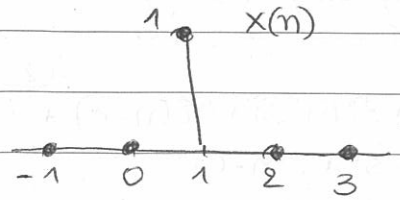
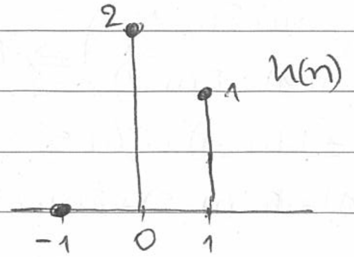
ΑΣΚΗΣΗ 1

(1). (α)





$x(n) = 1\cdot\delta(n)$

$h(n) = 2\cdot\delta(n) + 1\cdot\delta(n-1)$

$Y(n) = x(n)\cdot h(n) = \delta(n)\cdot h(n) = h(n)$, από ταυτοτική ιδιότητα

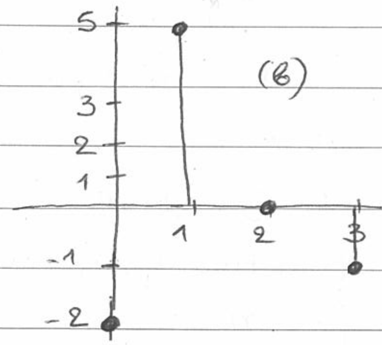
(β) $Y(n) = x(n) * h(n) = \{2\delta(n) - \delta(n-1)\} * h(n) = 2\delta(n) * h(n) - \delta(n-1) * h(n)$

$= 2h(n) - h(n-1)$, από ταυτοτική

$$\left.\begin{aligned} 2h(n) &= -2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2) \\ h(n-1) &= -\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3) \end{aligned}\right\}$$

$Y(n) = -2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-1) - 2\delta(n-2) - \delta(n-3) =$

$= -2\delta(n) + 5\delta(n-1) - \delta(n-3)$



(γ) $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$

$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-11) + \delta(n-12) + \delta(n-13) + \delta(n-14) +$

$+ \delta(n-15) + \delta(n-16)$

$x(n) * h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) +$

$+ 2\delta(n-7) + \delta(n-8) + \delta(n-11) + 2\delta(n-12) + 3\delta(n-13) + 4\delta(n-14)$

$+ 5\delta(n-15) + 4\delta(n-17) + 3\delta(n-18) + 2\delta(n-19) + \delta(n-20)$

(δ) $x(n) = 1\cdot\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 1\cdot\delta(n) + 1\cdot\delta(n-1) = \delta(n+2) + 2\cdot\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$

$h(n) = 1\cdot\delta(n) + (-1)\cdot\delta(n-1) + 1\cdot\delta(n-4) + 1\cdot\delta(n-5) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$

$Y(n) = x(n) * h(n) = \{\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)\} * x(n) = \delta(n) * x(n) - \delta(n-1) * x(n) +$

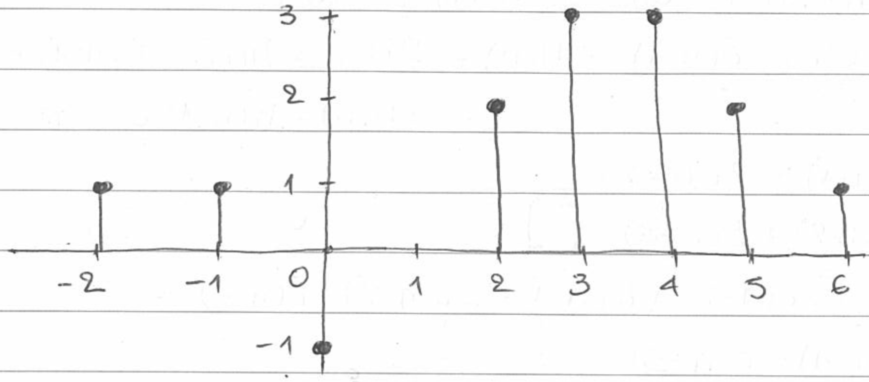
$+ \delta(n-4) * x(n) + \delta(n-5) * x(n) = x(n) - x(n-1) + x(n-4) + x(n-5)$

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ x(n) &= \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) \\ \bullet\ x(n-1) &= \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) \end{aligned}\right) \Rightarrow \delta(n+2) + \delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-2) \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ x(n-4) &= \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5) \\ \bullet\ x(n-5) &= \delta(n-3) + 2\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6) \end{aligned}\right) \Rightarrow \delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6) \quad (2)$$

απο σχέση (1) + (2) έχω ότι:

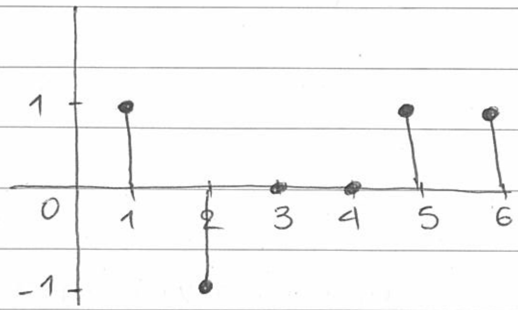
$$Y(n) = \delta(n+2) + \delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 3\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$$



(2) (α)

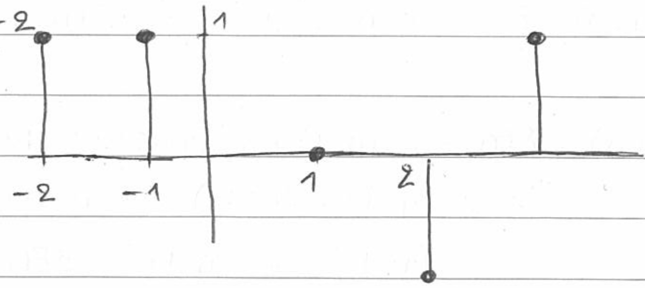
$$h(n) = \begin{cases} 1, & n=0,\ n=4,\ n=5 \\ -1, & n=1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$h(n-1) = \begin{cases} 1, & n=1,\ n=5,\ n=6 \\ -1, & n=2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

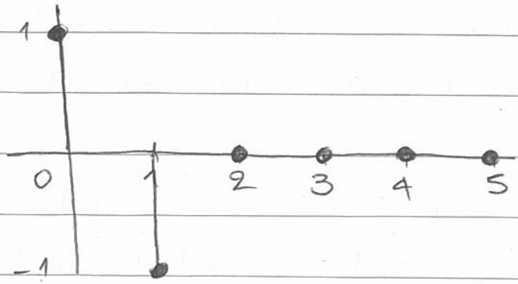


(β)

$$h(3-n) = \begin{cases} 1, & n=3,\ n=-1,\ n=-2 \\ -1, & n=2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



(γ) $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$, $h(n)\cdot u(1-n)$



$$u(1-n) = \begin{cases} 1, & 1-n \geq 0 \Rightarrow n \leq 1 \\ 0, & 1-n < 0 \Rightarrow n > 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

(i) $x(n) = e^{j\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3}\right)}$

$\omega = \frac{\pi}{6}$ και γνωρίζω ότι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{12\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow T = 12k$

άρα περιοδικό με $N=12$ και $k=1$

(ii) $x(n) = e^{j\frac{3\pi n}{4}}$, $\omega_0 = 3\pi/4$

$N = \frac{2\cancel{\pi}k}{\frac{3\cancel{\pi}}{4}} = \frac{8}{3}k$, για $k=3 \rightarrow T=8$ επομένως περιοδικό με $N=8$ και $k=3$

(iii) $x(n) = e^{j\sqrt{2}\pi n/4}$, $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

$N = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{2}\pi}{4}} = \frac{8}{\sqrt{2}}k$ $\nexists k \in \mathbb{Z}$ Επομένως δεν είναι περιοδικό

(iv) $x(n) = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

Το $x(n) = \frac{1}{n}$ δεν είναι περιοδικό, επομένως το γινόμενο δεν είναι σίγουρα περιοδικό

(v) $x(n) = e^{j\pi n/10} + e^{-jn/3}$

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = \frac{2\cancel{\pi}k}{\frac{\cancel{\pi}}{10}} = 20k, \quad k=1, \quad N=20 \\ N_2 = \frac{2\pi k}{-\frac{1}{3}} = -6\pi k, \quad \nexists k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \text{Επομένως δεν είναι περιοδικό}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

(α) $y(n) = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$; αφού το $y(n)$ είναι άθροισμα είναι γραμμικό

$y(n) = 0, \forall n > 0$

$y(n) = x(n_0) + x(n_0+1) + \ldots + x(n)$

$y(-5) = x(-1) + x(-2) + \ldots + x(-5)$ • δεν είναι αιτιατό

• είναι χρονικά αμετάβλητο, με μνήμη.

(β) $y(n)=e^{x(n+1)}$ • δεν είναι γραμμικό αφού: $e^{x_1(n)}+e^{x_2(n)} \neq e^{x_1(n)+x_2(n)}$

• δεν είναι αιτιατό, αφού δεν εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές

• δεν έχει μνήμη

• ευσταθές, αφού $e^{x(n)}<+\infty$

• δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

(γ) $y(n)=x(n)+3u(u+1)$

• γραμμικό

• μη-αιτιατό, εξαρτάται από το $n+1$

• έχει μνήμη

• ευσταθές, αν $|x(n)|<+\infty$ τότε $|y(n)|<+\infty$

• είναι χρονικά αμετάβλητο

ΑΣΚΗΣΗ 4

$x(n)=a^{|n|}$, $|a|<1$ και $h(n)=u(n-2)$

Έχω $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|}\cdot u(n-k-2)$

Η $u(n-k-2)=1$, όταν $n-k-2\geq 0 \Rightarrow k\leq n-2$ οπότε το παραπάνω άθροισμα γράφεται ως $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|}\cdot u(n-k-2)=\sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{|k|}$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

• περίπτωση 1: $n-2<0$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{|k|}=\sum_{k=2-n}^{+\infty} a^{k}=\sum_{k=0}^{+\infty} a^{k}-\sum_{k=0}^{2-n-1} a^{k}=$$

$$=\frac{1}{1-a}-\frac{1-a^{2-n}}{1-a}=\frac{a^{2-n}}{1-a}$$

• περίπτωση 2: $n-2\geq 0$

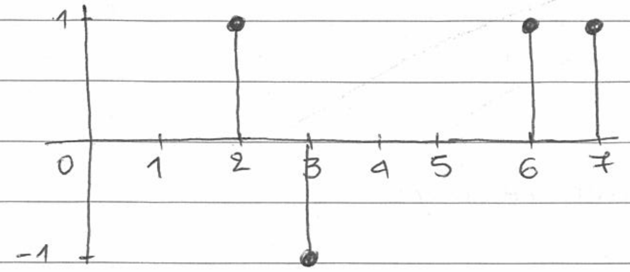
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n-2} a^{|k|}=\sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k}+\sum_{k=0}^{n-2} a^{k}=$$

$$=\frac{1}{1-a}-1+\frac{1-a^{n-3}}{1-a}=\frac{a}{1-a}+\frac{1-a^{n-3}}{1-a}=\frac{1+a-a^{n-3}}{1-a}$$

Επομένως,

$$y(n)=\begin{cases}\dfrac{a^{2-n}}{1-a}, & n<2\\[2ex] \dfrac{1+a-a^{2-3}}{1-a}, & n\geq 2\end{cases}$$

(δ) $h(n-2) = \delta(n-2) - \delta(n-3) + \delta(n-6) + \delta(n-7)$



(ζ) $h(n-1) * \delta(n-5) = \{\delta(n-1) - \delta(n-2) + \delta(n-5) + \delta(n-6)\} * \delta(n-5)$

Έστω $n-5=k \Rightarrow \{\delta(n-1) - \delta(n-2) + \delta(k) + \delta(n-6)\} * x(k) =$

κ' $\delta(*) = x(n)$

$$= \delta(n-1) * x(k) - \delta(n-2) * x(k) + \delta(k) * x(k) + \delta(n-6) * x(k) =$$

$$= \delta(k+4) * x(k) - \delta(k+3)\, x(k) + \delta(k) * x(k) + \delta(k+1) * x(k) =$$

$$= x(k+4) - x(k+3) + x(k) + x(k+1) =$$

$$= x(n-1) - x(n-2) + x(n-5) + x(n-4)$$

Μετά από πράξεις $\rightarrow$ $h(n-1) * \delta(n-5) = \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n+1) + \delta(n) - \delta(n-1) +$

$+ 3\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$y(n) + \frac{1}{a} y(n-1) = x(n-1)$$

(α) κρουστική απόκριση, $x(n) = \delta(n)$ $\quad y(n) = h(n)$

$h(n) + \frac{1}{a} h(n-1) = \delta(n-1)$ $\quad$ αιτιατό ΓΧΑ $h(n) = 0, \ \forall n<0$

$n=0$, $h(0) + \frac{1}{a} h(-1) = \delta(-1)$ $\quad$, $h(0) = 0$

$n=1$, $h(1) + \frac{1}{a} h(0) = \delta(0)$ $\quad$, $h(1) = \delta(0) = 1$

$n=2$, $h(2) + \frac{1}{a} h(1) = \delta(1)$ $\quad$, $h(2) = -\frac{1}{a}$

$n=3$, $h(3) + \frac{1}{a} h(2) = 0$ $\quad$, $h(3) = \left(\frac{1}{a}\right)^2$

$\vdots$

$$h(n) = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

$$h(n) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}, & n=2k \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}, & n=2k+1 \end{cases}$$

(β) $\left|\frac{1}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |a| \Leftrightarrow |a| > 1$

$a > 1$ ή $a < -1$, Επομένως ευσταθές

ΑΣΚΗΣΗ 6

$y(n) = a\,y(n-1) + x(n)$

$x(n)$: είσοδος $\in \mathbb{R}$

$y(n)$: έξοδος $y(n) = y_{re}(n) + j\,y_{im}(n)$

$a = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$

(α)

$y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n) \Rightarrow$

$y_{re}(n) + j\,y_{im}(n) = (\alpha + j\beta) \cdot (y_{re}(n-1) + j\,y_{im}(n-1))$

$\Rightarrow y_{re}(n) + j\,y_{im}(n) = \alpha\,y_{re}(n-1) + \alpha j\,y_{im}(n-1) + j\beta\,y_{re}(n-1)$

$-\beta\,y_{im}(n-1) + x(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{re}(n) + j\,y_{im}(n) = \alpha \cdot y_{re}(n-1) - \beta\,y_{im}(n-1) + x(n) + j\left(\alpha\,y_{im}(n-1) + \beta\,y_{re}(n-1)\right)$