B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το ¼ της αρχικής της τιμής;

Ξέραμε $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$

$q(t) = Q_i e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{2C} Q_i^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$

$U_E(t) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{Q_i^2}{C}$ $\Bigg\} \Rightarrow \frac{1}{4}\cancel{\frac{1}{2}}\frac{\cancel{Q_i^2}}{\cancel{C}} = \frac{1}{\cancel{2C}}\cancel{Q_i^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 4}{2}\cdot\tau}$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας $C = 5\ \mu F$ φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού $\Delta V = 800\ V$ και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής?

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

$$\int_{c_1}^{c_2} e^{at}\,dt = \frac{1}{a} e^{at}\Big]_{c_1}^{c_2}$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C = 5 μF φορτίζεται υπό διαφορά δυναμικού ΔV = 800 V και μετά εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη. Πόση ενέργεια αποδίδεται στον αντιστάτη στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής?

Ξέραμε ότι $P_R = \frac{dE_R}{dt} \Rightarrow E_R = \int_0^{+\infty} P_R\,dt = \int_0^{+\infty} i^2 R\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{Q_i}{RC} e^{-t/RC}\right)^2 R\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{Q_i^2}{R^{\cancel{2}}C^2} e^{-2t/RC}\cdot \cancel{R}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{Q_i^2}{RC^2} e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{Q_i^2}{RC^2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{Q_i^2}{RC^2}\,\frac{1}{-\frac{2}{RC}}\, e^{-\frac{2t}{RC}}\Big]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{Q_i^2}{\cancel{R}C^{\cancel{2}}}\,\frac{\cancel{RC}}{2}\left(-e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big]_0^{+\infty} = \frac{Q_i^2}{2C}\left(-\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}}^{\,0} + 1\right) = \frac{Q_i^2}{2C}.$$

$$\mathcal{E} = \frac{Q_i}{C}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2.$$

Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός

Μαγνητικά Πεδία

Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός

Μαγνητικά Πεδία

Μαγνητισμός

- **Εισαγωγή**
  - Πυξίδα: Κίνα, 13ος αιώνας π.Χ.
    - Εφεύρεση από Άραβες ή Ινδούς
  - Μαγνητισμός: Ελλάδα, 800 π.Χ.
    - Ο θρύλος λέει ότι ο μαγνητίτης πήρε το όνομά του από το βοσκό Μάγνη, του οποίου τα καρφιά από τα παπούτσια και η μύτη του μπαστουνιού μπορούσαν να έλξουν κομμάτια μαγνητίτη
  - 1269: Pierre de Maricout – μαγνητικοί πόλοι
  - 1600: William Gilbert – πρότεινε ότι η Γη είναι ένας μεγάλος μαγνήτης
  - 1819: Oersted – σχέση ηλεκτρισμού-μαγνητισμού
  - 1820: Faraday, Henry - --------------»-------------------

Εικόνα: Το Σέλας συμβαίνει όταν υψηλής ενέργειας, φορτισμένα σωματίδια από τον Ήλιο ταξιδεύουν στην άνω ατμόσφαιρα της Γης λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού της πεδίου.

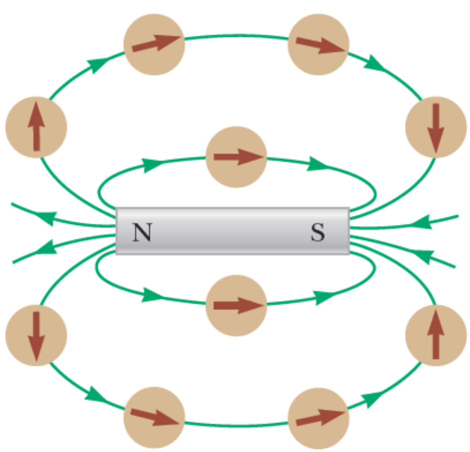
Φυσική για Μηχανικούς

Μαγνητισμός

Μαγνητικά Πεδία

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Στον ηλεκτρισμό, περιγράψαμε τις σχέσεις μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων με όρους ηλεκτρικών πεδίων
    - Αγνοήσαμε το ***μαγνητικό πεδίο*** που περιέχεται σε ένα χώρο ενός *κινούμενου* φορτίου!
  - Στο μαγνητικό πεδίο, το σύμβολο $\vec{B}$ έχει καθιερωθεί για την αναπαράστασή του
    - Η κατεύθυνσή του σε οποιαδήποτε τοποθεσία είναι η κατεύθυνση που θα έδειχνε μια πυξίδα
    - Όπως και στον ηλεκτρισμό, το μαγνητικό πεδίο μπορεί να αναπαρασταθεί με *μαγνητικές γραμμές*



Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου μετρώντας τη μαγνητική δύναμη $\vec{\mathrm{F}}_B$ επάνω σε ένα σωματίδιο που βρίσκεται στο σημείο εκείνο
    - Όπως κάναμε στον ηλεκτρισμό!
  - Τα αποτελέσματα είναι:
    1. Η μαγνητική δύναμη είναι ανάλογη του φορτίου q
    2. Η μαγνητική δύναμη για ένα αρνητικό φορτίο είναι αντίθετης κατεύθυνσης από αυτή ενός θετικού φορτίου που κινείται προς την ίδια κατεύθυνση
    3. Η μαγνητική δύναμη είναι ανάλογη του μέτρου του διανύσματος μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$

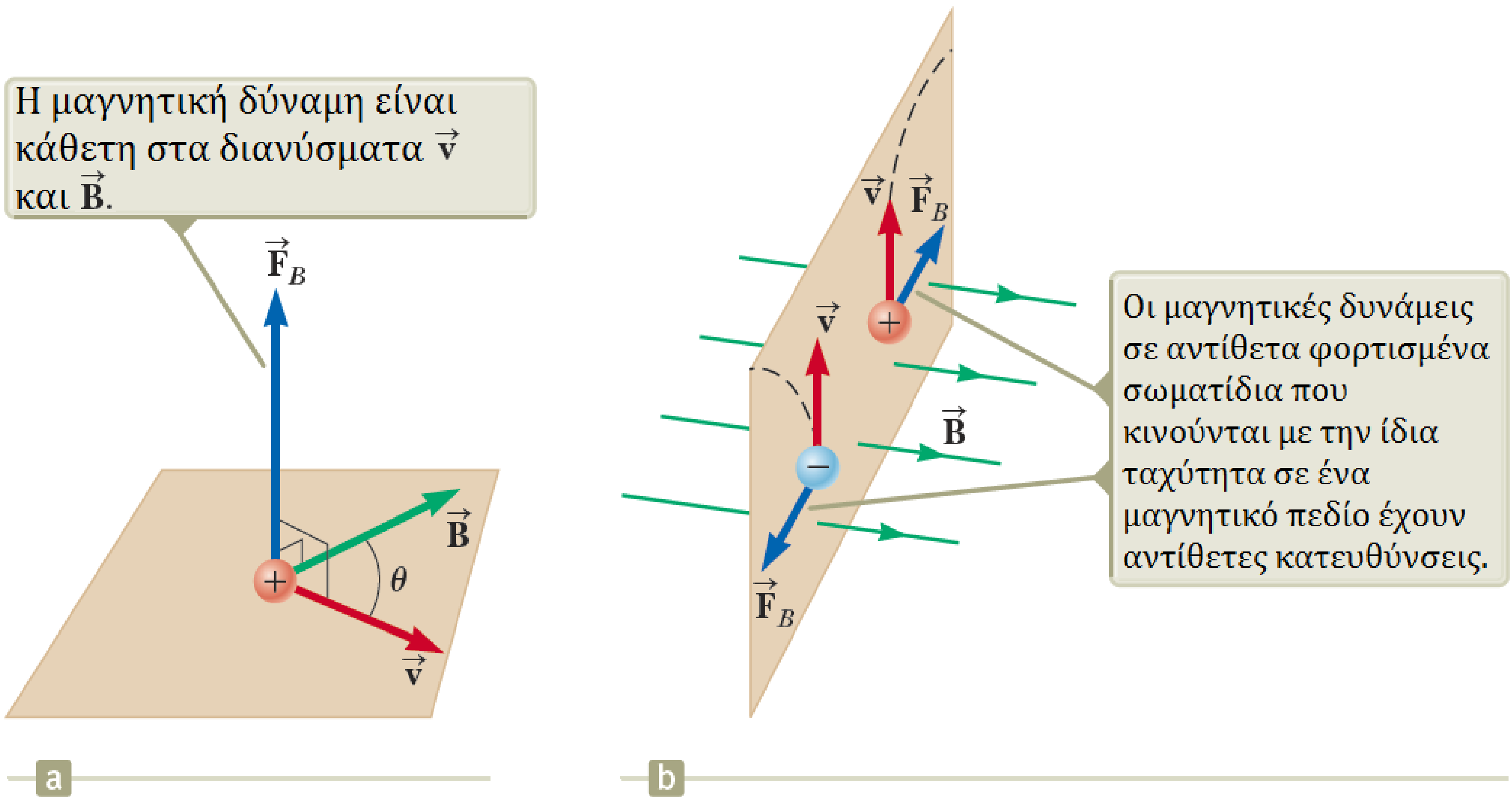
Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Μαζί με τα προηγούμενα όμως, παρατηρούμε (με έκπληξη!) τα ακόλουθα:

1. Η μαγνητική δύναμη είναι ανάλογη με την ταχύτητα $\vec{v}$ του σωματιδίου
2. Αν το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία θ με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου, το μέτρο της μαγνητικής δύναμης είναι ανάλογο του $\sin(\theta)$
3. Όταν το σωματίδιο κινείται παράλληλα με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου, η μαγνητική δύναμη είναι μηδέν
4. Η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο που δημιουργούν τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{v}$

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Αν μη τι άλλο, τα προηγούμενα δείχνουν ότι η μαγνητική δύναμη είναι πιο πολύπλοκη από την ηλεκτρική



Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Παρ’ όλα αυτά, μπορούμε να περιγράψουμε τη μαγνητική δύναμη με τη σχέση

$$\boxed{\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

  - Η σχέση αυτή ονομάζεται ***εξωτερικό γινόμενο*** των διανυσμάτων $\vec{v}, \vec{B}$
  - Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα!
    - Όχι αριθμός, όπως το εσωτερικό γινόμενο!
  - Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης ισούται με

$$\boxed{\mathrm{F}_B = |q|vB\sin(\theta)}$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\vec{v}, \vec{B}$

Μαγνητικά Πεδία

- **Εξωτερικό Γινόμενο**
  - Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εξωτερικό τους γινόμενο είναι ένα διάνυσμα που δίνεται ως

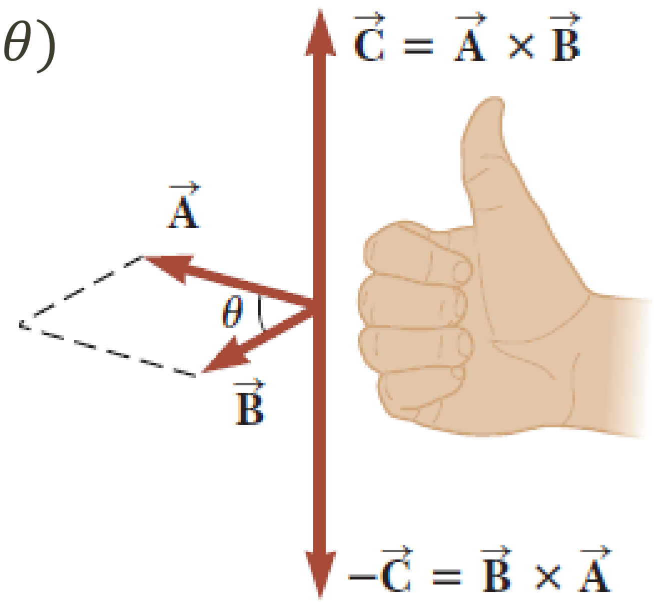
$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

  - Το μέτρο του είναι

$$|\vec{\mathrm{C}}| = |\vec{\mathrm{A}}||\vec{\mathrm{B}}| \sin(\theta)$$

με θ τη γωνία μεταξύ των $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}$

  - Το διάνυσμα $\vec{\mathrm{C}}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}$
  - Φορά: κανόνας δεξιού χεριού



Μαγνητικά Πεδία

- **Εξωτερικό Γινόμενο - Ιδιότητες**

  - (Μη-)αντιμεταθετικότητα

    $$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

  - $\vec{\mathbf{A}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{B}} \rightarrow \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$
  - $\vec{\mathbf{A}}$ κάθετο $\vec{\mathbf{B}} \rightarrow \left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \; \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\,1}$
  - Επιμεριστικότητα

    $$\vec{\mathbf{A}} \times \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

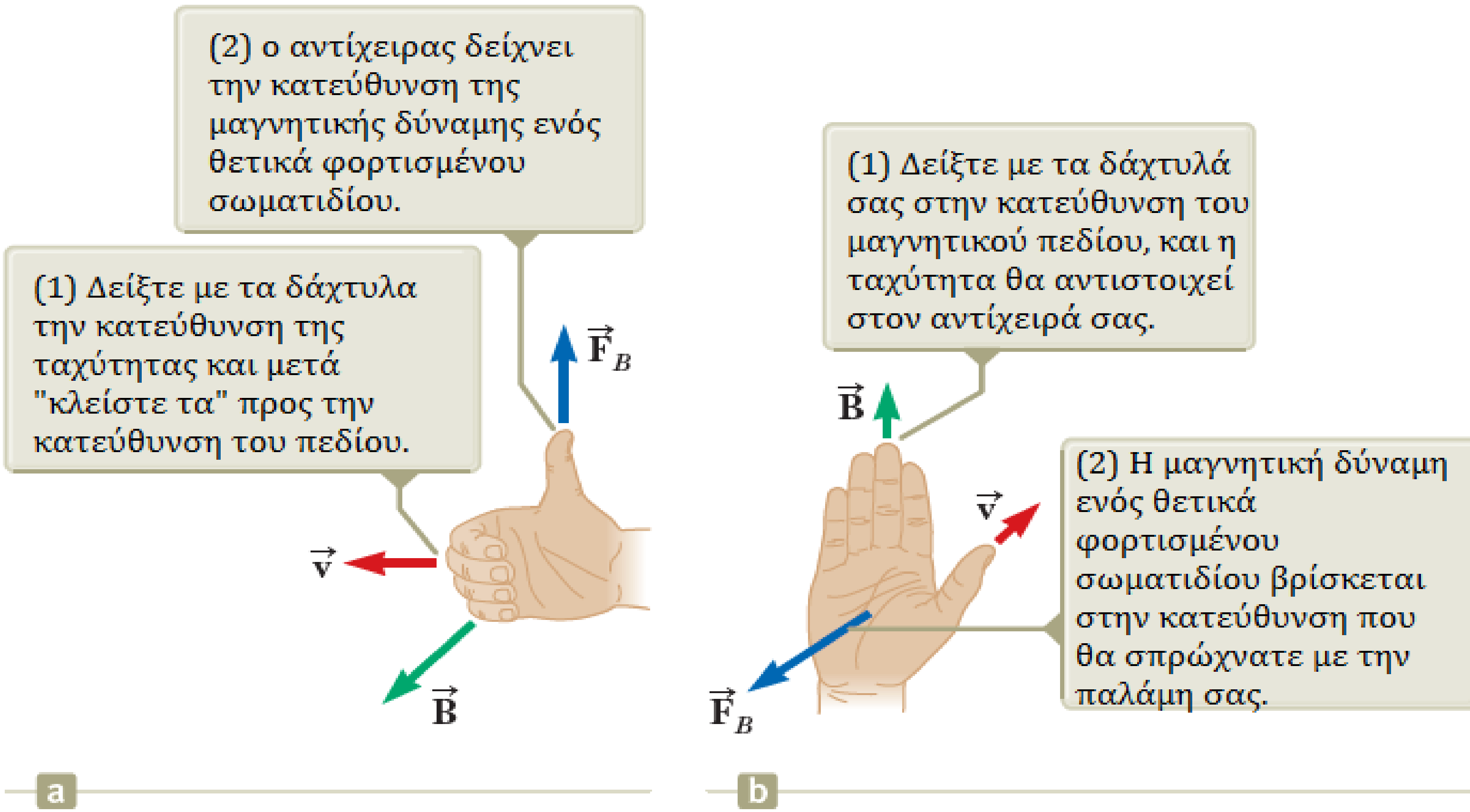
  - Μοναδιαία διανύσματα

    $$\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$$

  - Επίσης $-\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} \times \left(-\vec{\mathbf{B}}\right) = \left(-\vec{\mathbf{A}}\right) \times \vec{\mathbf{B}}$

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Κανόνες δεξιού χεριού για μαγνητικά πεδία



Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία – Ηλεκτρικά Πεδία : Σύγκριση**

1. > Η ηλεκτρική δύναμη εγείρεται κατά την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου
   > Η μαγνητική δύναμη εγείρεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο
2. > Η ηλεκτρική δύναμη ασκείται σε φορτισμένο σωματίδιο άσχετα με την ταχύτητά του
   > Η μαγνητική δύναμη ασκείται σε φορτίο μόνο όταν αυτό κινείται
3. > Η ηλεκτρική δύναμη παράγει έργο μετατοπίζοντας ένα φορτισμένο σωματίδιο
   > Η μαγνητική δύναμη που σχετίζεται με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο ΔΕΝ παράγει έργο κατά τη μετατόπιση του φορτίου, αφού η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση!

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**

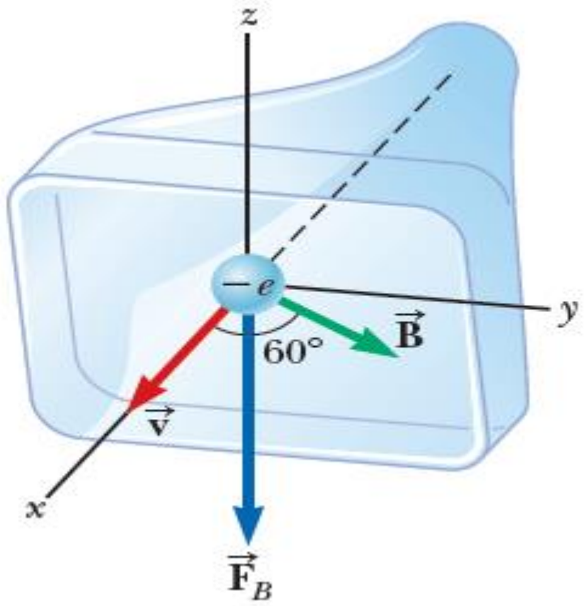
- Η 3η παρατήρηση μας πληροφορεί για κάτι πολύ σημαντικό:
  - Η κινητική ενέργεια ενός φορτισμένου σωματιδίου που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να αλλάξει από το μαγνητικό πεδίο (μόνο)
  - Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να αλλάξει την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας αλλά δεν μπορεί να αλλάξει το μέτρο της ή την κινητική ενέργειά του

- Μονάδα μέτρησης του μαγνητικού πεδίου:

$$N/(Cm/s) = T \text{ (Tesla)}$$

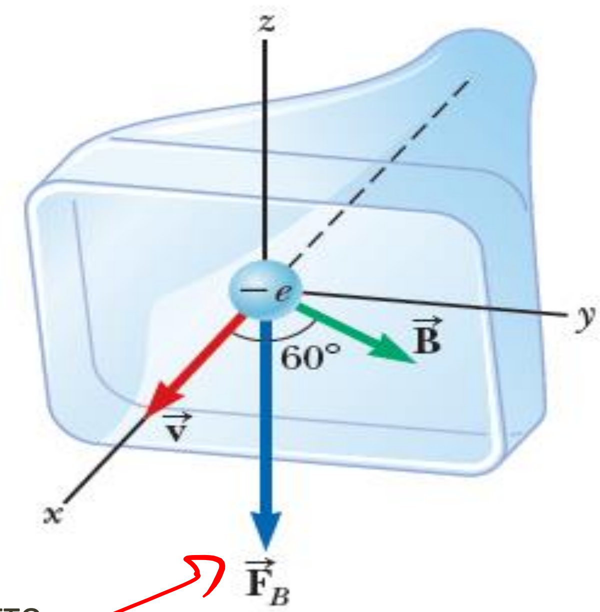
Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα ηλεκτρόνιο σε μια παλαιά τηλεόραση καθοδικού σωλήνα κινείται προς το μπροστινό μέρος του σωλήνα με ταχύτητα 8×10^6 m/s κατά μήκος του άξονα x (Σχήμα). Γύρω από το σωλήνα βρίσκονται σπείρες από καλώδια που δημιουργούν μαγνητικά πεδία μέτρου 0.025 T, υπό γωνία 60 μοιρών με τον άξονα x και το διάνυσμα του μέτρου αυτού κείται στο xy επίπεδο. Βρείτε τη μαγνητική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο.



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα ηλεκτρόνιο σε μια παλαιά τηλεόραση καθοδικού σωλήνα κινείται προς το μπροστινό μέρος του σωλήνα με ταχύτητα 8×10^6 m/s κατά μήκος του άξονα x (Σχήμα). Γύρω από το σωλήνα βρίσκονται σπείρες από καλώδια που δημιουργούν μαγνητικά πεδία μέτρου 0.025 T, υπό γωνία 60 μοιρών με τον άξονα x και το διάνυσμα του μέτρου αυτού κείται στο xy επίπεδο. Βρείτε τη μαγνητική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο.



Το διάνυσμα $\vec{F}_B$ είναι όπως στο Σχήμα (από κανόνα δεξιού χεριού).

Το μέτρο $|\vec{F}_B| = |q| u \cdot B \cdot \sin(\theta)$, με θ τη γωνία μεταξύ $\vec{u}, \vec{B}$.

Άρα

$$|\vec{F}_B| = (1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot 8 \cdot 10^{6} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(60^\circ) = 2.8 \cdot 10^{-14}\ \text{N}$$

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**

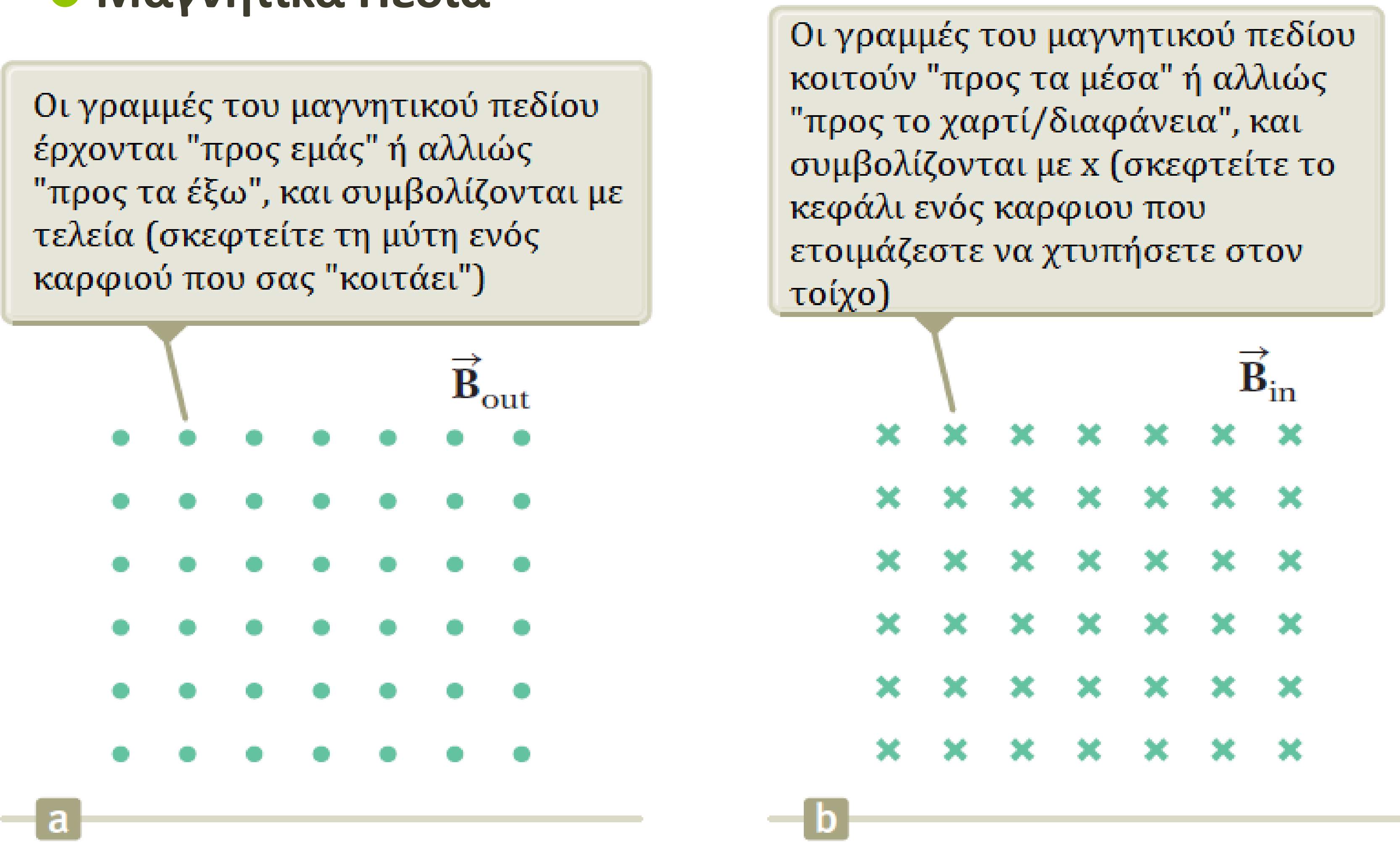
  - Ας μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου

  - Πολλές φορές το μαγνητικό πεδίο βολεύει να σχεδιάζεται κάθετα στη σελίδα (στη διαφάνεια)

  - Υιοθετούμε τα σχέδια που ακολουθούν

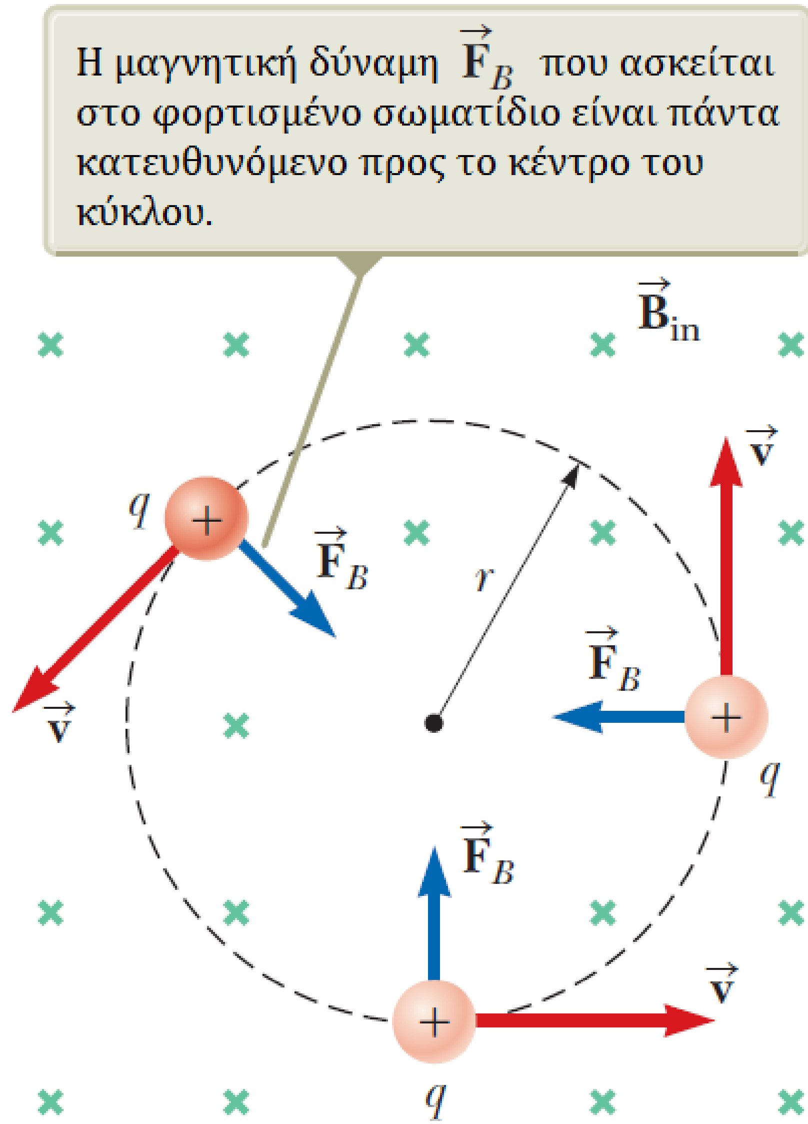
Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**



Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Έστω ένα θετικό φορτίο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο
  - Η αρχική του ταχύτητα είναι *κάθετη στο πεδίο*
  - Η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη επίπεδο που σχη-ματίζουν τα διανύσματα της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου
    - Σε κάθε χρονική στιγμή
  - Εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση! ☺



Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης είναι

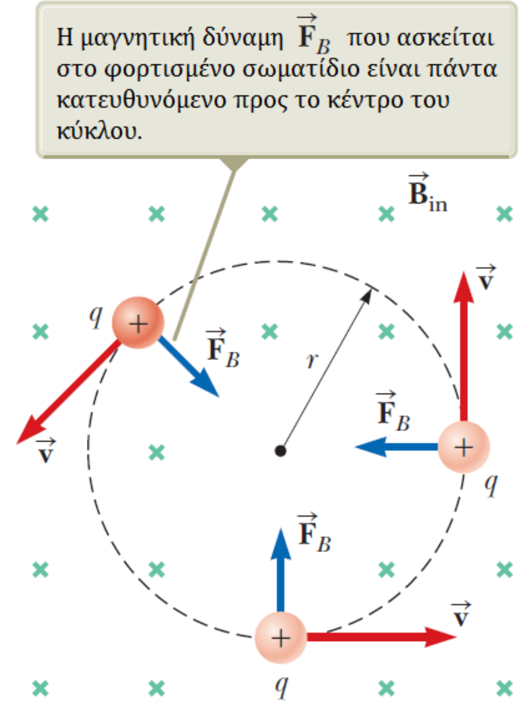
$$F_B = qvB$$

  - Από το 2ο ν. Newton:

$$\sum F = F_B = ma$$

  - Λόγω κυκλικής κίνησης, έχουμε $a = \frac{v^2}{r}$, με r την ακτίνα του κύκλου
  - Άρα

$$r = \frac{mv}{qB}$$



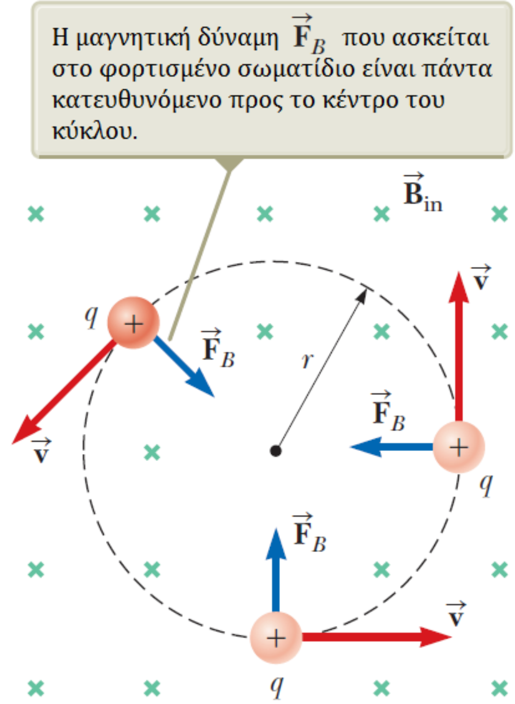
Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

  - Περίοδος

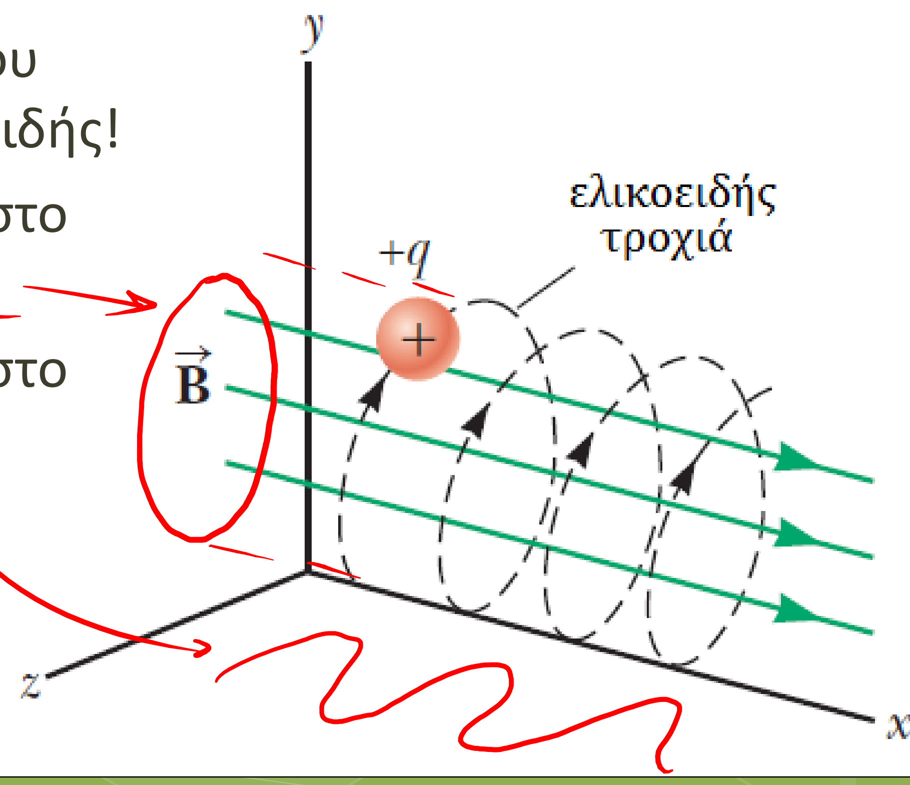
$$\mathrm{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$



- Τα παραπάνω μας πληροφορούν ότι η γωνιακή ταχύτητα και η περίοδος της κίνησης:
  - ΔΕΝ εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου
  - ΔΕΝ εξαρτάται από την ακτίνα της τροχιάς του

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά Πεδία**
  - Στο παράδειγμα που μόλις μελετήσαμε, η ταχύτητα ήταν κάθετη στο πεδίο
  - Αν η γωνία μεταξύ τους είναι τυχαία, η τροχιά του σωματιδίου είναι ελικοειδής!
  - Η προβολή της τροχιάς στο zy επίπεδο είναι κύκλος
  - Η προβολή της τροχιάς στο xy είναι ημιτονοειδής
    - Το ίδιο και στο xz



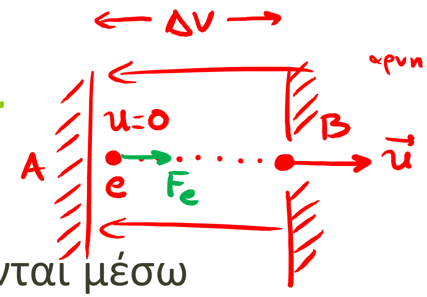
Μαγνητικά Πεδία

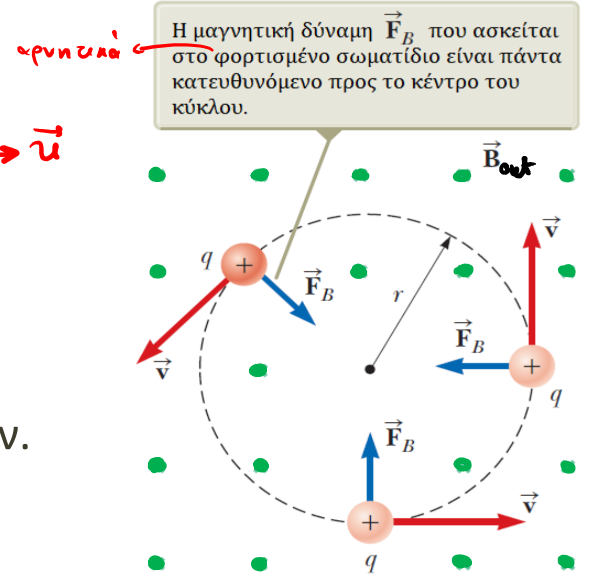
- **Παράδειγμα:**
- Σε ένα πείραμα μέτρησης του μέτρου ενός ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου, ακίνητα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσω διαφοράς δυναμικού ΔV=350 V και μετά εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Τα ηλεκτρόνια ταξιδεύουν σε κυκλικό μονοπάτι λόγω της μαγνητικής δύναμης. Η ακτίνα του μονοπατιού είναι $r = 0.075$ m.

  A) Ποιο είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου;

  B) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα των ηλεκτρονίων;

Μαγνητικά Πεδία





- **Παράδειγμα:**
- Ακίνητα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσω διαφοράς δυναμικού ΔV=350 V, εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Η ακτίνα του μονοπατιού είναι $r = 0.075$ m.
  Α) Ποιο είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου;

Ξέρουμε ότι $r = \frac{m_e u}{qB} \Rightarrow B = \frac{m_e u}{rq}$?

$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
$q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$\boxed{\text{ΘΜΚΕ}_{A\to B}}$: $\Delta K^{A\to B} = W_{F_e}^{A\to B} \Leftrightarrow K_B - K_A = W_{F_e}^{A\to B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_e u_B^2 - 0 = \boxed{-\Delta U^{A\to B}} = -q\Delta V \Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{-2q\Delta V}{m_e}} = 1.11 \times 10^7 \frac{m}{s}$

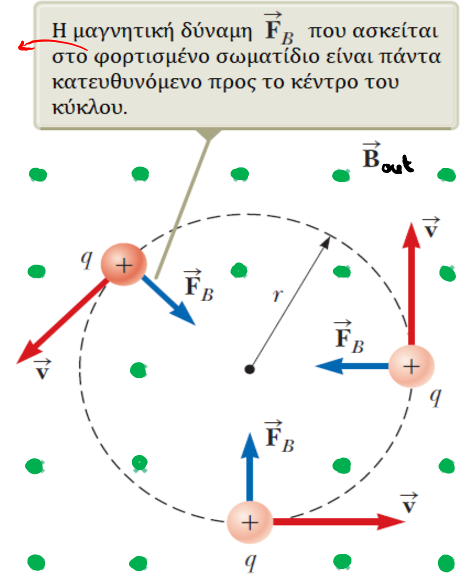
Άρα το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θα έχει μέτρο $B = \frac{m_e \cdot u_B}{rq} = 8.4 \cdot 10^4$ T

Αφού βάλαμε στο παιχνίδι τη δυναμική ενέργεια, τεχνικά το σύστημά μας δεν είναι το φορτίο αλλά το φορτίο και το ηλεκτρ. πεδίο. 'Ετσι, δεν εφαρμόσαμε ΘΜΚΕ όπως αρχικά επιχειρήσαμε, αλλά ΑΔΕ ή ΑΔΜΕ

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Ακίνητα ηλεκτρόνια επιταχύνονται μέσω διαφοράς δυναμικού ΔV=350 V, εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο που έχει διεύθυνση κάθετη στο διάνυσμα ταχύτητας των ηλεκτρονίων. Η ακτίνα του μονοπατιού είναι $r = 0.075$ m.
  Β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα των ηλεκτρονίων;

αρνητικά



Γνωρίζαμε ότι $\omega = \frac{u}{r} = \frac{1.11 \cdot 10^7}{0.075} \cong 1.5 \cdot 10^8 \, \frac{rad}{s}$

(ίδιο αποτέλεσμα και με $\omega = \frac{qB}{m_e}$).

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητικά και Ηλεκτρικά Πεδία**

  - Είναι πολύ σύνηθες στις εφαρμογές να υπάρχει φορτισμένο σωματίδιο εντός ηλεκτρικού **και** μαγνητικού πεδίου

  - Η συνολική δύναμη που του ασκείται είναι

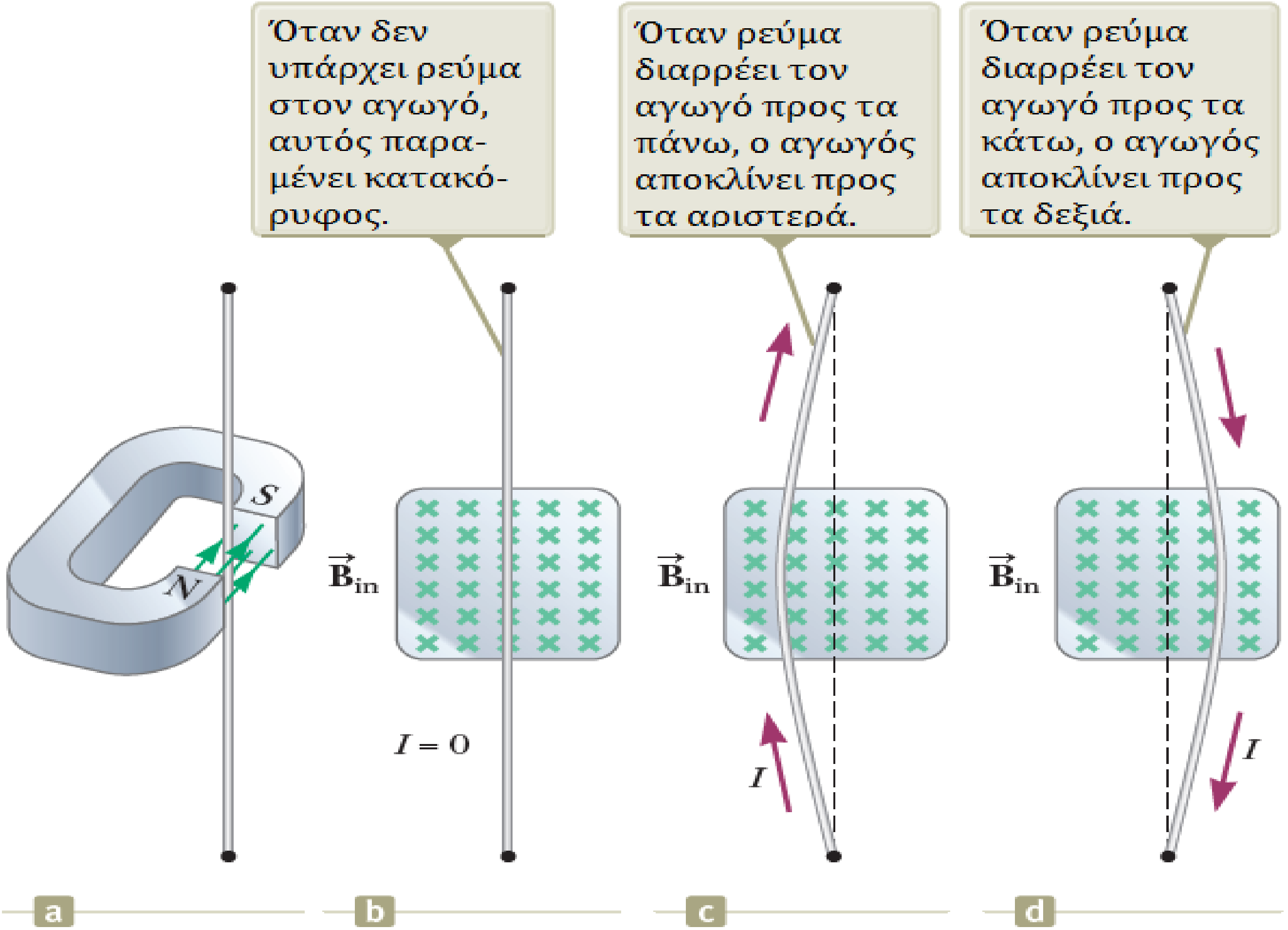
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**
  - Από όλη τη συζήτηση που προηγήθηκε, δεν πρέπει να μας εκπλήξει ότι ένας ρευματοφόρος αγωγός υπόκειται σε δύναμη εντός μαγνητικού πεδίου
    - Θυμηθείτε ότι το ρεύμα είναι μια «συλλογή» πολλών φορτισμένων σωματιδίων εν κινήσει
  - Η δύναμη αυτή θα είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε φορτισμένο σωματίδιο που συνεισφέρει στο ρεύμα
  - Η δύναμη αυτή μεταδίδεται στον αγωγό όταν τα φορτισμένα σωματίδια συγκρούονται με τα άτομα του αγωγού

Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**

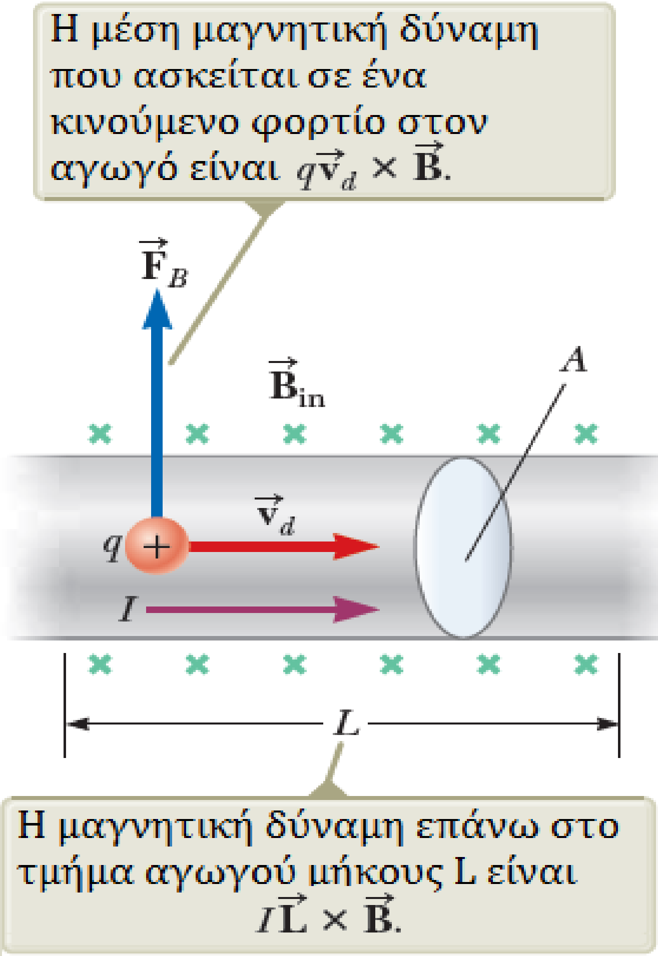


Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**
  - Ας ποσοτικοποιήσουμε το προηγούμενο πείραμα
  - Έστω ένα τμήμα αγωγού μήκους L και διατομής A (Σχήμα)
  - Για κάθε φορτίο q, η μαγνητική δύναμη που του ασκείται είναι:

$$\vec{F}_B = \left(q\vec{v}_d \times \vec{B}\right)$$

  - Πόσα φορτία βρίσκονται στον αγωγό;
    - Όγκος αγωγού: AL
    - Πλήθος σωματιδίων/μονάδα όγκου: n
    - Πλήθος σωματιδίων στον αγωγό: nAL



Μαγνητικά Πεδία

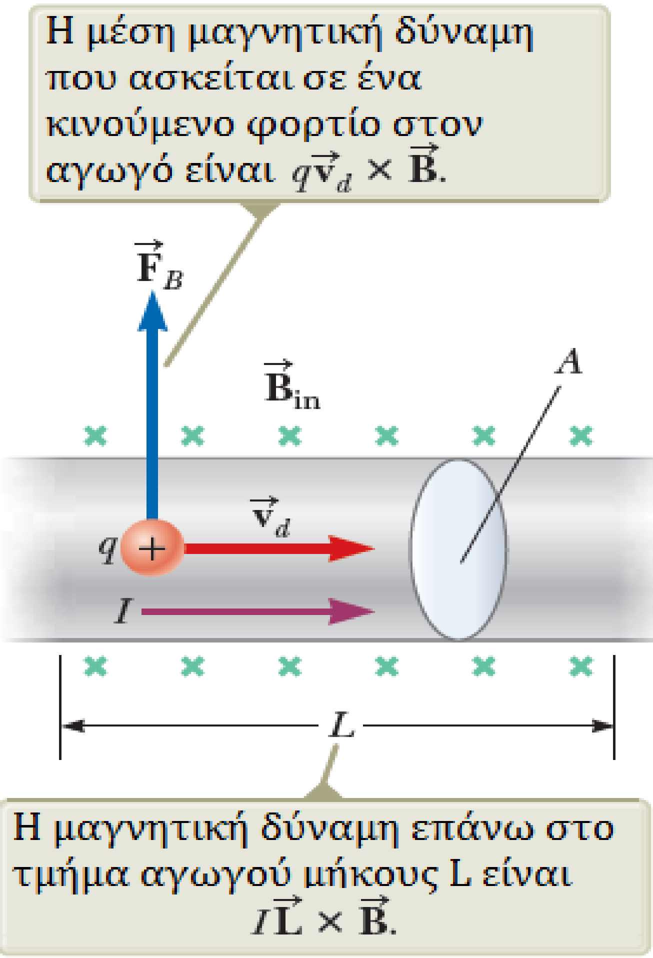
- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**
  - Συνολική μαγνητική δύναμη?
  - Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το ρεύμα δίνεται ως

$$I = nqv_dA$$

  - Συνολικά

$$\vec{F}_{B_{tot}} = nAL(q\,\vec{v}_d \times \vec{B}) = (I\vec{L} \times \vec{B})$$

με $\vec{L}$ το διάνυσμα που δείχνει στην κατεύθυνση του ρεύματος και έχει μέτρο ίσο με το μήκος του αγωγού, L



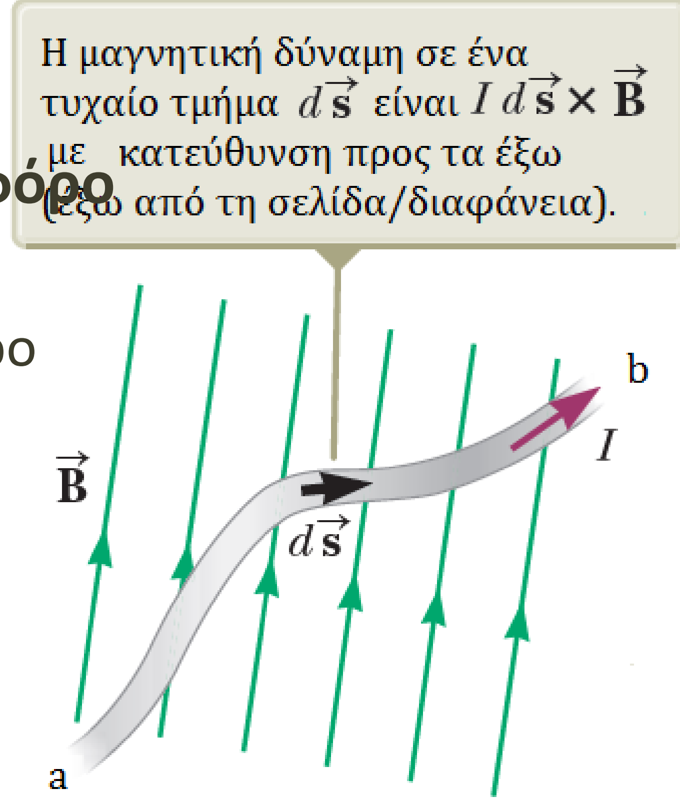
Μαγνητικά Πεδία

- **Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό**
  - Τι συμβαίνει σε έναν ρευματοφόρο αγωγό τυχαίου σχήματος;
  - Έστω ένα πολύ μικρό τμήμα αγωγού μήκους ds
  - Τότε η (πολύ μικρή) μαγνητική δύναμη που εγείρεται σε αυτό το τμήμα είναι

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

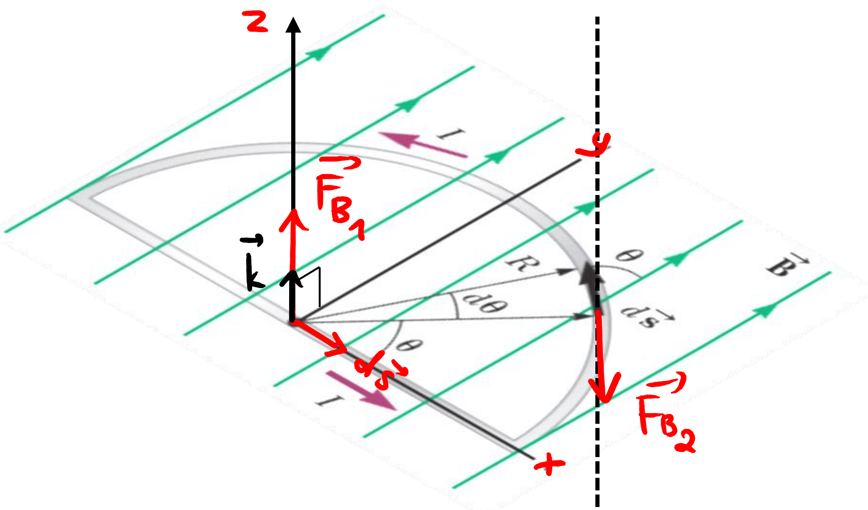
  - Συνολικά

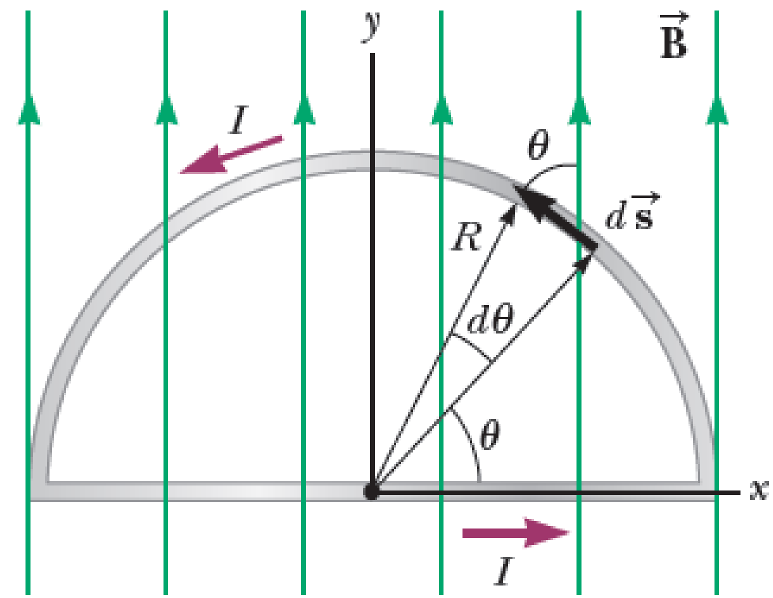
$$\boxed{\vec{F}_B = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}}$$



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy (Σχήμα). Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
  A) ευθύγραμμο τμήμα
  B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου

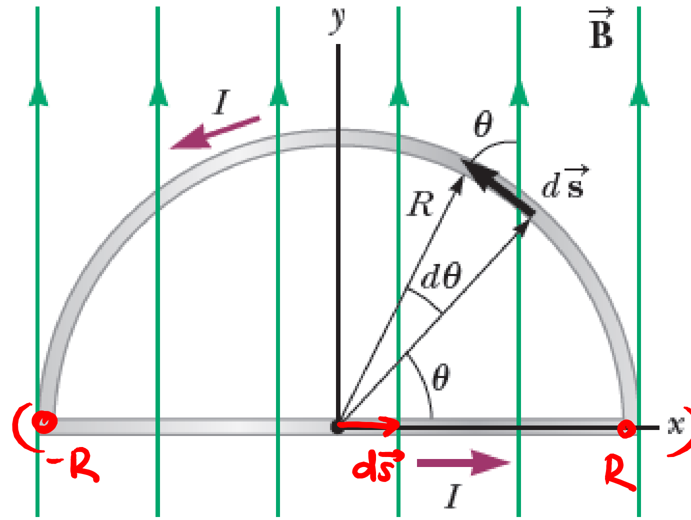




Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
  Α) ευθύγραμμο τμήμα



Γνωρίζουμε ότι $d\vec{F}_{B_1} = I\cdot d\vec{s}\times\vec{B} \Rightarrow dF_{B_1} = I\cdot ds\cdot B\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = I\cdot ds\cdot B$

$$= I\cdot dx\cdot B \quad (1)$$

Για όλον τον ευθύγραμμο αγωγό, θα είναι $\vec{F}_{B_1} = \int d\vec{F}_{B_1} \Rightarrow F_{B_1} = \int dF_{B_1} =$

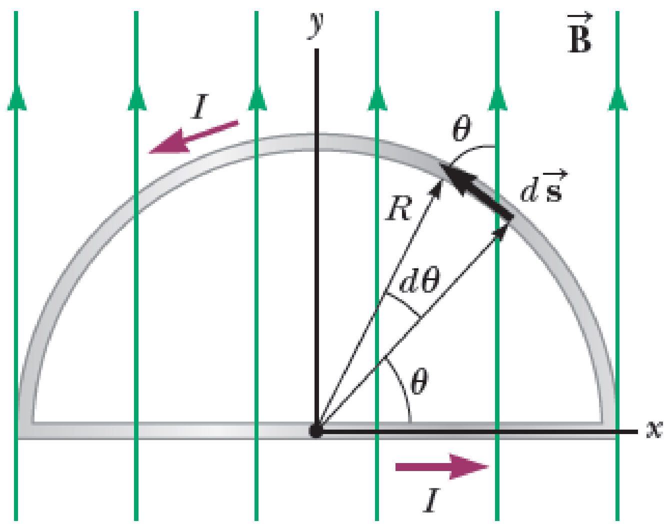
$$\overset{(1)}{=} \int I\cdot dx\cdot B = IB\int_{-R}^{R} dx = IBx\Big]_{-R}^{R} = IB(R-(-R)) = 2IBR.$$

Οπότε συνολικά, $\vec{F}_{B_1} = 2IBR\cdot\vec{k}$, με $\vec{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα του z.

Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
  B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου



Γνωρίζουμε ότι $d\vec{F}_{B_2} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \Rightarrow dF_{B_2} = I \cdot ds \cdot B \cdot \sin\theta$

Συνολικά, $\vec{F}_{B_2} = \int d\vec{F}_{B_2} \Rightarrow F_{B_2} = \int dF_{B_2} = \int I\, ds\, B \sin\theta$

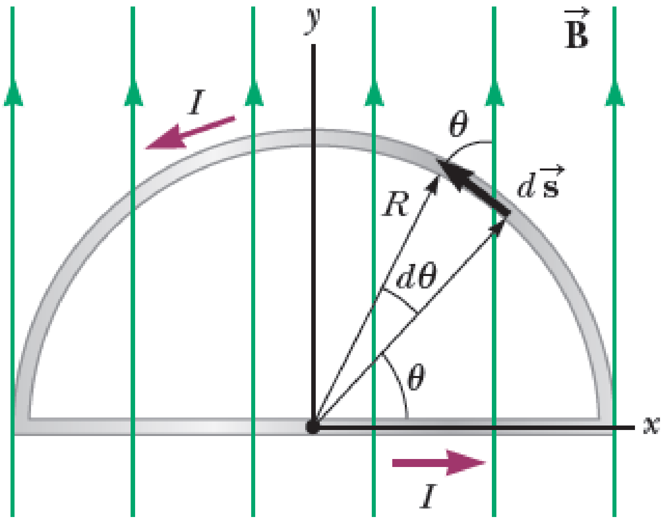
$$\left.\begin{array}{l} = IB \int ds \cdot \sin\theta \\ s = R\theta \end{array}\right\} = IB \int R\, d\theta \cdot \sin\theta = IBR \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta = IBR(-\cos\theta)\Big]_0^{\pi} =$$

$$= IBR\left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) = IBR(1+1) = 2IBR$$

Άρα $\vec{F}_{B_2} = -2IBR \cdot \vec{k}$.

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα καλώδιο λυγίζει σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R και σχηματίζει κλειστό βρόχο ρεύματος I. Το καλώδιο κείται στο επίπεδο xy. Μαγνητικό πεδίο μέτρου B δημιουργείται κατά μήκος του άξονα y. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο
    B) καμπύλο τμήμα του καλωδίου



Παρατηρήσεις:

1. $|\vec{F}_{B_1}| = |\vec{F}_{B_2}|$ **: η μαγνητική δύναμη σε καμπύλο ρευματοφόρο αγωγό εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου είναι ίδια σε μέτρο με αυτή ενός ευθύγραμμου αγωγού ανάμεσα στα ίδια άκρα.**
2. $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}_1} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}_2} = 0$ **: η συνολική μαγνητική δύναμη επάνω σε κλειστό βρόχο ρεύματος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική.**

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Ως τώρα θεωρήσαμε ότι το μαγνητικό πεδίο «υπήρξε με κάποιο τρόπο»
- Στη συνέχεια θα δείξουμε την προέλευση του μαγνητικού πεδίου: τα κινούμενα φορτία (!)
- Πολλοί σημαντικοί νόμοι:
  - Νόμος των Biot-Savart
  - Νόμος του Ampere
  - Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό
- Θα αξιοποιήσουμε ξανά τις συμμετρίες των προβλημάτων

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Jean-Baptiste Biot – Felix Savart : περιέγραψαν τη δύναμη που εγείρεται από ηλεκτρικό ρεύμα επάνω σε έναν κοντινό μαγνήτη
- Τα πειράματά τους κατέληξαν σε μια μαθηματική έκφραση που δίνει το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου με όρους του ρεύματος, το οποίο παράγει το πεδίο (!)
- Ξεκίνησαν από ένα απειροστά μικρό τμήμα ds καλωδίου σταθερού ρεύματος που παράγει μαγνητικό πεδίο dB σε ένα σημείο P
  - Έχουμε ακολουθήσει τη μέθοδό τους πολλές φορές ☺

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Επιγραμματικά, έδειξαν ότι:
  1. Το διάνυσμα $\mathrm{d}\vec{B}$ είναι κάθετο τόσο στο $\mathrm{d}\vec{s}$ (που δείχνει στην κατεύθυνση του ρεύματος) όσο και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\mathbf{r}}$ που κατευθύνεται από το $\mathrm{d}\vec{s}$ στο σημείο P
  2. Το μέτρο του $\mathrm{d}\vec{B}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του r^2, με r την απόσταση από το $\mathrm{d}\vec{s}$ στο P
  3. Το μέτρο του $\mathrm{d}\vec{B}$ είναι ανάλογο του ρεύματος I και του μέτρου ds του τμήματος μήκους $\mathrm{d}\vec{s}$
  4. Το μέτρο του $\mathrm{d}\vec{B}$ είναι ανάλογο του $\sin(\theta)$, με ϑ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathrm{d}\vec{s}$ και $\vec{\mathbf{r}}$

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2}}$$

- Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο ***νόμος των Biot-Savart***
- Το μ_0 ονομάζεται *διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου* και έχει τιμή $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Tm/A
- Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση για την εύρεση του συνολικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε ένα σημείο του χώρου από ένα ρεύμα πεπερασμένου μεγέθους, πρέπει να αθροίσουμε όλα τα $d\vec{B}$.

Μαγνητικά Πεδία

- **Πηγές Μαγνητικού Πεδίου**
- Ολοκληρώνοντας λοιπόν, έχουμε

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^2}}$$

με το ολοκλήρωμα να λαμβάνεται σε όλη την κατανομή ρεύματος

- Ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις και στη συνέχεια μερικά παραδείγματα.

Μαγνητικά Πεδία

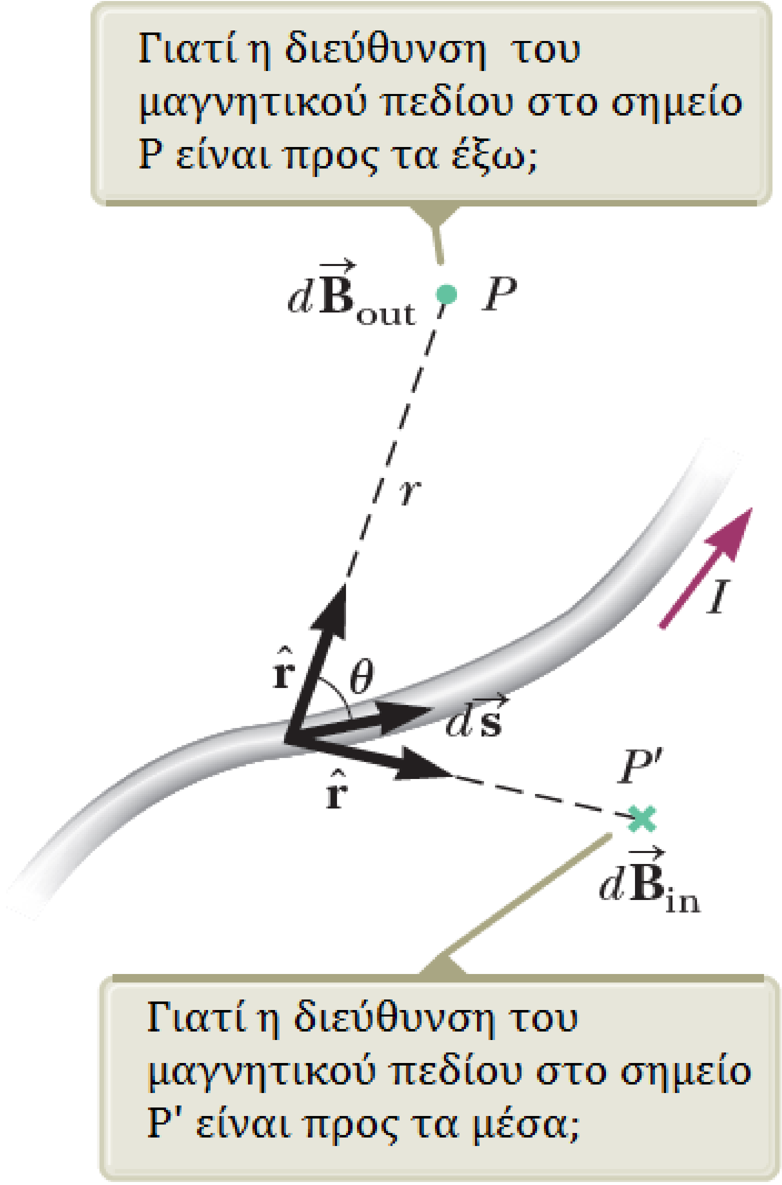
- Ας περιγράψουμε τις (ενδιαφέρουσες) ομοιότητες και διαφορές μεταξύ μαγνητικού πεδίου «σημειακού ρεύματος» και ηλεκτρικού πεδίου σημειακού φορτίου

1. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο P είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r από αυτό. Το ίδιο συνέβαινε και στο ηλεκτρικό πεδίο.
2. Οι κατευθύνσεις των πεδίων είναι πολύ διαφορετικές:
   a) Ηλεκτρικό πεδίο: ακτινική διεύθυνση
   b) Μαγνητικό πεδίο: κάθετο στο «σημειακό ρεύμα» και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\mathbf{r}}$ που «δείχνει» προς το σημείο P
3. Ένα «σημειακό ρεύμα» δεν έχει τόσο νόημα όσο ένα σημειακό φορτίο
   - Απαιτείται κύκλωμα για να υπάρχει ρεύμα

Μαγνητικά Πεδία

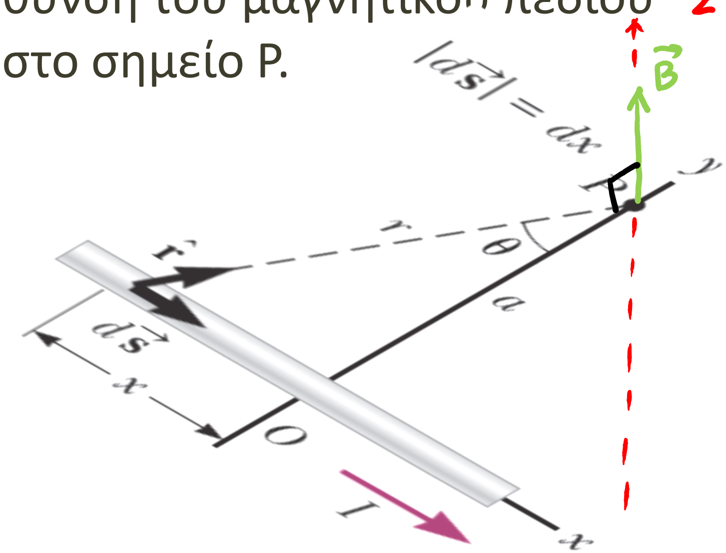
- Βρείτε το διάνυσμα $d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{r}}$ στα δυο σημεία!

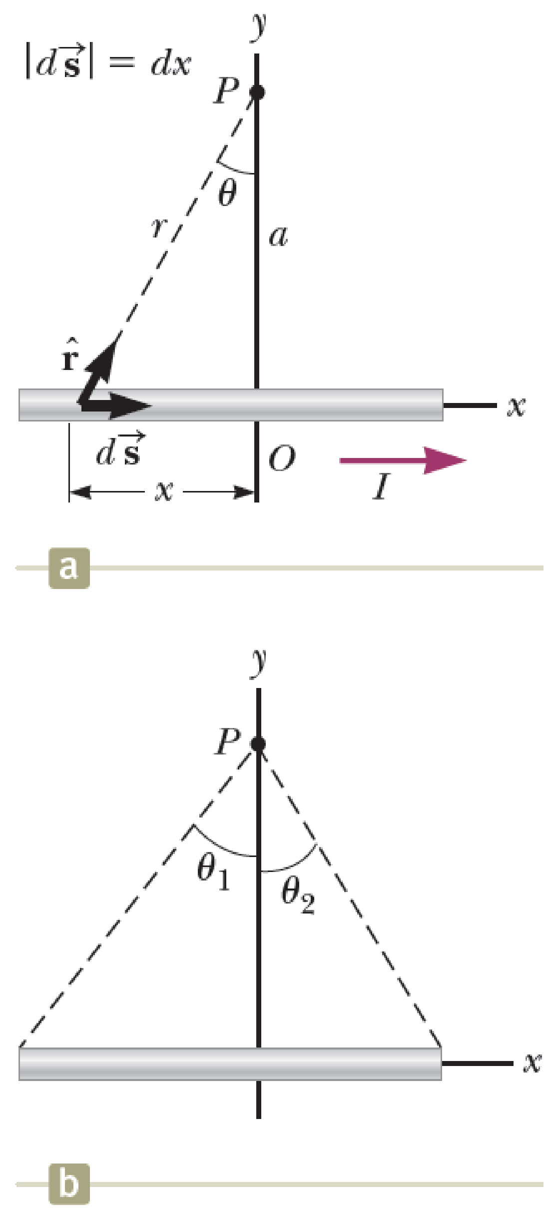
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$



Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.

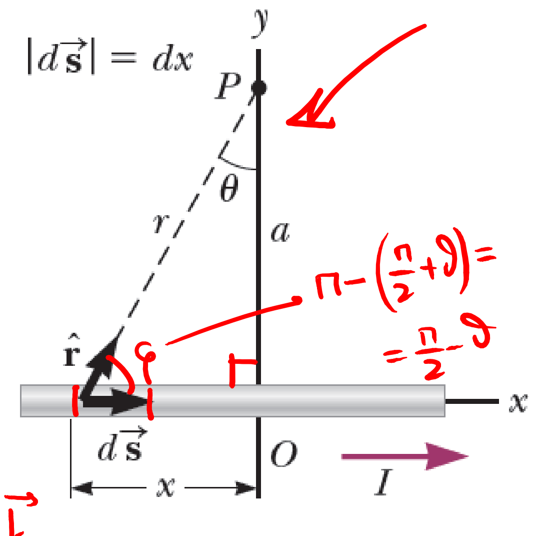




Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



a

Είναι $d\vec{s}\times\hat{r} = |d\vec{s}\times\hat{r}|\cdot\vec{k} = ds\cdot|\hat{r}|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)\cdot\vec{k}$

$= ds\cdot\cos\vartheta\cdot\vec{k}$. Παρατηρώ ότι $ds = dx$, άρα

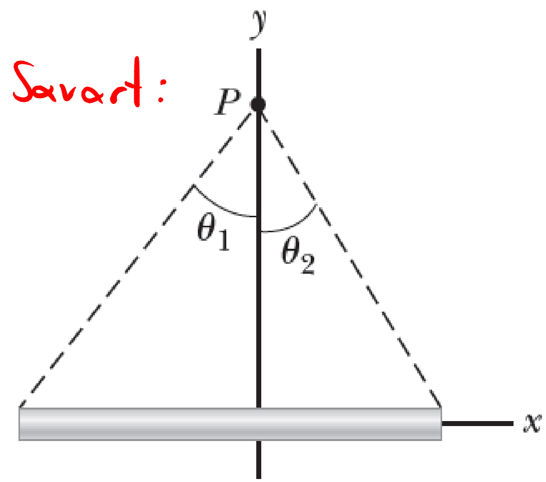
$d\vec{s}\times\hat{r} = dx\cdot\cos\vartheta\cdot\vec{k}$. Από τον νόμο των Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\cdot\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{dx\cdot\cos\vartheta}{r^2}\cdot\vec{k}\,. \quad (1)$$

Είναι $r = \frac{a}{\cos\vartheta} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\vartheta}$ (2).

Είναι $\tan\vartheta = \frac{-x}{a} \Rightarrow x = -a\tan\vartheta \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} =$

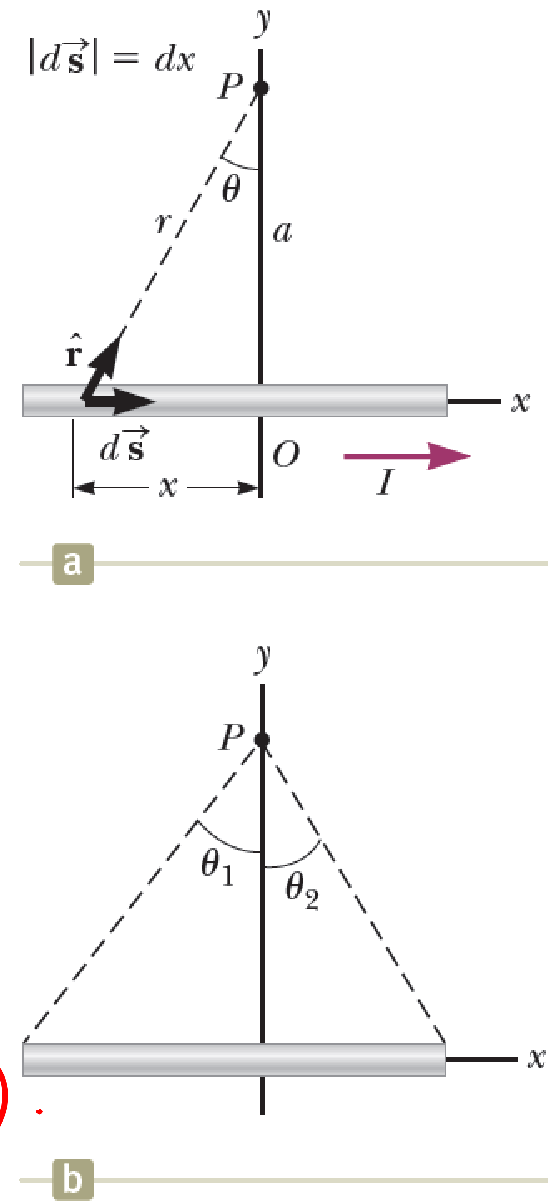
$= -\frac{d}{d\vartheta}a\tan\vartheta = -a\frac{d}{d\vartheta}\tan\vartheta = -a\frac{1}{\cos^2\vartheta}$



b

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



Άρα $\frac{dx}{d\theta} = -a\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow dx = -a\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ (3)

Η (1) λόγω (2),(3):

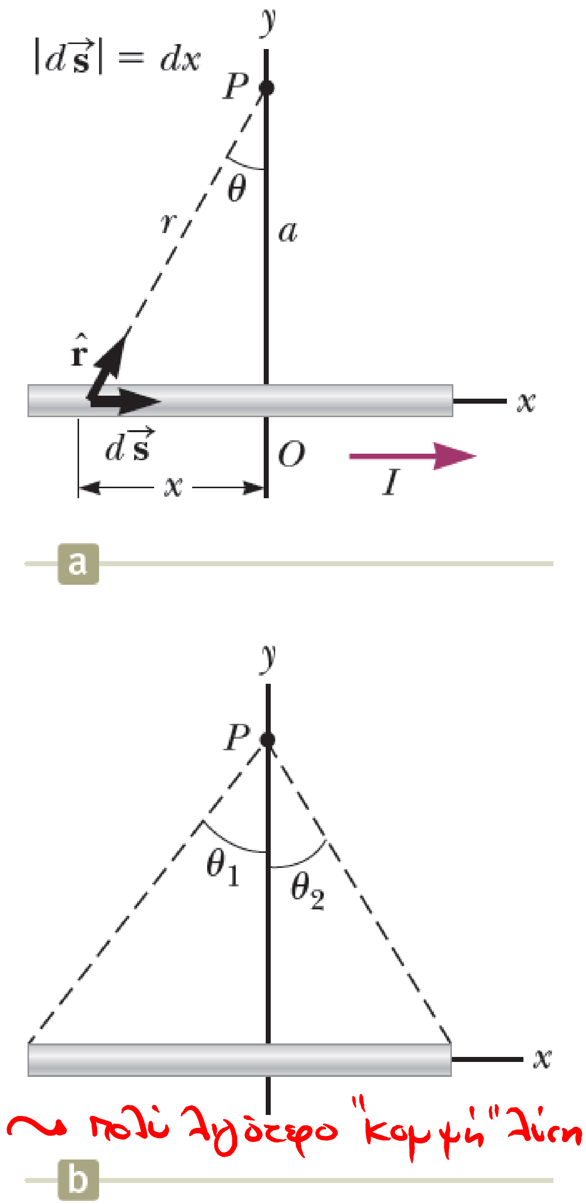
$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cancel{a}\,d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\right)\left(\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{a^{\cancel{2}}}\right)\cdot\cos\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta\,d\theta. \text{ Άρα}$$

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right).$$

Μαγνητικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Θεωρήστε ένα λεπτό, ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που φέρει σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα I και κείται στον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P.



Σημείωση: Αν δοκιμάσετε να το λύσετε με $B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$, τότε τα άκρα θα είναι

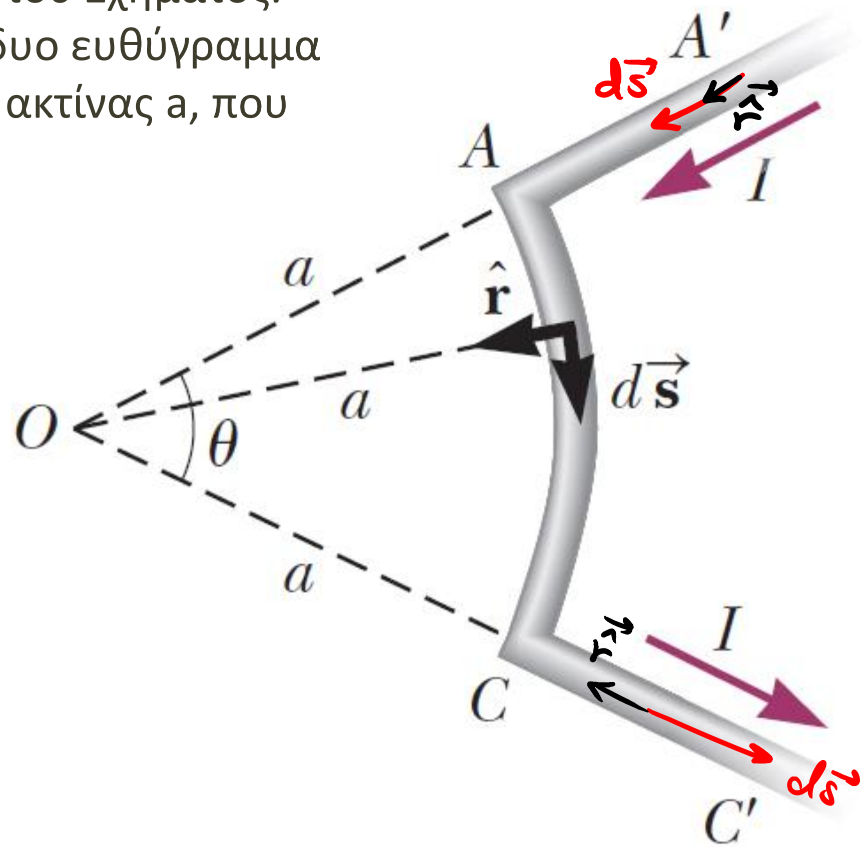
$x_1 = -a\tan\theta_1$ και $x_2 = a\tan\theta_2$ και άρα:

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\int_{-a\tan\theta_1}^{a\tan\theta_2} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dots (\text{πράξεις}) \dots =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\tan\theta_2\sqrt{1+\tan^2\theta_1} - \tan\theta_1\sqrt{1+\tan^2\theta_2}}{a\sqrt{(1+\tan^2\theta_2)(1+\tan^2\theta_1)}}\right)$$ ~ πολύ λιγότερο "κομψή" λύση!

Μαγνητικά Πεδία

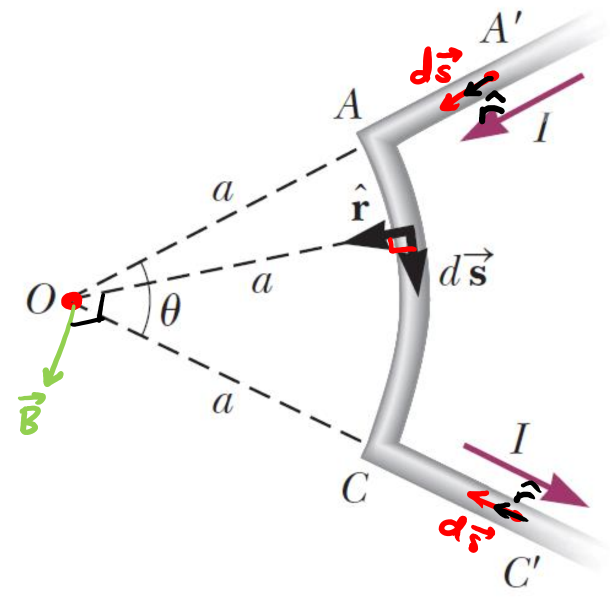
- **Παράδειγμα:**
- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a, που σχηματίζει γωνία θ.



Μαγνητικά Πεδία

Παράδειγμα – Λύση:

- Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O για το ρευματοφόρο καλώδιο του Σχήματος. Το καλώδιο αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα και ένα κυκλικό τόξο ακτίνας a, που σχηματίζει γωνία θ.



Για τον αγωγό A'A : $d\vec{s}\times\hat{\vec{r}} = \vec{0}$

Για τον αγωγό CC' : $d\vec{s}\times\hat{\vec{r}} = \vec{0}$

Για τον αγωγό AC : η φορά του $d\vec{B}$ στο σημείο O θα είναι προς τα "μέσα", "τρυπώντας" τη διαφάνεια.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{s}\times\hat{\vec{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\hat{\vec{r}}}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{a^2}$$

Συνολικά :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{a^2}\int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{a}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\theta$$

Τέλος Ενότητας