

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

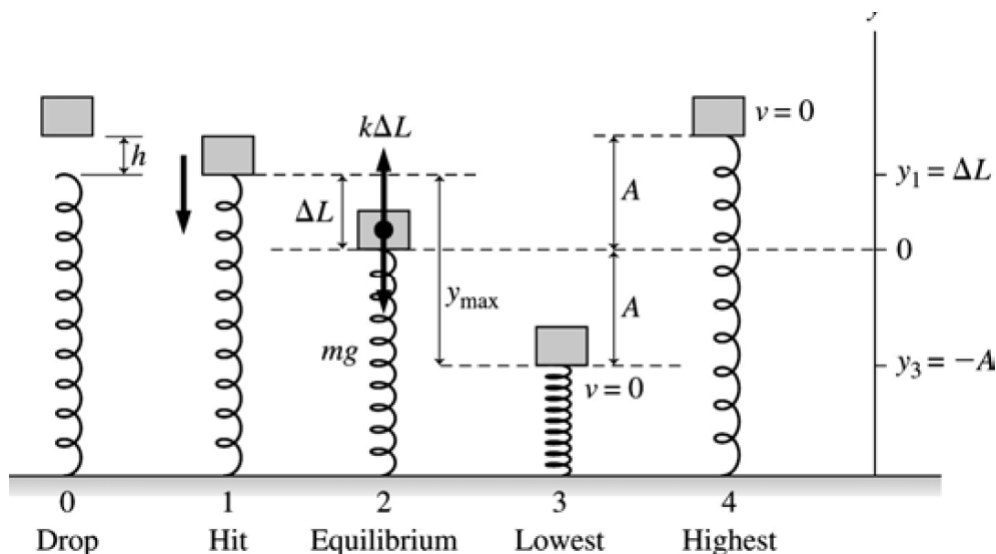
Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Δείτε το Σχήμα 1. Έχουμε τοποθετήσει το σημείο αναφοράς της κατακόρυφης κίνησης του συστήματος στη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, εκεί δηλαδή που θα στεκόταν το ελατήριο αν είχε επάνω του το σώμα σε ηρεμία. Έστω ΔL η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση αυτή. Λόγω ισορροπίας, ο 1ος νόμος του Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \implies F_g = F_s \iff k\Delta L = mg \quad (1)$$

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{d}{\Delta L} \quad (2)$$

αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1). Άρα το μόνο που χρειαζόμαστε είναι το ΔL . Το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο έχοντας κινητική ενέργεια - θέση 1 του σχήματος - ενώ όταν το ελατήριο συμπιέζεται πλήρως - θέση 3 του σχήματος - όλη η κινητική και η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος έχει μετατραπεί σε ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Δεδομένου ότι μόνο η δύναμη του βάρους και η δύναμη του ελατηρίου παράγουν έργο στο σύστημα, και ότι και οι δυο είναι συντηρητικές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των φωτογραφιών 1 και 3.

$$\Delta E_{mech}^{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (3)$$

$$K_1 + U_{g1} = K_3 + U_{g3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}mu_1^2 + mg\Delta L = \frac{1}{2}k(\Delta L + A)^2 - mgA \quad (5)$$

Η ταχύτητα u_1 στη θέση 1 του σχήματος δίνεται αν εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των φωτογραφιών 0 και 1, αν θεωρήσουμε ότι στη θέση 1 η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν.

$$\Delta E_{mech}^{0 \rightarrow 1} = 0 \quad (6)$$

$$K_0 + U_{g0} = K_1 + U_{g1} \quad (7)$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mu_1^2 + 0 \quad (8)$$

$$u_1 = \sqrt{2gh} \quad (9)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στην ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων 1 και 3, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}m2gh + mg\Delta L = \frac{1}{2}k(\Delta L + A)^2 - mgA \quad (10)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε

$$k = \frac{mg}{\Delta L} \quad (11)$$

οπότε

$$\frac{1}{2}m2gh + mg\Delta L = \frac{1}{2}k(\Delta L + A)^2 - mgA \quad (12)$$

$$mgh + mg\Delta L + mgA = \frac{1}{2} \frac{mg}{\Delta L} (\Delta L + A)^2 \quad (13)$$

$$mg(h + A) + mg\Delta L = \frac{1}{2} \frac{mg}{\Delta L} (\Delta L + A)^2 \quad (14)$$

$$h + A + \Delta L = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta L} (\Delta L + A)^2 \quad (15)$$

$$(\Delta L)^2 + 2h(\Delta L) - A^2 = 0 \quad (16)$$

Από τις λύσεις του τριωνύμου, κρατάμε τη θετική:

$$\Delta L = 0.0744 \text{ m} \quad (17)$$

Έτσι

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta L}} = 11.48 \text{ rad/s} \quad (18)$$

Ασκηση 2.

(α) Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \quad (19)$$

με r_1, r_2 τις αποστάσεις από την πηγή. Οπότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \iff \frac{9.6 \cdot 10^{-4}}{I_2} = \left(\frac{30}{6.1} \right)^2 \iff I_2 = 3.97 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 \quad (20)$$

(β) Για το πλάτος μετατόπισης, έχουμε

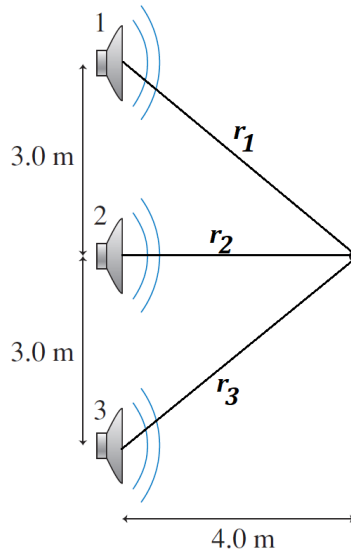
$$s_{max} = \sqrt{\frac{2I}{\rho u \omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.6 \cdot 10^{-4}}{1.21 \cdot 343 \cdot (2\pi \cdot 2000)^2}} = 1.71 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (21)$$

και για το πλάτος πίεσης

$$\Delta P_{max} = (\rho u \omega) s_{max} = 343 \cdot 1.21 \cdot 2\pi 2000 \cdot 1.71 \cdot 10^{-7} = 0.893 \text{ Pa} \quad (22)$$

Ασκηση 3.

Δείτε το Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.

- (α) Τα ηχεία είναι τα ίδια οπότε ο τρόπος συμβολής στο ζητούμενο σημείο καθορίζεται αποκλειστικά από τη διαφορά διαδρομής. Η διαφορά διαδρομής μεταξύ των ηχείων 1 και 2 είναι

$$\Delta r_{12} = |r_2 - r_1| = |4 - \sqrt{3^2 + 4^2}| = |4 - \sqrt{25}| = |4 - 5| = 1 \text{ m} \quad (23)$$

ενώ το μήκος κύματος ισούται με $\lambda = 2.0 \text{ m}$. Οπότε

$$\Delta r_{12} = 1 = \frac{\lambda}{2} \text{ m} \quad (24)$$

περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$, που σημαίνει ότι τα δυο κύματα έχουν καταστρεπτική συμβολή στο ζητούμενο σημείο. Άρα η συνεισφορά του συνολικού ηχητικού κύματος εξαρτάται μόνο από το ηχείο 3. Το πλάτος του τελευταίου είναι A , άρα αυτό είναι το συνολικό πλάτος στο σημείο που μελετάμε.

- (β) Θέλουμε η διαφορά διαδρομής των δυο πρώτων κυμάτων να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ , ώστε να συμβάλλουν ενισχυτικά. Ψάχνουμε λοιπόν το x , τέτοιο ώστε $r'_2 = r_2 + x$, έτσι ώστε

$$\Delta r = |r'_2 - r_1| = m\lambda \iff |4 + x - 5| = 2m \iff |x - 1| = 2m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

Λύνοντας

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x - 1 > 0 \\ 1 - x, & x - 1 < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Άρα

$$x - 1 = 2m \iff x = 2m + 1, \quad m \in \mathbb{Z} \implies x = 1 \text{ m} \quad (27)$$

για $m = 0$, και

$$1 - x = 2m \iff x = 1 - 2m, \quad m \in \mathbb{Z} \implies x = 1 \text{ m} \quad (28)$$

για $m = 0$ ξανά. Τότε, το συνολικό πλάτος στο σημείο ενδιαφέροντος θα ισούται με $A' = 3A$.

- (γ) Όταν το πλάτος είναι μέγιστο, δηλ. $A' = 3A$, η ένταση του κύματος θα είναι

$$I_{max} = cA'^2 = 9cA^2 \quad (29)$$

Οπότε ο ζητούμενος λόγος θα είναι

$$\frac{I_{max}}{I_{speaker}} = \frac{c9A^2}{cA^2} = 9 \quad (30)$$

Ασκηση 4.

(α') Στην περίπτωση αυτή, έχουμε κινούμενη πηγή προς κινούμενο παρατηρητή (επιφάνεια), και ο ένας κινείται προς τον άλλο. Άρα

$$f' = \frac{u + u_o}{u - u_s} f = \frac{329 + 65.8}{329 - 29.9} 1200 = 1584 \text{ Hz} \quad (31)$$

και το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda' = \frac{u}{f'} = 0.2077 \text{ m} \quad (32)$$

(β') Αν η επιφάνεια ανάκλασης στέλνει πίσω τα ηχητικά κύματα που πέφτουν πάνω της, ποιά είναι η συχνότητα και το μήκος κύματος που λαμβάνει πίσω η πηγή; Η επιφάνεια ανάκλασης λειτουργεί σαν δεύτερη πηγή, που εκπέμπει κύματα συχνότητας 1584 Hz πίσω στην επίσης κινούμενη αρχική πηγή - που τώρα είναι παρατηρητής, με την επιφάνεια να παίζει το ρόλο της πηγής. Και οι δυο πλησιάζουν ο ένας τον άλλο, οπότε

$$f'' = \frac{u + u_o}{u - u_s} f' = \frac{329 + 29.9}{329 - 65.8} 1584 = 2159.9 \text{ Hz} \quad (33)$$

και το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda'' = \frac{u}{f''} = 0.1523 \text{ m} \quad (34)$$

Άσκηση 5.

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos(x) = \sin(\pi/2 + x) \quad (35)$$

ώστε να μετατρέψουμε τα συνημίτονα σε ημίτονα, δηλ.

$$\cos(x) + \cos(y) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad (36)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x + y + \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \quad (37)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \quad (38)$$

Για $x := kx + \omega t$ και $y := kx - \omega t$, έχουμε

$$y(x, t) = 0.12 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (39)$$

Για καθένα αρχικό κύμα ξεχωριστά

(α') η γωνιακή συχνότητα θα είναι

$$\omega = 8\frac{\pi}{2} = 4\pi \text{ rad/s} \quad (40)$$

δηλ. $f = 2.0 \text{ Hz}$.

(β') ο κυματαριθμός είναι

$$k = 2\frac{\pi}{2} = \pi \text{ rad/m} \quad (41)$$

οπότε $\lambda = 2\pi/k = 2.0 \text{ m}$.

(γ) η ταχύτητα κάθε κύματος θα είναι

$$u = \lambda f = 4.0 \text{ m/s} \quad (42)$$

Δεσμούς έχουμε όταν

$$\cos(kx) = 0 \iff \cos(kx) = \cos(n\pi + \pi/2) \iff x = \left(n + \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{N} \quad (43)$$

ενώ αντιδεσμούς όταν

$$\cos(kx) = \pm 1 \iff \cos(kx) = \cos(n\pi) \iff x = n, n \in \mathbb{N} \quad (44)$$

Για $x \geq 0$, η θέση του δεσμού που έχει

(δ) τη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 0$, δηλ. $x_0 = 0.5 \text{ m}$.

(ε) τη δεύτερη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 1$, δηλ. $x_1 = 1.5 \text{ m}$.

(ς) την τρίτη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 2$, δηλ. $x_2 = 2.5 \text{ m}$.

Για $x \geq 0$, η θέση του αντιδεσμού που έχει

(ζ) τη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 0$, δηλ. $x_0 = 0.0 \text{ m}$.

(η) τη δεύτερη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 1$, δηλ. $x_1 = 1.0 \text{ m}$.

(θ) την τρίτη μικρότερη τιμή του x είναι για $n = 2$, δηλ. $x_2 = 2.0 \text{ m}$.