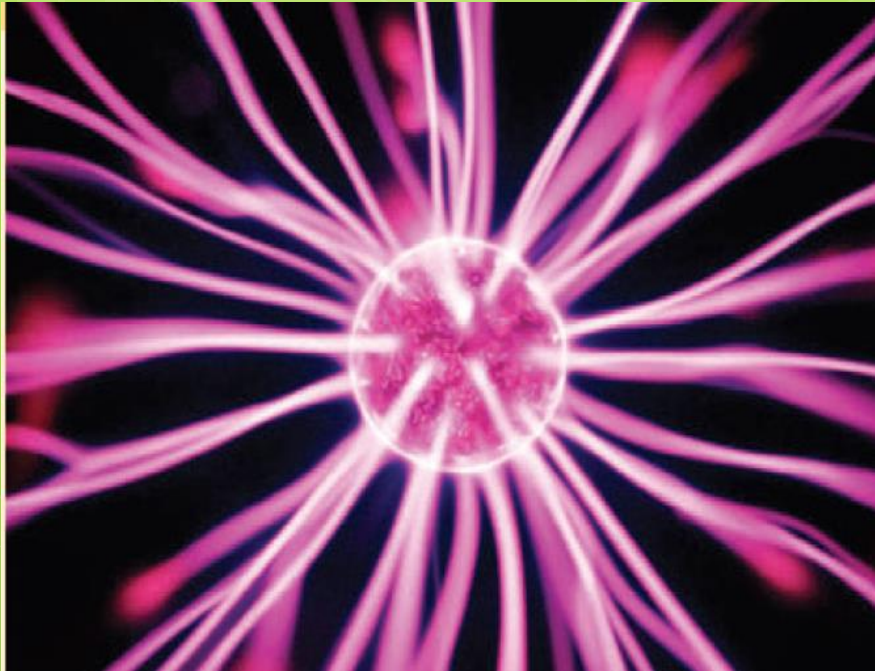
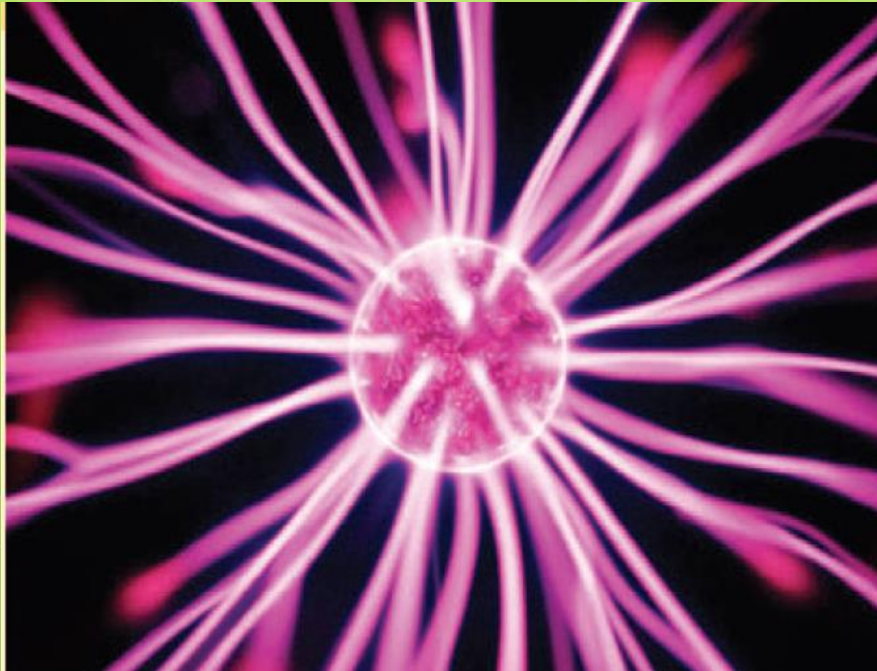




Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss



Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Επανάληψη...

- **Ο νόμος του Gauss**

- Υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής Φ_E σε μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που περικλείεται σε αυτήν;
- Η απάντηση είναι ΝΑΙ, και αυτή η σχέση ονομάζεται **νόμος του Gauss**
 - Είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη ηλεκτρικών πεδίων
- Η κλειστή επιφάνεια λέγεται πολλές φορές και γκαουσιανή (Gaussian)

Επανάληψη...

Ο νόμος του Gauss

- Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r
- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

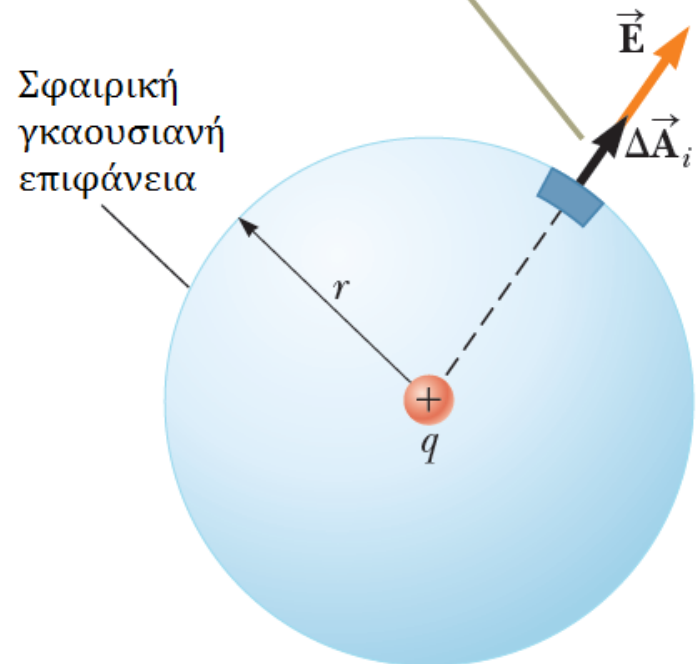
- Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας

- Άρα το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}$

- Άρα η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.



Επανάληψη...

- Ο νόμος του Gauss

$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2)$$

$$= 4\pi k_e q$$

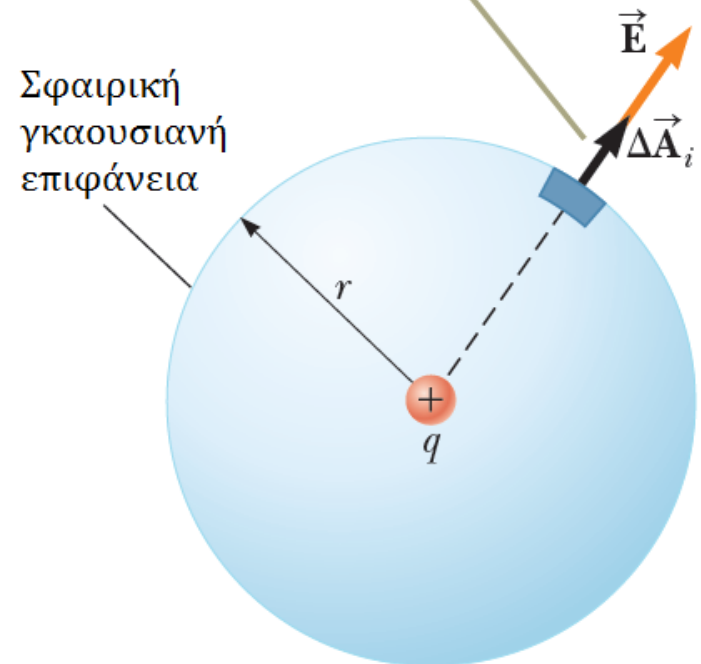
γιατί η επιφάνεια είναι σφαιρική

- Όμως $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$

- Άρα τελικά

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Όταν το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια και σταθερό σε μέτρο.

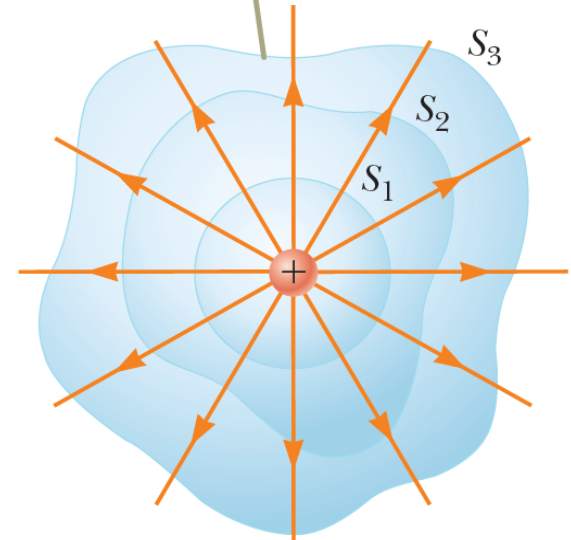


Επανάληψη...

- **Ο νόμος του Gauss**

- Και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;
- Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια
- Το σχήμα δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι ίδιος σε όλες τις επιφάνειες!
- Η S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$
- Άρα **η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι $\Phi_E = q/\epsilon_0$ και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.**

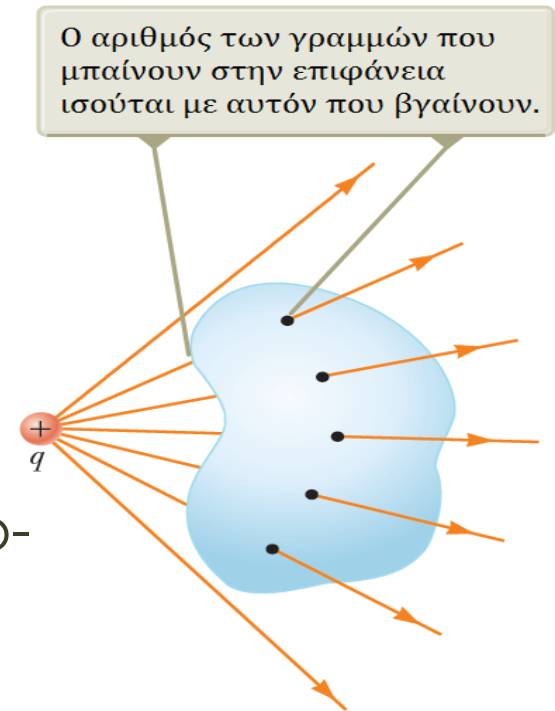
Η ηλεκτρική ροή είναι η ίδια διαμέσου όλων των επιφανειών.



Επανάληψη...

• Ο νόμος του Gauss

- Και τι θα συμβεί το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;
- Κάθε δυναμική γραμμή που εισέρχεται στην επιφάνεια βγαίνει από κάποιο άλλο μέρος της
- Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν
- Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας που **δεν** περιέχει φορτίο είναι **μηδέν!**



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**

- Ας επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας σε δυο γενικές περιπτώσεις:
- 1) Πολλά σημειακά φορτία
- 2) Συνεχής κατανομή φορτίου

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss

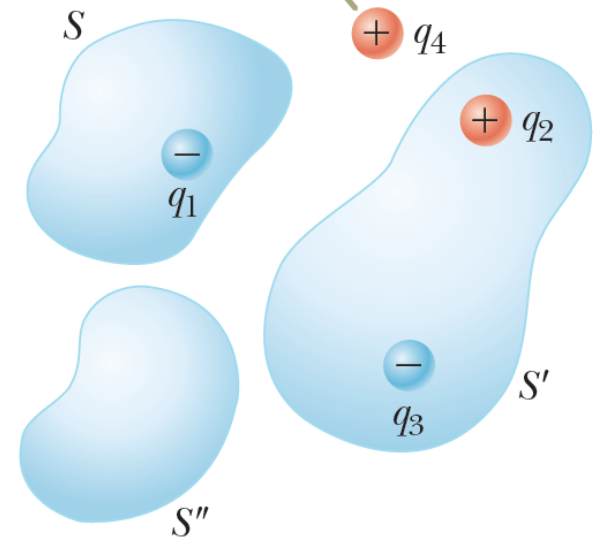
- Για πολλά (έστω M) σημειακά φορτία, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \sum_{i=1}^M \underbrace{\vec{E}_i}_{\phi_E^i} \cdot d\vec{A}$$

- Παράδειγμα:

- $\Phi_E = q_1/\epsilon_0$ για την επιφάνεια S
- $\Phi_E = (q_2 + q_3)/\epsilon_0$ για την S'
- $\Phi_E = 0$ για την S''
- Το φορτίο q_4 δε συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή σε καμιά επιφάνεια

Το φορτίο q_4 δε συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή καμιάς επιφάνειας επειδή βρίσκεται εκτός όλων των επιφανειών.



Ο νόμος του Gauss

- Ο νόμος του Gauss

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

όπου $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και q_{in} το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας

- Προσοχή στο εξής: το $\vec{E}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από συνεισφορές από φορτία **τόσο εντός όσο και εκτός** της επιφάνειας!

Ο νόμος του Gauss

• Ο νόμος του Gauss

- Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί χρήσιμος για την εκτίμηση του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική
- Αυτό συμβαίνει με κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα $d\vec{A}$ στο ολοκλήρωμα ορίζεται και υπολογίζεται απλά
- Επιπλέον, πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ εκτός ολοκληρώματος
- Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, ο νόμος του Gauss ισχύει ακόμα, αλλά δε μας είναι χρήσιμος στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου

Ο νόμος του Gauss

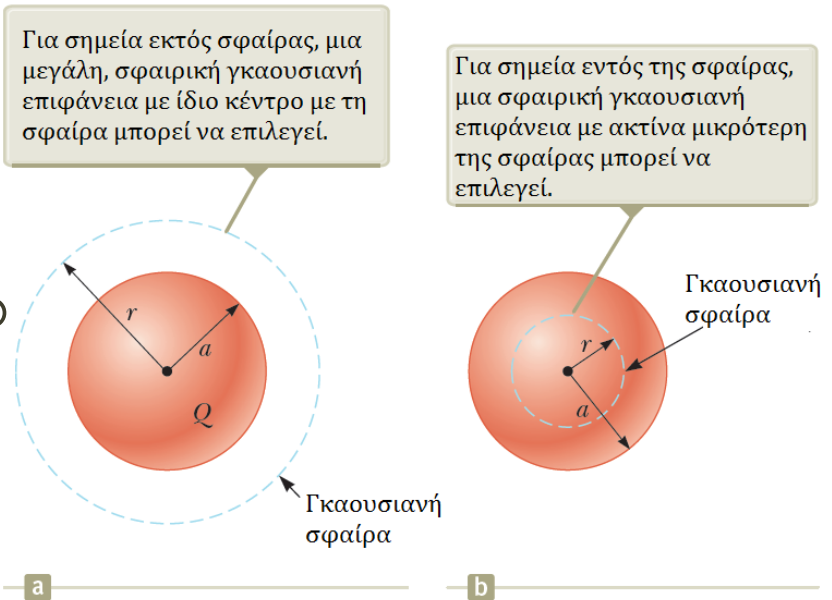
• Ο νόμος του Gauss

- Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε μια επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί μια ή περισσότερες από τις παρακάτω συνθήκες:
 1. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω σε όλη την επιφάνεια
 2. Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο $E dA$, δηλ. τα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα
 3. Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα
 4. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας

Ο νόμος του Gauss

• Παράδειγμα:

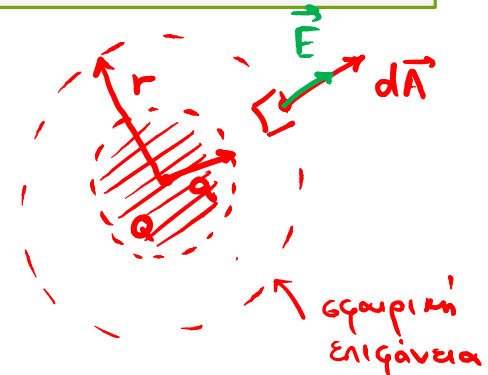
- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q .
Α) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εκτός της σφαίρας
Β) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εντός της σφαίρας



$$\oint dA = \text{Εμβαδὸ σφαιρικῆς επιφάνειας}$$

$$4\pi r^2 \quad (3)$$

Ο νόμος του Gauss



• Παράδειγμα – Λύση:

- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ σε ὅλο τον ὄγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q .

A) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εκτός της σφαίρας

Παρατηراίμε ότι το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία. Επιλέγουμε σφαιρικὴ γκαουσιανὴ επιφάνεια ακτίνας r .

1. $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ (συνθήκη 2)

2. Μέτρο τοῦ $\vec{E}$ είναι σταθερὸ σε ὅλα τα σημεία τῆς επιφάνειας (Συνθ. 1)

$$\text{Άρα } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_E \stackrel{(1)}{=} \oint E dA \stackrel{(2)}{=} E \oint dA \stackrel{(3)}{=} E \cdot 4\pi r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{γιατί } k_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}).$$

$$* E = k_e \frac{Q}{a^2} \left(\frac{r}{a} \right)$$

$$\text{όγκος} \rightarrow V_a = \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

$$V_{in} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ο νόμος του Gauss

• Παράδειγμα – Λύση:

- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q .

B) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εντός της σφαίρας

Επιλέξαμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $r < a$.

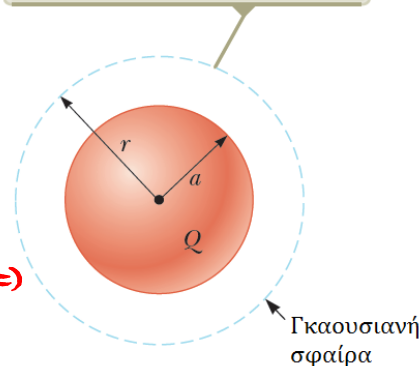
Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1,2):

$$\text{Άρα } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA =$$

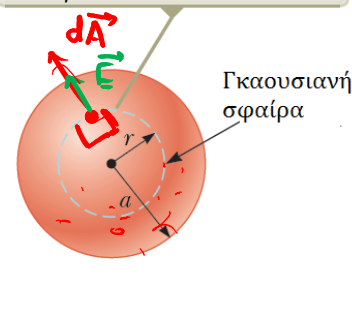
$$= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V_{in}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 Q}{\frac{4}{3} \pi a^3 3\epsilon_0} \Rightarrow E = k_e \frac{Q}{a^3} r. \quad *$$

Για σημεία εκτός σφαίρας, μια μεγάλη, σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ίδιο κέντρο με τη σφαίρα μπορεί να επιλεγεί.



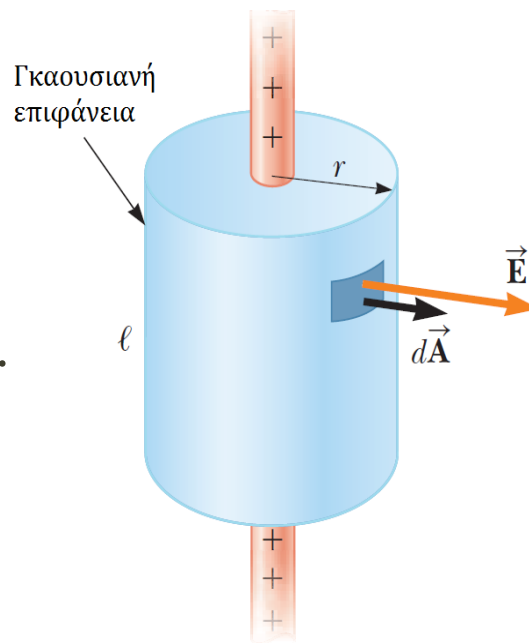
Για σημεία εντός της σφαίρας, μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με ακτίνα μικρότερη της σφαίρας μπορεί να επιλεγεί.



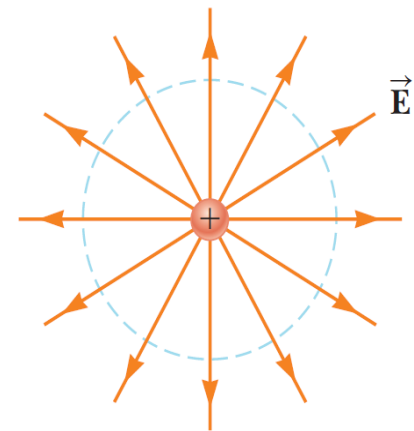
Ο νόμος του Gauss

• Παράδειγμα:

- Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκους λ .



a



b

$$* E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

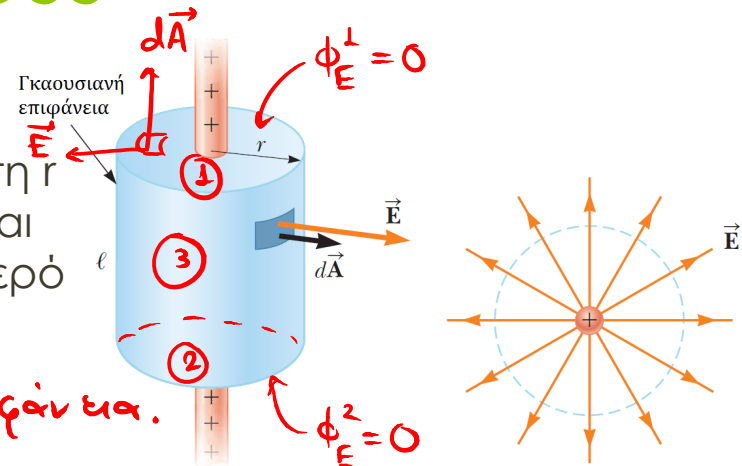
$$E = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

Ο νόμος του Gauss

• Παράδειγμα - Λύση:

- Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερό φορτίο ανά μονάδα μήκος λ .



Επιλέξαμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια.

Το μήκος της φορτισμένης γραμμής είναι άπειρο, άρα κάθε σημείο που απέχει απόσταση r από τη γραμμή θα έχει το ίδιο $|\vec{E}|$ με όλα τα υπόλοιπα σημεία απόστασης r .

1. $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ σε κάθε σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας ③.

2. Το $|\vec{E}|$ είναι σταθερό σε κάθε σημείο της επιφάνειας ③.

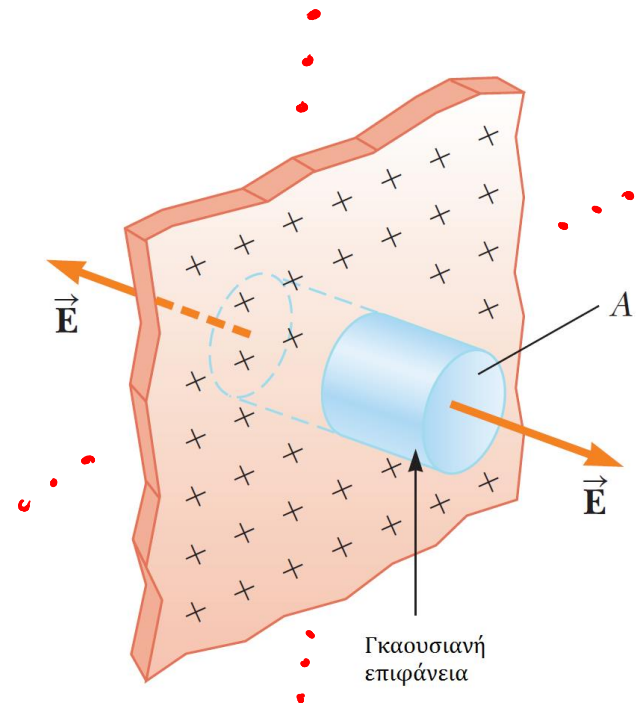
3. Στις επιφάνειες ①, ②, το $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.

$$\text{Άρα } \phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \phi_E^1 + \phi_E^2 + \phi_E^3 = \phi_E^3 = E \oint dA \quad *$$

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**

- Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ .

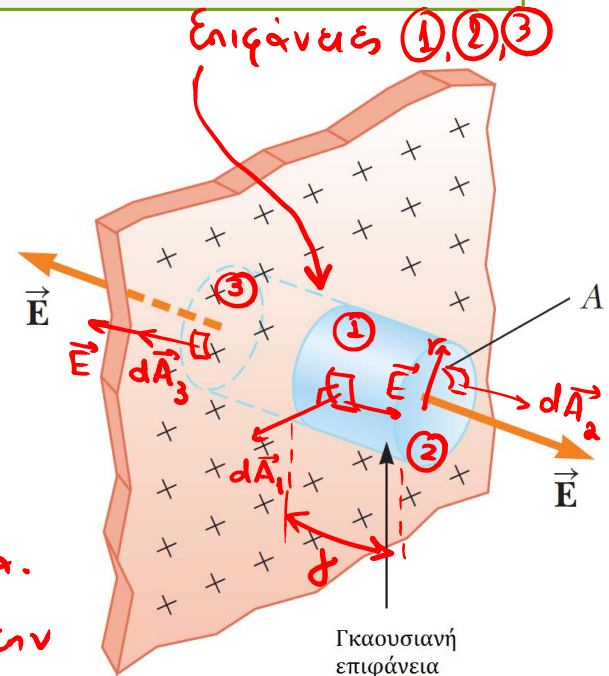


$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad \begin{array}{l} \text{φορτίο} \\ \text{εμβαδόν} \end{array}$$

Ο νόμος του Gauss

• Παράδειγμα – Λύση:

- Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ .



Επιλέγουμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια.

Κάθε σημείο που απέχει απόσταση r από την

επιφάνεια έχει σταθερό $|\vec{E}|$. Ικανοποιούνται οι (1,2).

Οι (2),(3) συνεισφέρουν στο Φ_E . Άρα $\Phi_E = \Phi_E^2 + \Phi_E^3 + \cancel{\Phi_E^1} =$

$$= \oint_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \oint_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = E \oint_2 dA_2 + E \int_3 dA_3 = E \left(\oint_2 dA_2 + \int_3 dA_3 \right) =$$

$$= E(\pi r^2 + \pi r^2) = E \cdot 2\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \text{ανεξάρτητα της απόστασης! (Πάντα ομογενές!)} \quad \circ$$



Τέλος Διάλεξης