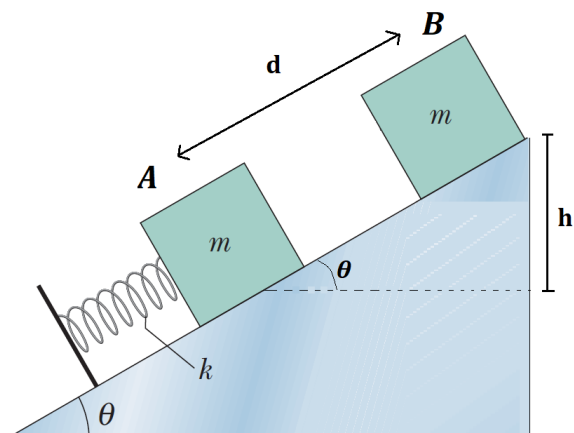


Ασκηση 1.

Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

(α) Η ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος {ελατήριο, σώμα} ισούται με

$$U_s = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 19.6 \cdot (0.2)^2 = 0.392 \text{ J} \quad (1)$$

(β) Το σύστημα {ελατήριο, σώμα, Γη} είναι πολυμελές και απομονωμένο. Μεταξύ των μελών του παράγουν έργο μόνο συντηρητικές δυνάμεις – ελατηρίου και βάρους – στη διαδρομή $A \rightarrow B$. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο. Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή αυτή.

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (2)$$

$$K_A + U_{s_A} + U_{g_A} = K_B + U_{s_B} + U_{g_B} \quad (3)$$

$$0 + U_{s_A} + U_{g_A} = 0 + 0 + U_{g_B} \quad (4)$$

$$U_{g_B} - U_{g_A} = U_{s_A} \quad (5)$$

$$\Delta U_g^{A \rightarrow B} = U_{s_A} = 0.392 \text{ J} \quad (6)$$

(γ) Από την τελευταία σχέση της ΑΔΜΕ, έχουμε

$$U_{g_B} - U_{g_A} = U_{s_A} \quad (7)$$

$$mgh - 0 = U_{s_A} \quad (8)$$

$$mgd \sin(\theta) = U_{s_A} \quad (9)$$

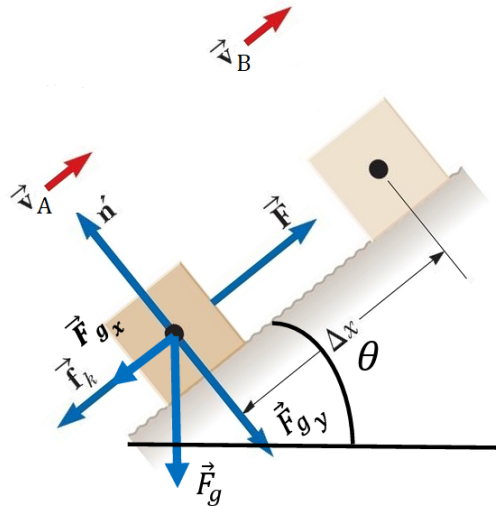
$$d = \frac{U_{s_A}}{mg \sin(\theta)} \quad (10)$$

$$= \frac{0.392}{2 \cdot 9.8 \cdot \frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$= 0.04 \text{ m} \quad (12)$$

Ασκηση 2.

Δείτε το Σχήμα 2. Από τη στιγμή που σε οποιαδήποτε επιλογή συστήματος δρα η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ παράγοντας έργο, τα συστήματα είναι όλα μη απομονωμένα. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με σημείο αναφοράς $(0, 0)$ τη θέση A και άξονα $x'x$ επάνω στο κεκλιμένο. Θετικές φορές θεωρούνται οι συμβατικές.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 2.

- Θεωρούμε το σύστημα {σώμα}, μονομελές και μη απομονωμένο. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ισχύει το ΘΜΚΕΕ :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (13)$$

$$= W_F + W_n + W_{F_{gy}} + W_{F_{gx}} + W_{f_k} \quad (14)$$

$$= W_F + W_{F_{gx}} + W_{f_k} \quad (15)$$

με τα έργα των $\vec{F}_{gy}$, $\vec{n}$ να είναι μηδενικά λόγω καθετότητας των δυνάμεων στη μετατόπιση του σώματος. Έτσι

$$\Delta K = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{F}_{gx} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{f}_k \cdot \Delta \vec{x} \quad (16)$$

$$= F \Delta x - mg \sin(\theta) \Delta x - f_k \Delta x \quad (17)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (18)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{gy} = \vec{0} \quad (19)$$

$$n = F_{gy} = 0 \quad (20)$$

$$n = F_{gy} = mg \cos(\theta) \quad (21)$$

οπότε

$$\Delta K = F \Delta x + mg \sin(\theta) \Delta x - \mu_k n \Delta x \quad (22)$$

$$= F \Delta x - mg \sin(\theta) \Delta x - \mu_k mg \cos(\theta) \Delta x \quad (23)$$

$$\mu_k = \frac{F \Delta x - \Delta K - mg \sin(\theta) \Delta x}{mg \cos(\theta) \Delta x} = 0.7423 \quad (24)$$

- Θεωρούμε το σύστημα {σώμα, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ισχύει η ΑΔΕ :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_g^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (25)$$

$$= W_F + W_n + W_{f_k} \quad (26)$$

$$= W_F + W_{f_k} \quad (27)$$

με το έργο της $\vec{n}$ να είναι μηδενικό λόγω καθετότητας της δύναμης στη μετατόπιση του σώματος. Έτσι

$$\Delta K + \Delta U_g = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{f}_k \cdot \Delta \vec{x} \quad (28)$$

$$= F \Delta x - f_k \Delta x \quad (29)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (30)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \quad (31)$$

$$n = F_{g_y} = 0 \quad (32)$$

$$n = F_{g_y} = mg \cos(\theta) \quad (33)$$

οπότε, θεωρώντας επίπεδο βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στην αρχική θέση του σώματος,

$$\Delta K + \Delta U_g = F \Delta x - \mu_k n \Delta x \quad (34)$$

$$\Delta K + U_{g_B} - U_{g_A} = F \Delta x - \mu_k mg \cos(\theta) \Delta x \quad (35)$$

$$\Delta K + mgh - 0 = F \Delta x - \mu_k mg \cos(\theta) \Delta x \quad (36)$$

$$\Delta K + mg \Delta x \sin(\theta) = F \Delta x - \mu_k mg \cos(\theta) \Delta x \quad (37)$$

$$\mu_k = \frac{F \Delta x - \Delta K - mg \sin(\theta) \Delta x}{mg \cos(\theta) \Delta x} = 0.7423 \quad (38)$$

- Θεωρούμε το σύστημα {σώμα, Γη, κεκλιμένο}, πολυμελές και μη απομονωμένο. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ισχύει η ΑΔΕ :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_g^{A \rightarrow B} + \Delta E_{th}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (39)$$

$$= W_F + W_n \quad (40)$$

$$= W_F \quad (41)$$

με το έργο της $\vec{n}$ να είναι μηδενικό λόγω καθετότητας της δύναμης στη μετατόπιση του σώματος. Έτσι, θεωρώντας επίπεδο βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στην αρχική θέση του σώματος,

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \quad (42)$$

$$\Delta K + U_{g_B} - U_{g_A} + f_k \Delta x = F \Delta x \quad (43)$$

$$\Delta K + U_{g_B} - U_{g_A} + \mu_k n \Delta x = F \Delta x \quad (44)$$

$$\Delta K + mgh - 0 + \mu_k n \Delta x = F \Delta x \quad (45)$$

$$\Delta K + mg \Delta x \sin(\theta) + \mu_k n \Delta x = F \Delta x \quad (46)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (47)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \quad (48)$$

$$n = F_{g_y} = 0 \quad (49)$$

$$n = F_{gy} = mg \cos(\theta) \quad (50)$$

οπότε

$$\Delta K + mg\Delta x \sin(\theta) + \mu_k mg\Delta x \cos(\theta) = F\Delta x \quad (51)$$

$$\mu_k mg\Delta x \cos(\theta) = F\Delta x - \Delta K - mg\Delta x \sin(\theta) \quad (52)$$

$$\mu_k = \frac{F\Delta x - \Delta K - mg\sin(\theta)\Delta x}{mg\cos(\theta)\Delta x} = 0.7423 \quad (53)$$

- Θεωρούμε το σύστημα {σώμα, κεκλιμένο}, πολυμελές και μη απομονωμένο. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ισχύει η ΑΔΕ :

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta E_{th}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (54)$$

$$= W_F + W_n + W_{F_{gx}} + W_{F_{gy}} \quad (55)$$

$$= W_F + W_{F_{gx}} \quad (56)$$

με τα έργα των $\vec{F}_{gy}$, $\vec{n}$ να είναι μηδενικά λόγω καθετότητας των δυνάμεων στη μετατόπιση του σώματος. Έτσι,

$$\Delta K + \Delta E_{th} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{F}_{gx} \cdot \Delta x \quad (57)$$

$$\Delta K + f_k \Delta x = F\Delta x - F_{gx} \Delta x \quad (58)$$

$$\Delta K + \mu_k n \Delta x = F\Delta x - mg \sin(\theta) \Delta x \quad (59)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ισχύει ο 1ος νόμος του Newton

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (60)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{gy} = \vec{0} \quad (61)$$

$$n = F_{gy} = 0 \quad (62)$$

$$n = F_{gy} = mg \cos(\theta) \quad (63)$$

οπότε

$$\Delta K + \mu_k mg\Delta x \cos(\theta) = F\Delta x - mg \sin(\theta) \Delta x \quad (64)$$

$$\mu_k mg\Delta x \cos(\theta) = F\Delta x - \Delta K - mg\Delta x \sin(\theta) \quad (65)$$

$$\mu_k = \frac{F\Delta x - \Delta K - mg \sin(\theta) \Delta x}{mg \cos(\theta) \Delta x} = 0.7423 \quad (66)$$

Ασκηση 3.

Δείτε το Σχήμα 3. Θεωρούμε ως σύστημα το {μπάλα, ελατήριο, Γη}, πολυμελές κι απομονωμένο.

- (α') Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ισχύει η ΑΔΜΕ, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι αυτή του ελατηρίου, που είναι συντηρητική.

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (67)$$

$$K_A + U_{s_A} = K_B + U_{s_B} \quad (68)$$

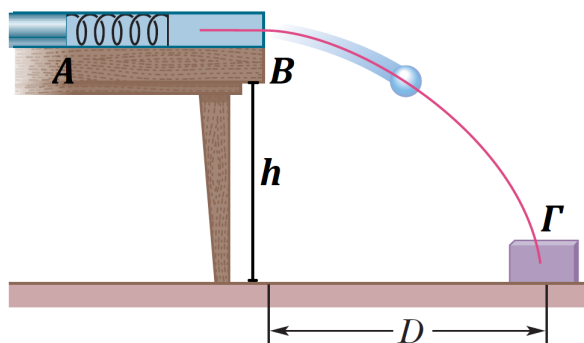
$$0 + \frac{1}{2} kx^2 = K_B + 0 \quad (69)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 = \frac{1}{2} kx^2 \quad (70)$$

$$u_B^2 = \frac{kx^2}{m} \quad (71)$$

$$u_B = x \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (72)$$

Η ταχύτητα αυτή έχει οριζόντια διεύθυνση.



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 3.

(β) Στη διαδρομή $B \rightarrow \Gamma$, η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Θεωρούμε $t = 0$ όταν η μπάλα βρίσκεται στη θέση B και σύστημα συντεταγμένων με σημείο αναφοράς $(0, 0)$ τη θέση στο έδαφος κάτω από το σημείο B . Στον άξονα $x'x$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οπότε

$$x_{\Gamma} = x_B + u_{x_B}t \iff x_{\Gamma} = 0 + x\sqrt{\frac{k}{m}}t \implies t = \frac{x_{\Gamma}}{x\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (73)$$

ενώ στον $y'y$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε

$$y_{\Gamma} = y_B + u_{y_B}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (74)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (73) παραπάνω, παίρνουμε

$$y_{\Gamma} = y_B + u_{y_B}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (75)$$

$$0 = h + 0 \cdot t - \frac{1}{2}g \frac{x_{\Gamma}^2}{x^2 \frac{k}{m}} \quad (76)$$

$$h = \frac{gm x_{\Gamma}^2}{2k x^2} \quad (77)$$

(γ) Για τον Πάνο έχουμε $x = 0.011$ m και $x_{\Gamma} = 2.2 - 0.27 = 1.93$ m, ενώ για τη Μυρέτα θέλουμε x = άγνωστο αλλά $x_{\Gamma} = 2.2$ m. Οπότε

$$h = \frac{gm(1.93)^2}{2k(0.011)^2} \quad (78)$$

$$h = \frac{gm(2.2)^2}{2kx^2} \quad (79)$$

Εξισώνοντας

$$\frac{gm(1.93)^2}{2k(0.011)^2} = \frac{gm(2.2)^2}{2kx^2} \quad (80)$$

$$6360.4x^2 = 4.84 \quad (81)$$

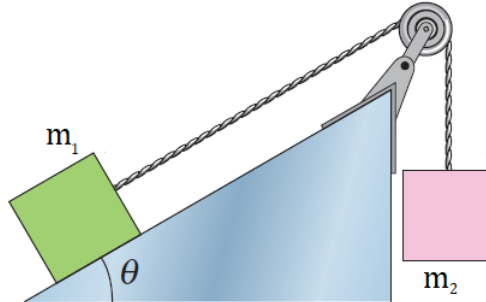
$$x^2 = 1.5722 \cdot 10^{-4} \quad (82)$$

$$x = -0.0125 \text{ m} \quad (83)$$

με το πρόσημο να δηλώνει συμπίεση προς τα αριστερά.

Ασκηση 4.

Αν το σώμα m_2 κατέλθει απόσταση $h = 0.25$ m, τότε το σώμα m_1 ανέρχεται στο επικλινές απόσταση $d = h = 0.25$ m. Θεωρούμε τα δυο σώματα ως ένα, άρα θα έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας. Έστω το σύστημα {σώμα m_1 }, μονομελές και μη απομονωμένο. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή του σώματος m_1 από την αρχική του θέση ως 0.125 m μετά.



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 4.

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (84)$$

$$K_B - K_A = W_{F_{gx}} + W_T \quad (85)$$

$$K_B - 0 = -m_1 g \sin(\theta) d + T d \quad (86)$$

Για το σώμα μάζας m_2 , ισχύει ο 2ος νόμος του Newton στην κατακόρυφη κίνησή του.

$$\sum \vec{F}_y = m_2 \vec{a}_y \iff \vec{T} + \vec{F}_g = m_2 \vec{a}_y \implies T - F_g = m_2 a_y \implies T = m_2 a_y + m_2 g = m_2 (a_y + g) \quad (87)$$

Θεωρούμε άξονα $x'x$ παράλληλο στο κεκλιμένο. Ισχύει ο 2ος νόμος Newton στο σώμα m_1 .

$$\sum \vec{F}_x = m_1 a_x \iff \vec{F}_{gx} + \vec{T} = m_1 a_x \implies -m_1 g \sin(\theta) + T = m_1 a_x \implies T = m_1 (g \sin(\theta) + a_x) \quad (88)$$

Εξισώνουμε τις τάσεις

$$m_2 (a_y + g) = m_1 (g \sin(\theta) + a_x) \quad (89)$$

Λόγω της ταυτόχρονης κίνησης των σωμάτων, το μέτρο της επιτάχυνσής τους θα είναι το ίδιο,

$$|\vec{a}_y| = |\vec{a}_x| = -a_y = a_x = a$$

οπότε

$$m_2 (-a + g) = m_1 (g \sin(\theta) + a) \quad (90)$$

$$a m_2 + a m_1 = -m_1 g \sin(\theta) + m_2 g \quad (91)$$

$$a (m_1 + m_2) = g (m_2 - m_1 \sin(\theta)) \quad (92)$$

$$a = \frac{g (m_2 - m_1 \sin(\theta))}{m_1 + m_2} \quad (93)$$

$$= 4.9 \text{ m/s}^2 \quad (94)$$

Άρα

$$T = m_1 (g \sin(\theta) + a) = 9.8 \text{ N} \quad (95)$$

και έτσι

$$K_B = -m_1 g \sin(\theta) d + T d \quad (96)$$

$$= -1 \cdot 9.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.25 + 9.8 \cdot 0.25 \quad (97)$$

$$= 1.225 \text{ J} \quad (98)$$

Για το σώμα μάζας m_2 στη διαδρομή από την ακινησία ως τη θέση καθόδου μετά από $h = 0.25 \text{ m}$, θα έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_y h = 0^2 + 2 \cdot 4.9 \cdot 0.25 = 2.45 \implies u_f = 1.565 \text{ m/s} \quad (99)$$

και άρα η κινητική του ενέργεια θα είναι

$$K_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 u_f^2 = 2.45 \text{ J} \quad (100)$$

Η συνολική κινητική ενέργεια των δυο σωμάτων θα είναι

$$K_{tot} = K_B + K_{m_2} = 3.675 \text{ J} \quad (101)$$

Μια πιο εύκολη (!) λύση περιλαμβάνει ενεργειακά θεωρήματα αποκλειστικά. Το σώμα μάζας m_1 ανέρχεται κατακόρυφη απόσταση $\Delta y = h \sin(\theta) = 0.25 \sin(30^\circ) = 0.125 \text{ m}$ όταν το σώμα μάζας m_2 κατεβαίνει 0.25 m , ενώ η απόσταση που καλύπτει πάνω στο κεκλιμένο παραμένει ίση με $h = 0.25 \text{ m}$. Στο σύστημα {σώματα, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο (παράγουν έργο οι τάσεις του νήματος) θεωρούμε ότι μηδενική βαρυτική δυναμική ενέργεια έχουν τα σώματα όταν βρίσκονται (α) το σώμα m_1 στην αρχική του θέση, (β) το σώμα m_2 στην τελική του θέση. Η μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια τους ισούται με

$$\Delta U_g = \Delta U_{g_{m_1}} + \Delta U_{g_{m_2}} \quad (102)$$

$$= U_{g_{m_1}}^f - U_{g_{m_1}}^i + U_{g_{m_2}}^f - U_{g_{m_2}}^i \quad (103)$$

$$= m_1 g \Delta y - 0 + 0 - m_2 g h \quad (104)$$

$$= g(m_1 \Delta y - m_2 h) \quad (105)$$

Από την ΑΔΕ στη διαδρομή των δυο σωμάτων από την αρχική τους θέση ως την τελική, έχουμε

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \quad (106)$$

$$\Delta K + \Delta U_g = W_{T \text{ στο } m_1} + W_{T \text{ στο } m_2} \quad (107)$$

$$K_f - K_i + g(m_1 \Delta y - m_2 h) = T h - T h = 0 \quad (108)$$

$$K_f = K_i + g(m_2 h - m_1 \Delta y) \quad (109)$$

$$= 0 + 9.8 \cdot (2 \cdot 0.25 - 1 \cdot 0.125) \quad (110)$$

$$= 3.675 \text{ J} \quad (111)$$

Άσκηση 5.

Για την περίπτωση (α), θεωρούμε το σύστημα {πυροσβέστης, Γη}, πολυμελές και απομονωμένο, με μόνη δύναμη που παράγει έργο αυτή του βάρους, που είναι και συντηρητική. Ισχύει η ΑΔΜΕ από το ύψος h του στύλου ως τη βάση του, με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος.

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (112)$$

$$K_A + U_{g_A} = K_B + U_{g_B} \quad (113)$$

$$0 + mgh = K_B + 0 \quad (114)$$

$$K_B = mgh \quad (115)$$

$$= 70 \cdot 9.8 \cdot 4.0 = 2744 \text{ J} \quad (116)$$

Για την περίπτωση (β), θεωρούμε το σύστημα {πυροσβέστης, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο. Ισχύει η ΑΔΕ από το ύψος του στύλου ως τη βάση του, με επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος.

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (117)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow B} + \Delta U_g^{A \rightarrow B} = W_{f_k} \quad (118)$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = -f_k \Delta y \quad (119)$$

$$K_B - 0 + 0 - mgh = -500h \quad (120)$$

$$= mgh - 500h \quad (121)$$

$$= 70 \cdot 9.8 \cdot 4.0 - 500 \cdot 4 \quad (122)$$

$$= 2744 - 200 = 744 \text{ J} \quad (123)$$