

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2026
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Για ένα διάνυσμα $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ ισχύει

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad (1)$$

ενώ η γωνία του με τον θετικό ημιάξονα x προκύπτει από

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x}, \quad (2)$$

με προσοχή στο τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το διάνυσμα.

(α) Για το $\vec{a} = (-3, 6)$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \quad (3)$$

$$\tan \theta_a = \frac{6}{-3} = -2 \quad (4)$$

Το $\vec{a}$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο, άρα

$$\theta_a = 180^\circ - \tan^{-1}(2) = 116.565^\circ \quad (5)$$

(β) Για το $\vec{b} = (5, -2)$,

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}, \quad (6)$$

$$\theta_b = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{5}\right) = -21.801^\circ. \quad (7)$$

(γ) Είναι

$$\vec{a} + \vec{b} = (-3 + 5)\vec{i} + (6 - 2)\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad (8)$$

Επομένως

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad (9)$$

$$\theta_{a+b} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = 63.435^\circ \quad (10)$$

(δ) Είναι

$$\vec{b} - \vec{a} = (5 + 3)\vec{i} + (-2 - 6)\vec{j} = 8\vec{i} - 8\vec{j} \quad (11)$$

Άρα

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}, \quad (12)$$

$$\theta_{b-a} = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ \quad (13)$$

(ε) Είναι

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3 - 5)\vec{i} + (6 + 2)\vec{j} = -8\vec{i} + 8\vec{j} \quad (14)$$

Άρα

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 8\sqrt{2}, \quad (15)$$

$$\theta_{a-b} = 135^\circ \quad (16)$$

(ς) Παρατηρούμε ότι

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \quad (17)$$

Τα δύο διανύσματα είναι επομένως αντίρροπα. Η μεταξύ τους γωνία είναι

$$180^\circ \quad (18)$$

Άσκηση 2.

Θέτουμε

$$\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j} \quad (19)$$

Αφού το διάνυσμα $\vec{x}$ δείχνει στην αντίθετη κατεύθυνση, θα είναι παράλληλο προς το $-\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Με άλλα λόγια,

$$\vec{x} = \lambda(-\vec{u}) = \lambda(4\vec{i} - 3\vec{j}), \lambda > 0 \quad (20)$$

Άρα

$$x_0 = 4\lambda, \quad y_0 = -3\lambda \quad (21)$$

Το μέτρο του είναι ίσο με 10, δηλ.

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(4\lambda)^2 + (-3\lambda)^2} \quad (22)$$

$$= \sqrt{16\lambda^2 + 9\lambda^2} = 10 \quad (23)$$

οπότε

$$16\lambda^2 + 9\lambda^2 = 100 \iff 5\lambda = 10 \iff \lambda = 2 \quad (24)$$

Άρα τελικά

$$\vec{x} = 4\lambda\vec{i} - 3\lambda\vec{j} = 8\vec{i} - 6\vec{j} \quad (25)$$

Άσκηση 3.Γνωρίζουμε ότι για $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ και $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, το εσωτερικό τους γινόμενο δίνεται ως

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (26)$$

(α) Είναι

$$\vec{b} + \vec{c} = (3 - 2)\vec{i} + (1 + 2)\vec{j} + (-1 + 3)\vec{k} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad (27)$$

Άρα

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (1)(1) + (-2)(3) + (4)(2) \quad (28)$$

$$= 1 - 6 + 8 = 3 \quad (29)$$

(β) Είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(3) + (-2)(1) + (4)(-1) = -3, \quad (30)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (1)(-2) + (-2)(2) + (4)(3) = 6 \quad (31)$$

Επομένως

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = -3 - 6 = -9 \quad (32)$$

(γ) Έχουμε ήδη $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$. Επιπλέον,

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (3)(-2) + (1)(2) + (-1)(3) \quad (33)$$

$$= -6 + 2 - 3 = -7 \quad (34)$$

Άρα

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = (6)(-7) = -42 \quad (35)$$

Άσκηση 4.

Γράφουμε

$$\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (36)$$

Επειδή $\vec{c} \perp \vec{a}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad (37)$$

$$(2)(x) + (3)(y) = 0 \quad (38)$$

άρα

$$2x + 3y = 0. \quad (39)$$

Επίσης, από τη συνθήκη $\vec{b} \cdot \vec{c} = 5$,

$$(-1)(x) + (4)(y) = 5 \quad (40)$$

$$-x + 4y = 5 \quad (41)$$

Από την πρώτη εξίσωση,

$$x = -\frac{3}{2}y \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη,

$$-\left(-\frac{3}{2}y\right) + 4y = 5 \quad (43)$$

$$\frac{3}{2}y + 4y = 5 \quad (44)$$

$$\frac{11}{2}y = 5 \quad (45)$$

$$y = \frac{10}{11} \quad (46)$$

Τότε

$$x = -\frac{3}{2} \frac{10}{11} = -\frac{15}{11} \quad (47)$$

Επομένως

$$\vec{c} = -\frac{15}{11}\vec{i} + \frac{10}{11}\vec{j} \quad (48)$$

Άσκηση 5.

(α)

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \left(x^3 + \frac{2}{x} \right) \quad (49)$$

$$= x + 2x^{-3} \quad (50)$$

Άρα

$$y'(x) = 1 - 6x^{-4} = 1 - \frac{6}{x^4} \quad (51)$$

(β) Για

$$y(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \quad (52)$$

χρησιμοποιούμε τον κανόνα του πηλίκου:

$$y'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 1) - (x^2 + 2x - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \quad (53)$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 - 2x^3 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \quad (54)$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 1)^2} \quad (55)$$

(γ) Έχουμε

$$y(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (56)$$

Με τον κανόνα του πηλίκου,

$$y'(x) = \frac{(\cos x)(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \quad (57)$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \quad (58)$$

$$= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} \quad (59)$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x} \quad (60)$$

(δ) Αρχικά απλοποιούμε:

$$y(x) = \frac{(x + 1)(x^2 + 3x)}{x^4} \quad (61)$$

$$= \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^4} \quad (62)$$

$$= x^{-1} + 4x^{-2} + 3x^{-3} \quad (63)$$

Επομένως

$$y'(x) = -x^{-2} - 8x^{-3} - 9x^{-4} \quad (64)$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} - \frac{9}{x^4} \quad (65)$$

Άσκηση 6.(α) Γράφουμε $\sqrt{x} = x^{1/2}$ και αναπτύσσουμε:

$$\int \sqrt{x}(2x^2 + x - 3) dx = \int (2x^{5/2} + x^{3/2} - 3x^{1/2}) dx \quad (66)$$

Ολοκληρώνοντας κάθε όρο χρησιμοποιώντας τη σχέση $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, έχουμε

$$= 2\frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} - 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + C \quad (67)$$

$$= \frac{4}{7}x^{7/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} - 2x^{3/2} + C \quad (68)$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{4}{7}\sqrt{x^7} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3} + C \quad (69)$$

(β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \quad (70)$$

Για $a = 2x$ και $b = 5x$,

$$\cos(2x) \sin(5x) = \frac{1}{2} [\sin(7x) - \sin(-3x)] \quad (71)$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(7x) + \sin(3x)] \quad (72)$$

Άρα

$$\int \cos(2x) \sin(5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(7x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(3x) dx \quad (73)$$

$$= -\frac{1}{14} \cos(7x) - \frac{1}{6} \cos(3x) + C \quad (74)$$

Επομένως

$$-\frac{1}{14} \cos(7x) - \frac{1}{6} \cos(3x) + C \quad (75)$$