Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός
Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Η έννοια του πεδίου αναπτύχθηκε από τον Faraday
  - Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο
    - που λέγεται ***πηγή φορτίου***
  - Όταν ένα άλλο (αρκετά μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο, μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του
  - Ορίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω της επίδρασης της πηγής φορτίου επάνω σε άλλα φορτισμένα σωματίδια ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται ανά μονάδα φορτίου
    - Αλλιώς, ορίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0, δια το φορτίο αυτό

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Ορίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0, δια το φορτίο αυτό

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_0}$$

  - Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό φορτίο q) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{\mathrm{F}}_e = q\vec{E}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

$$\vec{\mathrm{F}}_e = q\vec{E}$$

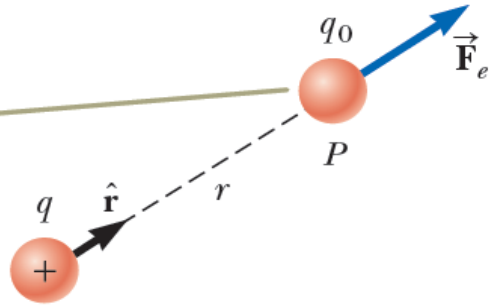
  - Αν το q είναι θετικό, η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το πεδίο
  - Αν το q είναι αρνητικό, το πεδίο και η δύναμη έχουν αντίθετες κατευθύνσεις
  - Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο Ρ λόγω της παρουσίας πηγής φορτίου q δίνεται ως

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\vec{r}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

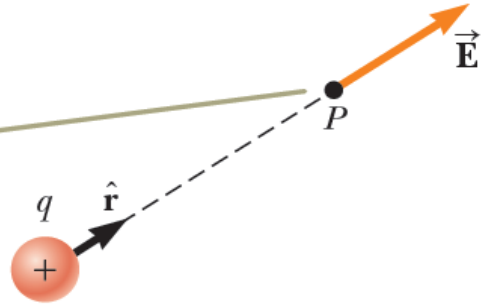
- **Ηλεκτρικό πεδίο**

Αν το q είναι θετικό, η δύναμη επάνω στο q0 έχει κατεύθυνση μακριά από το q.

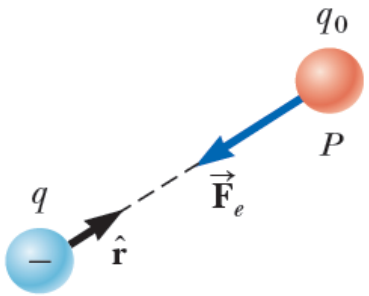


a

Αν το q είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς τα έξω από το q.

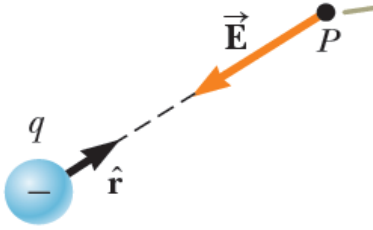


b



Αν το q είναι αρνητικό, το σωματίδιο q0 κατευθύνεται προς το q.

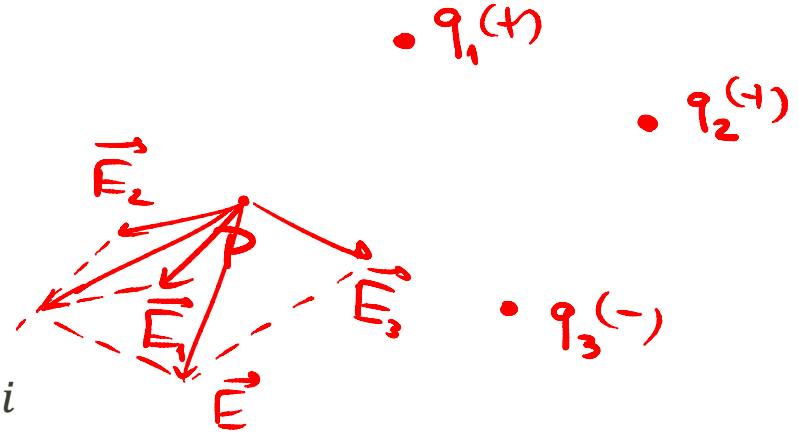
c



Αν το q είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς το q.

d

Ηλεκτρικά Πεδία



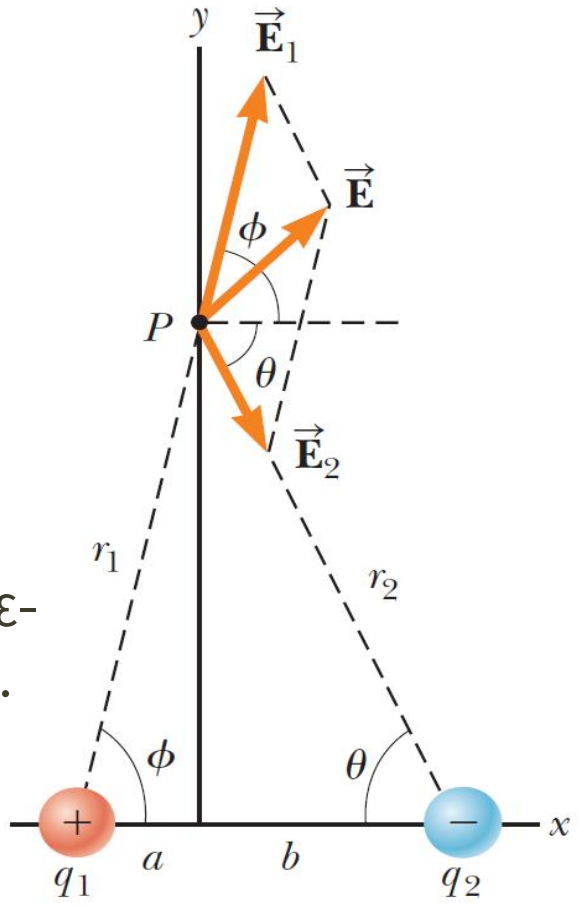
- **Ηλεκτρικό πεδίο**
  - Πολλές πηγές φορτίου q_i
  - Ηλεκτρικό πεδίο: διανυσματικό μέγεθος

$$\vec{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$$

όπου r_i η απόσταση κάθε πηγής από ένα σημείο P και $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή i στο σημείο P

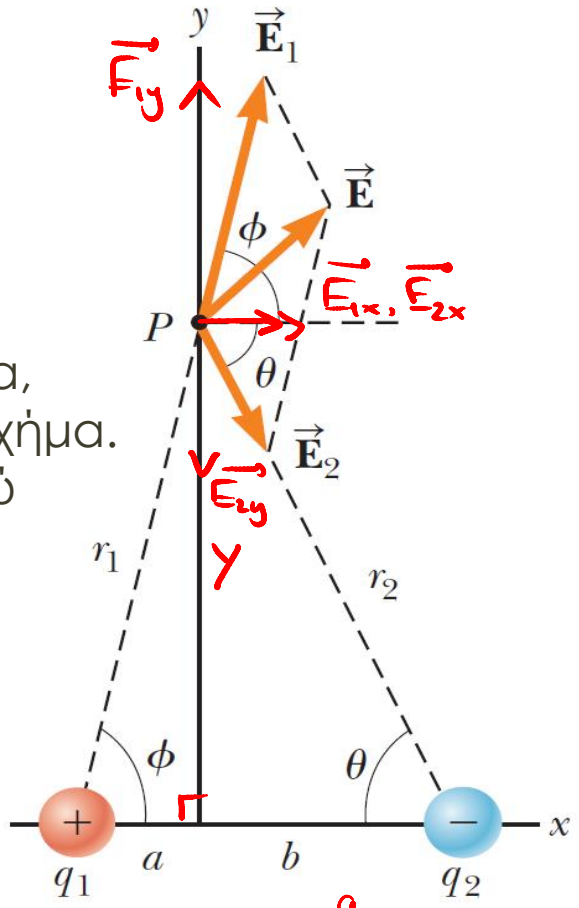
Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.
    Α) Βρείτε τις συνισταμένες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P (0,y).
    Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.
    Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα. Α) Βρείτε τις συνισταμένες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P (0,y).



Είναι: $E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} = k_e \frac{q_1}{(y^2+a^2)}$ (1)

$E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2} = k_e \frac{q_2}{(y^2+b^2)}$ (2)

(1) $\Rightarrow E_{1x} = E_1 \cdot \cos\varphi = k_e \frac{q_1}{(y^2+a^2)} \cos\varphi$

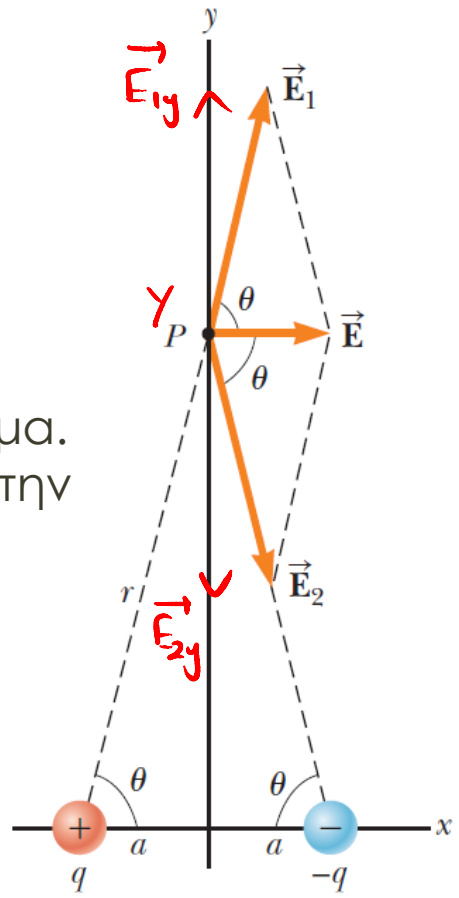
$E_{1y} = E_1 \cdot \sin\varphi = k_e \frac{q_1}{(y^2+a^2)} \sin\varphi$

$E_{2x} = E_2 \cdot \cos(-\vartheta) = k_e \frac{q_2}{(y^2+b^2)} \cos\vartheta$

$E_{2y} = E_2 \cdot \sin(-\vartheta) = -k_e \frac{q_2}{(y^2+b^2)} \sin\vartheta$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα. Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Ρ στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.



Παρατηρώ ότι $\vec{E}_{1y} = -\vec{E}_{2y}$, άρα $\sum \vec{E}_{iy} = 0$

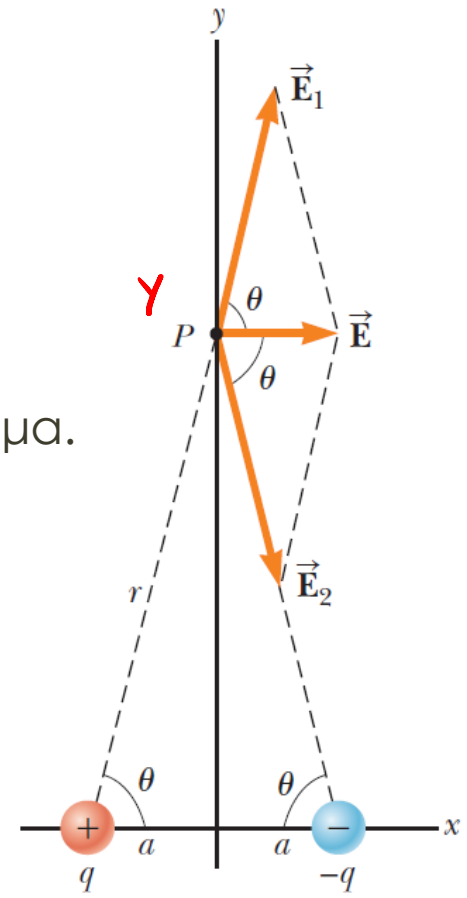
Οπότε $\vec{E} = 2\vec{E}_{x_i} = 2k_e \dfrac{q}{a^2+y^2}\cos\vartheta$

$\cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E = 2k_e \frac{aq}{\sqrt{a^2+y^2}} \frac{1}{(a^2+y^2)} = 2k_e \frac{aq}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα - Λύση:**
  - Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα. Γ) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



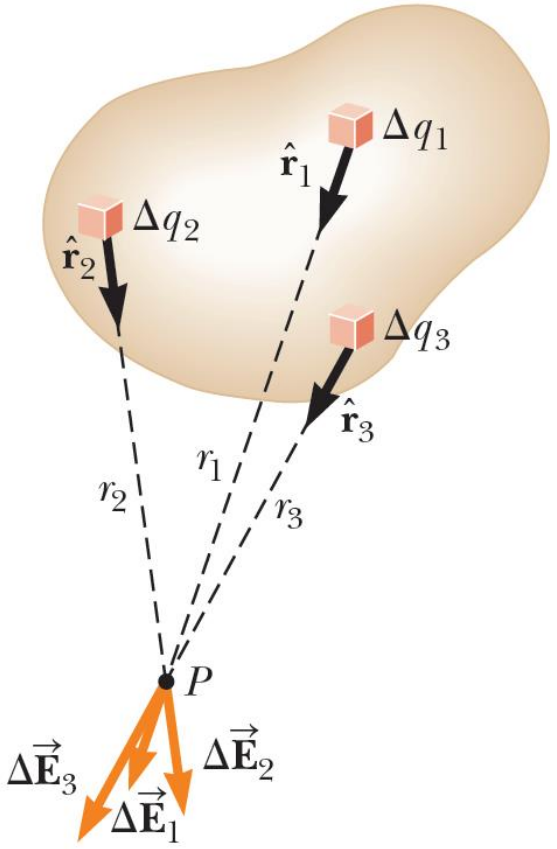
Είχαμε ότι $E = k_e \frac{2aq}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Όταν $y \gg a$,

τότε $a^2+y^2 \approx y^2$, άρα $E \approx k_e \frac{2aq}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$= k_e \frac{2aq}{y^3}$.

Ηλεκτρικά Πεδία

- Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία
- Πολλές φορές έχουμε μια ***κατανομή φορτίου*** αντί για σημειακά φορτία
  - Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι **<u>συνεχώς και ομοιόμορφα</u>** κατανεμημένη σε μια γραμμή, επιφάνεια, ή όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

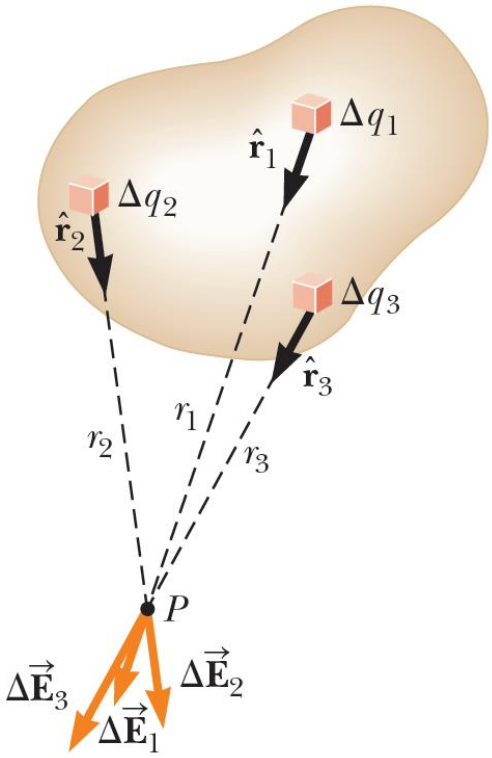
- Προσεγγιστικά

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$$

- Επειδή όμως τα διαφορετικά φορτία είναι πάρα πολλά

$$\vec{E} \approx k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$$

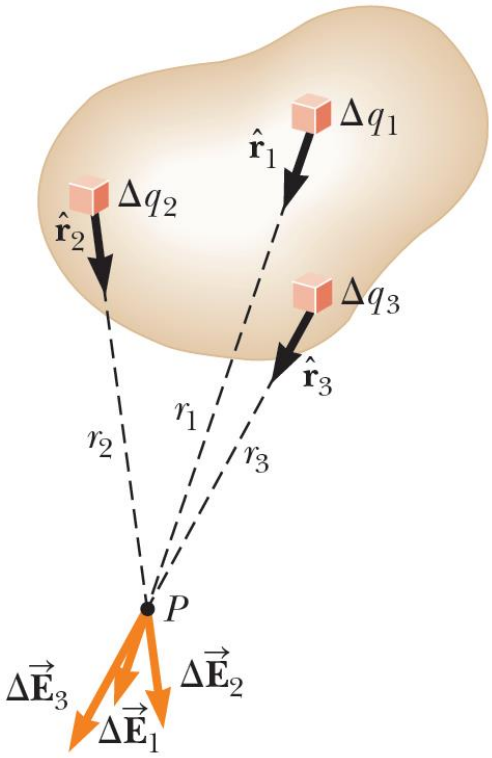
$$= k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{r}}$$



- Το ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό
  - και μπορεί να περιλαμβάνει
    - μια γραμμή
    - μια επιφάνεια
    - ή έναν όγκο.

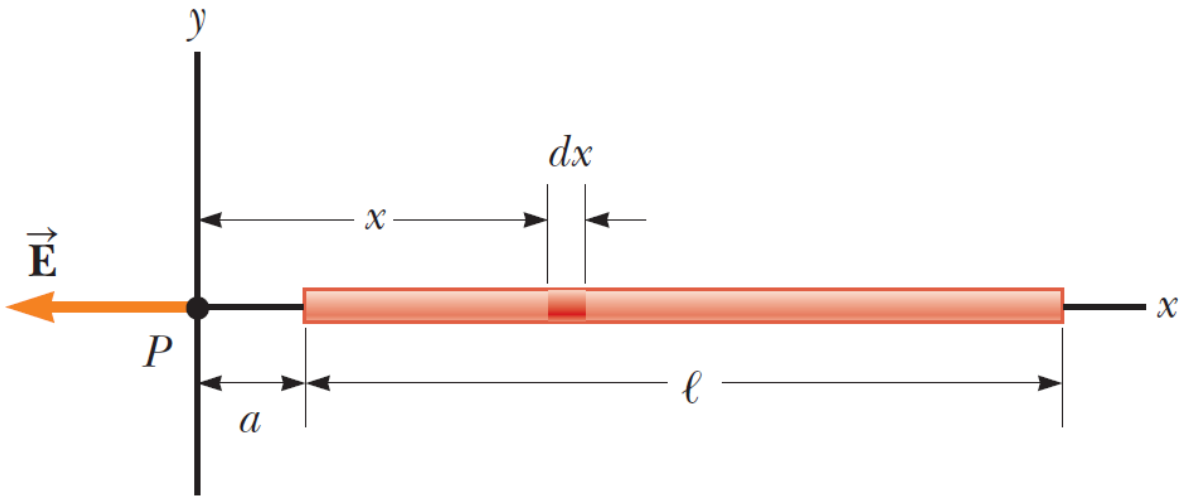
Ηλεκτρικά Πεδία

- Προς βοήθειά μας, θα ορίσουμε
  - Γραμμική πυκνότητα φορτίου
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$
  - Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου
$$\sigma = \frac{Q}{A}$$
  - Χωρική πυκνότητα φορτίου
$$\rho = \frac{Q}{V}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 1:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση a από το ένα άκρο της ράβδου, στην ευθεία της ράβδου, όπως στο σχήμα.



Ηλεκτρικά Πεδία

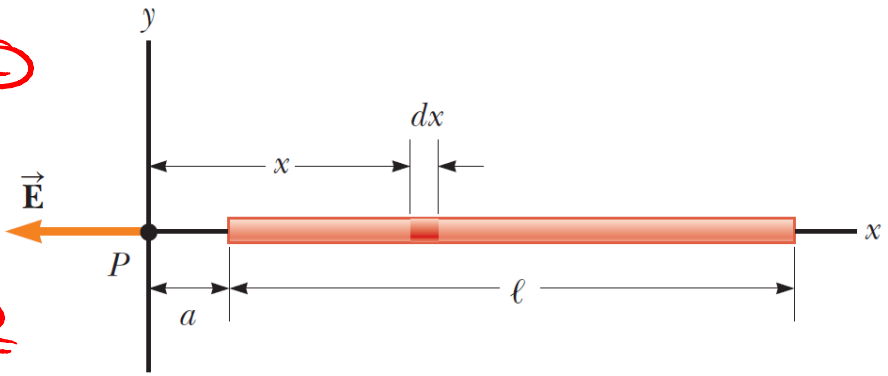
$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους ℓ έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο Q. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

dx : $\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda dx$ (1)

dE : $dE = k_e \frac{dq}{r^2} \overset{r=x}{=} k_e \frac{dq}{x^2}$

E : $E = \int dE = \int k_e \frac{dq}{x^2} \overset{(1)}{=}$

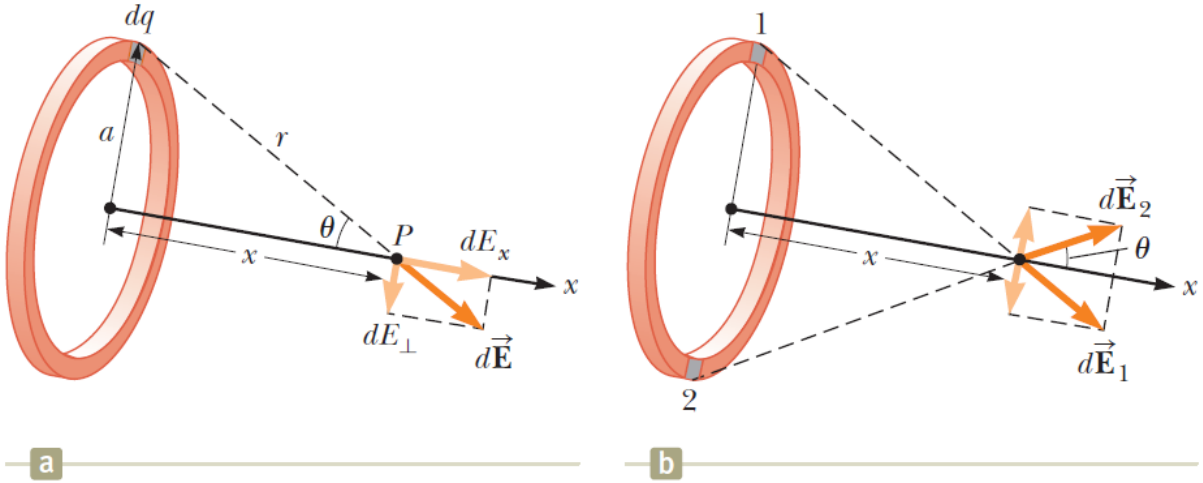


$$= \int_a^{a+\ell} k_e \frac{\lambda}{x^2} dx = k_e \lambda \int_a^{a+\ell} \frac{1}{x^2} dx = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{a+\ell} = k_e \lambda \frac{\ell}{a(\ell+a)}$$

$$= k_e \frac{Q}{a(\ell+a)}.$$ Αν $a \gg \ell$, τότε $E = k_e \frac{Q}{a^2}$ (σημειακό φορτίο)!

Ηλεκτρικά Πεδία

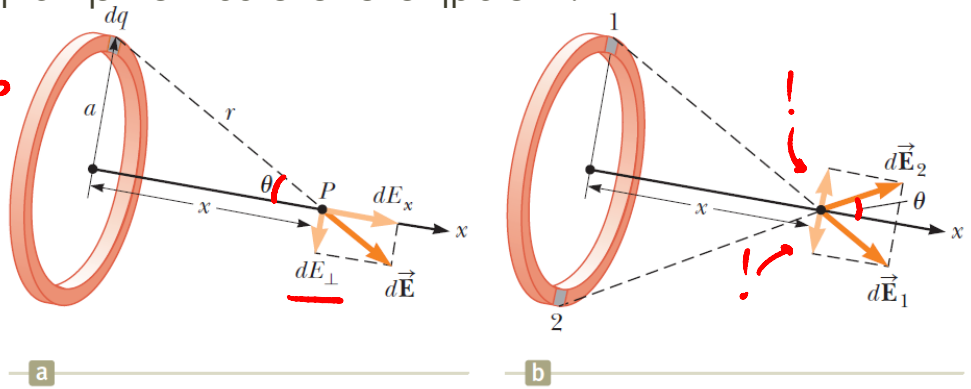
- **Παράδειγμα 2:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 2 – Λύση:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες $dE_\perp$ αλληλοαναιρούνται για αντιδιαμετρικά "τμήματα" dq. Άρα έχουμε μόνο E_x συνιστώσα.



dE_x : $dE_x = dE \cdot \cos\theta = k_e \frac{dq}{r^2} \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$\Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{(a^2+x^2)} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} =$

$= k_e \frac{dq \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ · Άρα $E_x = \int dE_x = \frac{k_e \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dq = \frac{k_e Q x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 2 – Λύση:**
  - Ένας δακτύλιος ακτίνας α φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

$$② \Rightarrow E_x = \int dE_x = \frac{k_e \lambda x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl = k_e \frac{\lambda x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} (2\pi a) \overset{①}{=\!=\!=} 2\pi a \cdot \lambda = Q$$

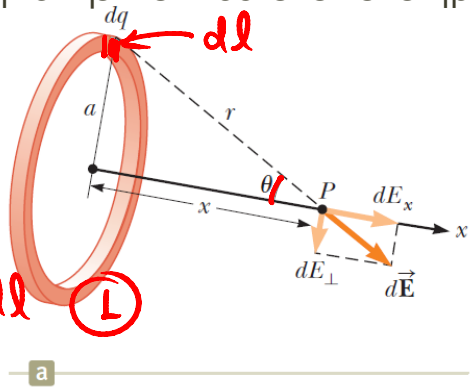
$$= k_e \frac{Qx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ξανά, αν $x \gg a$, τότε $E_x = k_e \frac{Q}{x^2}$ (σημειακό φορτίο)

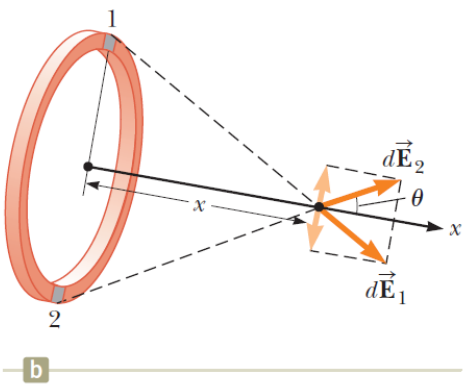
Έχουμε $dE_x = k_e \frac{dq}{r^2} \cos\theta$

Μήκος δακτυλίου: $2\pi a$

Άρα $dq = \frac{Q}{2\pi a} dl \Leftrightarrow dq = \lambda dl$ ①



a



b

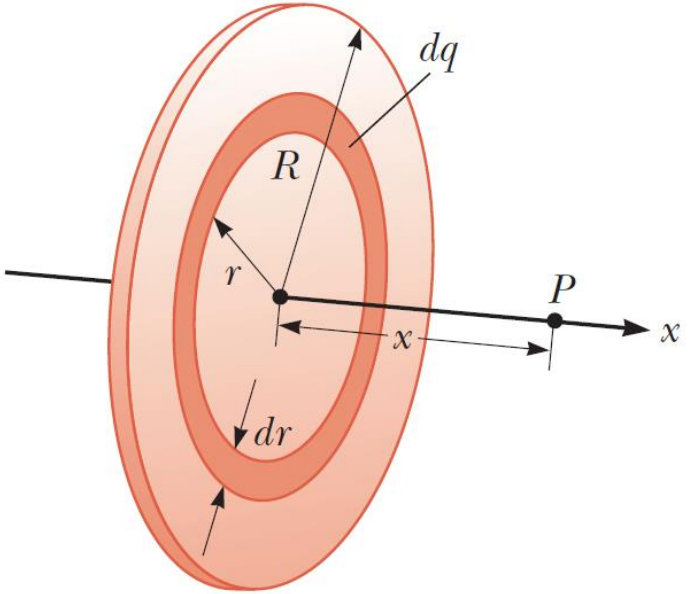
Οπότε $dE_x = k_e \frac{dq}{r^2} \cos\theta \overset{①}{=} k_e \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$\Rightarrow dE_x = k_e \frac{\lambda dl\, x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ②

Ηλεκτρικά Πεδία

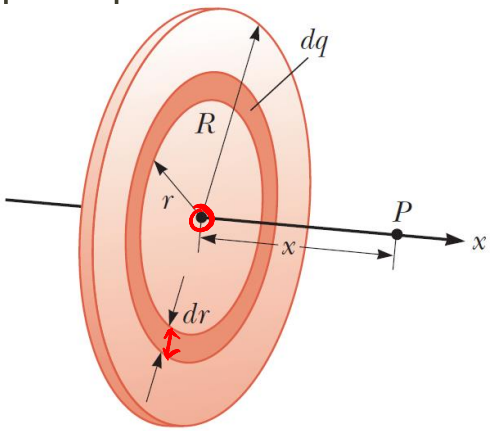
- **Παράδειγμα 3:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P σε απόσταση x, και που βρίσκεται στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου.



Γνωρίζαμε από προηγούμενο ερώτημα ότι για ένα δακτύλιο {φορτίο dq, ακτίνα r}, είναι: $E_x = k_e \frac{dq \cdot x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ②

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Για ένα δακτύλιο "πάχος" dr και ακτίνας r έχουμε $\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r dr} \Rightarrow dq = 2\pi\sigma r\, dr$ ①

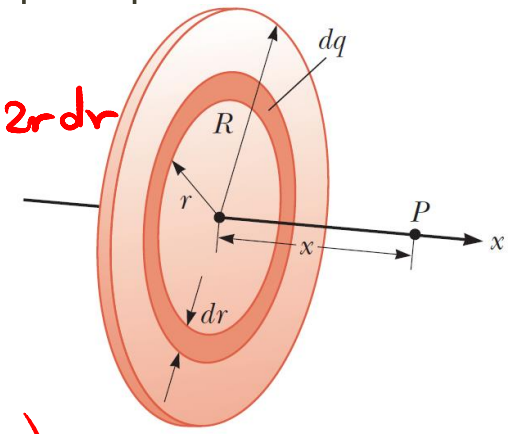
dE_x: $dE_x \overset{②}{=} k_e \frac{2\pi\sigma r x\, dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = k_e \frac{2\pi\sigma r x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$

E_x: $E_x = \int dE_x = k_e \sigma \pi x \int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dr$ ③

Ολοληρώνουμε για κάθε πιθανή ακτίνα στο (0, R).

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα 3 – Λύση:**
  - Ένας δίσκος ακτίνας R έχει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο.



$$\int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dr = ?$$

Θέτω $u = r^2+x^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$

και $u_1 = x^2$, $u_2 = R^2+x^2$

Οπότε $$\int_0^R \frac{2r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dr = \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{u^{3/2}}\,du =$$

$$= \int_{x^2}^{R^2+x^2} u^{-\frac{3}{2}}\,du = -2\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{x^2}^{R^2+x^2} = -2\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right),$$ άρα η (3) δίνει $E_x = 2k_e\pi x\sigma\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$.

Τέλος Διάλεξης