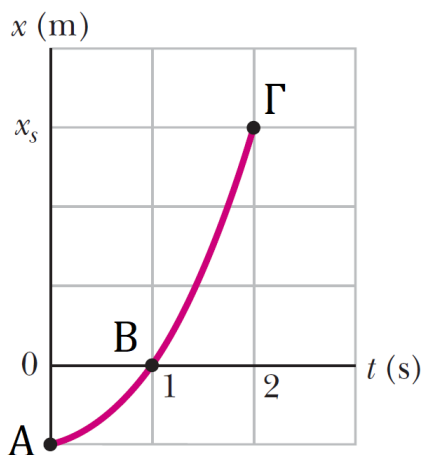


Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Το σώμα επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση, άρα στη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ του Σχήματος 1, ισχύουν οι εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

$$x_{\Gamma} = x_A + u_{x_A}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (1)$$

$$6 = -2 + 2u_{x_A} + \frac{1}{2}a_x \cdot 2^2 \quad (2)$$

$$8 = 2u_{x_A} + 2a_x \quad (3)$$

Στη διαδρομή $A \rightarrow B$, έχουμε το ίδιο φαινόμενο, οπότε

$$x_B = x_A + u_{x_A}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (4)$$

$$0 = -2 + u_{x_A} + \frac{1}{2}a_x \quad (5)$$

$$2 = u_{x_A} + \frac{1}{2}a_x \implies u_{x_A} = 2 - \frac{1}{2}a_x \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση (3), παίρνουμε

$$8 = 4 - a_x + 2a_x \iff 8 = 4 + a_x \iff a_x = 4 \text{ m/s}^2 \quad (7)$$

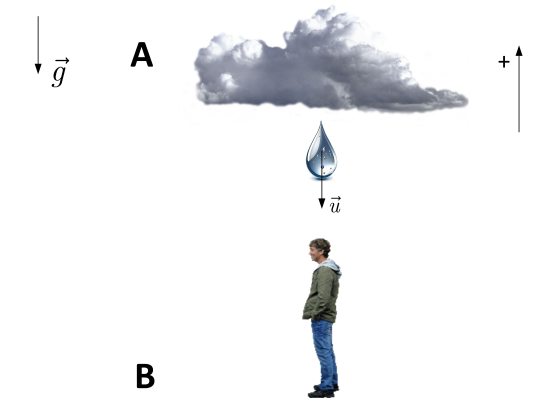
Άρα

$$\vec{a} = (4 \text{ m/s}^2) \vec{i} \quad (8)$$

αφού η κίνηση είναι μονοδιάστατη.

Ασκηση 2.

Δείτε το Σχήμα 2. Η σταγόνα πέφτει ελεύθερα, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση σε νοητό άξονα



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 2.

$y'y$ - ή εναλλακτικά, ελεύθερη πτώση - με θετική φορά προς τα πάνω. Θεωρούμε $y = 0$ στη θέση B , στο έδαφος. Έστω A η θέση του σύννεφου, απ' όπου πέφτει η σταγόνα. Η σταγόνα μοντελοποιείται ως σωματίδιο και στη διαδρομή $A \rightarrow B$ έχουμε

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \quad (9)$$

$$u_B^2 = 0 - 2g(y_B - y_A) \quad (10)$$

$$= -2 \cdot 9.8 \cdot (0 - 1770) \quad (11)$$

$$= 33320 \quad (12)$$

$$u_B = \pm 182.53 \text{ m/s} \quad (13)$$

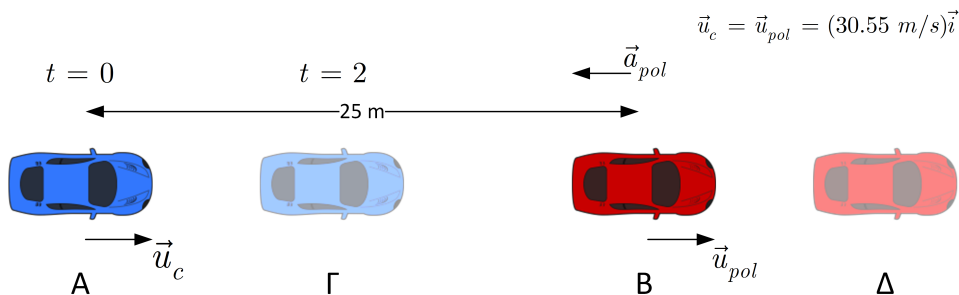
Διαλέγουμε την αρνητική λύση καθώς το διάνυσμα της ταχύτητας στη θέση B έχει φορά προς τα κάτω - αντίθετη της θετικής φοράς που επιλέξαμε. Οπότε

$$\vec{u}_B = (-182.53 \text{ m/s})\vec{j} \quad (14)$$

Αν μετατρέψουμε την ταχύτητα σε χιλιόμετρα της ώρα, βλέπουμε ότι ισούται με 657.108 km/h . Σίγουρα δε θα ήταν θανάσιμο να περπατήσουμε στη βροχή αλλά πιθανότατα δε θα ήταν μια ευχάριστη διαδικασία (μάλλον οριακά επώδυνη).

Ασκηση 3.

Δείτε το Σχήμα 3. Θεωρούμε το αμάξι ως σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε νοητό άξονα $x'x$. Θεωρούμε



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 3.

$t = 0$, $x_A = 0$, όταν το αμάξι μας έχει τη θέση A όπου το βλέμμα μας αποσπάται από το δρόμο και ταυτόχρονα το περιπολικό ξεκινά το φρενάρισμα.

- (α) Πρέπει να βρούμε ποση απόσταση έχουμε καλύψει στα δυο αυτά δευτερόλεπτα και πόση απόσταση έχει καλύψει το περιπολικό στο ίδιο διάστημα. Έστω η θέση Γ, όπου βρίσκεται το αμάξι μας ακριβώς στη συμπλήρωση των δυο δευτερολέπτων. Από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή ταχύτητα έχουμε

$$x_{\Gamma} = x_A + u_{x_A} t \quad (15)$$

$$= 0 + 30.55 \cdot 2 \quad (16)$$

$$= 61.11 \text{ m} \quad (17)$$

Άρα το αμάξι διένυσε 61.11 μέτρα στο χρονικό διάστημα των δυο δευτερολέπτων. Το περιπολικό μοντελοποιείται ως σώμα υπο κίνηση με σταθερή επιτάχυνση σε νοητό άξονα x' . Για τη διαδρομή $B \rightarrow \Delta$ ισχύει

$$x_{\Delta} = x_B + u_{x_B} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (18)$$

$$= 0 + 30.55 \cdot 2 + \frac{1}{2} (-5) \cdot 2^2 \quad (19)$$

$$= 61.11 - 10 \quad (20)$$

$$= 51.11 \text{ m} \quad (21)$$

Άρα το περιπολικό προχώρησε 51.11 μέτρα. Τα δυο οχήματα είχαν αρχική απόσταση 25 μέτρων, το ένα προχώρησε 61.11 μέτρα, το άλλο 51.11 μέτρα, άρα η απόστασή τους όταν το βλέμμα μας επέστρεψε στο δρόμο ήταν πλέον 15 μέτρα.

- (β) Προσθέτουμε 0.4 δευτερόλεπτα στην αρχική μας συζήτηση. Στο χρονικό διάστημα των 2.4 (πλέον) δευτερολέπτων, το αμάξι μας προχωρά κατά

$$x_{\Gamma} = x_A + u_{x_A} t \quad (22)$$

$$= 0 + 30.55 \cdot 2.4 \quad (23)$$

$$= 73.32 \text{ m} \quad (24)$$

ενώ το περιπολικό

$$x_{\Delta} = x_B + u_{x_B} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (25)$$

$$= 0 + 30.55 \cdot 2.4 + \frac{1}{2} (-5) (2.4)^2 \quad (26)$$

$$= 73.32 + (-14.4) \quad (27)$$

$$= 58.92 \text{ m} \quad (28)$$

Η απόσταση των δυο οχημάτων είναι τώρα 14.4 μέτρα μικρότερη. Έτσι, κατά την έναρξη του φρεναρίσματος, έστω $t = 0$ ο χρόνος που αυτό συμβαίνει, η απόσταση μεταξύ των δυο οχημάτων είναι 10.6 μέτρα. Η ταχύτητα του περιπολικού τη χρονική στιγμή t_0 είναι $30.55 - 5 \cdot 2.4 = 18.55 \text{ m/s}$. Η σύγκρουση γίνεται όταν

$$x_{car} = x_{police} \quad (29)$$

χρησιμοποιώντας ως $x_A = 0$ τη θέση του αμαξιού και $x_A = 10.6$ τη θέση του περιπολικού. Άρα

$$x_{B,police} = x_{A,police} + u_{x_{A,police}} t - \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (30)$$

$$x_{B,car} = x_{A,car} + u_{x_{A,car}} t - \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (31)$$

δηλαδή

$$x_{B,police} = 10.6 + 18.55t - \frac{1}{2} 5t^2 \quad (32)$$

$$x_{B,car} = 0 + 30.55t - \frac{1}{2} 5t^2 \quad (33)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$10.6 = (30.55 - 18.55)t \iff t = 0.8833 \text{ s} \quad (34)$$

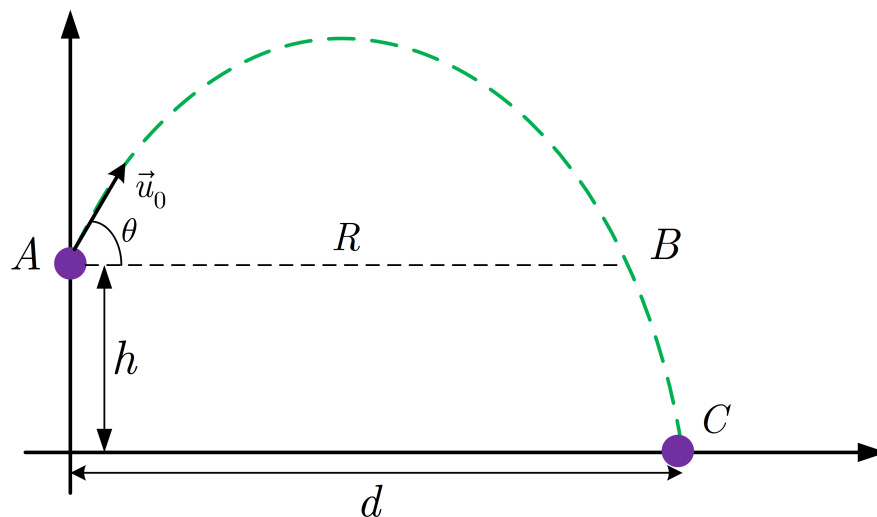
Αυτή τη χρονική στιγμή, η ταχύτητά μας (του αμαξιού) θα είναι

$$u = u_0 + a_x t \iff 26.145 \text{ m/s} \quad (35)$$

(γ') Να φοράτε ζώνη και να μη χρησιμοποιείτε κινητό στο αυτοκίνητο!

Ασκηση 4.

Δείτε το Σχήμα 4. Στην παραπάνω εικόνα, R είναι το εύρος της βολής. Η απόσταση που ζητείται στο δικό μας πρόβλη-



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 4.

μα συμβολίζεται με d . Θεωρούμε τις συμβατικές θετικές φορές (πάνω, δεξιά). Σημείο αναφοράς μας είναι το έδαφος h μέτρα κάτω από το σημείο ρίψης, οπότε το σημείο A έχει συντεταγμένες $(x_A, y_A) = (0, h)$ και το σημείο C έχει συντεταγμένες $(x_C, y_C) = (d, 0)$ (και σε περίπτωση που το σκεφτήκατε, το σημείο B έχει συντεταγμένες $(x_B, y_B) = (R, h)$).

Η κίνηση του σώματος μπορεί να περιγραφεί από το μοντέλο της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή ταχύτητα στον άξονα $x'x$ και από το μοντέλο της ευθύγραμμης επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα $y'y$, με επιτάχυνση $\vec{a}_y = -\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$.

Από το σημείο A ως το σημείο C , στην οριζόντια συνιστώσα της κίνησης με αρχική ταχύτητα $\vec{u}_0 = \vec{u}_i$, ισχύει

$$x_C = x_A + u_{0x}t \iff d = 0 + u_i \cos(\theta)t = u_i \cos(\theta)t \quad (36)$$

Στην ίδια διαδρομή, στην κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης ισχύει

$$y_C = y_A + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff y_C - y_A = u_i \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \iff gt^2 - 2u_i \sin(\theta)t + 2(y_C - y_A) = 0 \quad (37)$$

Λύνοντας

$$t = \frac{2u_i \sin(\theta) + \sqrt{4u_i^2 \sin^2(\theta) - 8g(y_C - y_A)}}{2g} = \frac{u_i \sin(\theta) + \sqrt{u_i^2 \sin^2(\theta) + 2g(y_A - y_C)}}{g} \quad (38)$$

και άρα

$$d = R_{gen} = u_i \cos(\theta)t = \frac{u_i \cos(\theta)}{g} \left(u_i \sin(\theta) + \sqrt{(u_i \sin(\theta))^2 + 2g(y_A - y_C)} \right) \quad (39)$$

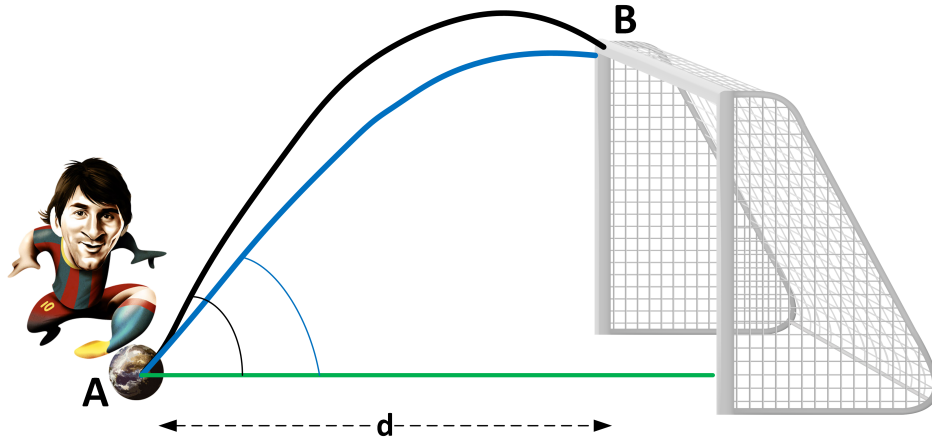
κι αν θέσουμε $y_A - y_C = y_i - y_f$ παίρνουμε

$$R_{gen} = \frac{u_i \cos(\theta)}{g} \left(u_i \sin(\theta) + \sqrt{(u_i \sin(\theta))^2 + 2g(y_i - y_f)} \right) \quad (40)$$

Αν $y_i = y_f$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται η εξίσωση του εύρους βολής, όπως την έχουμε γνωρίσει στο μάθημα.

Άσκηση 5.

Δείτε το Σχήμα 5. Θεωρούμε σημείο αναφοράς $(0, 0)$ του συστήματος αξόνων μας τη θέση A , όπου $x_A = y_A = 0$, στο



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 5.

σημείο εκκίνησης της τροχιάς της μπάλας. Θεωρούμε επίσης θέση B , όπου αντιστοιχεί στο ύψος της δοκού. Η μπάλα μοντελοποιείται ως σώμα εκτελούσα βολή, με $t = 0$ όταν η μπάλα φεύγει από το πόδι του παίκτη. Θεωρούμε ως θετικές φορές τις συμβατικές. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας έχει μέτρο $u_A = 25 \text{ m/s}$.

(α) Στον άξονα $x'x$ η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα από τη θέση A ως ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς της, x , ισχύει

$$x = x_A + u_{xA} t \iff t = \frac{x}{u_A \cos(\theta)} \quad (41)$$

Στον άξονα $y'y$, η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, αυτής της βαρύτητας. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ θα έχουμε

$$y_B = y_A + u_{yA} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (42)$$

$$= 0 + u_A \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (43)$$

και με αντικατάσταση της εξίσωσης (41) παραπάνω παίρνουμε

$$y_B = u_A \sin(\theta) \left(\frac{x}{u_A \cos(\theta)} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u_A \cos(\theta)} \right)^2 \quad (44)$$

$$= x \tan(\theta) - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_A^2 \cos^2(\theta)} \quad (45)$$

$$= x \tan(\theta) - \frac{g x^2}{2 u_A^2 \cos^2(\theta)} \quad (46)$$

(β) Με χρήση της σχέσης

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta) \quad (47)$$

έχουμε

$$y = x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2u_A^2 \cos^2(\theta)} \quad (48)$$

$$= x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2u_A^2} (1 + \tan^2(\theta)) \quad (49)$$

$$= x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2u_A^2} - \frac{gx^2}{2u_A^2} \tan^2(\theta) \quad (50)$$

$$\frac{gx^2}{2u_A^2} \tan^2(\theta) - x \tan(\theta) + y + \frac{gx^2}{2u_A^2} = 0 \quad (51)$$

και θέτοντας $c = \frac{gx^2}{2u_A^2}$ παίρνουμε

$$c \tan^2(\theta) - x \tan(\theta) + y + c = 0 \quad (52)$$

Θέτοντας $z = \tan(\theta)$ έχουμε

$$cz^2 - xz + (y + c) = 0 \quad (53)$$

και με $x = d = 50 \text{ m}$ και $y = 3.44 \text{ m}$ παίρνουμε $c = 19.6$, και τότε οι ρίζες του πολυωνύμου θα είναι

$$z_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 4 \cdot 19.6 \cdot 23.04}}{2 \cdot 19.6} \implies z_1 = 0.603 \text{ ή } z_2 = 1.947 \quad (54)$$

Οπότε τελικά

$$\theta_1 = \tan^{-1}(0.603) = 31.09^\circ \quad (55)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}(1.947) = 62.81^\circ \quad (56)$$

Άσκηση 6.

(α) Θέλουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση η οποία είναι

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \frac{d}{dt} (6t - 4t^2) \vec{i} + \frac{d}{dt} 8t \vec{j} = (6 - 8t) \vec{i} \quad (57)$$

Για $t = 3 \text{ s}$, $\vec{a}(3) = (-18 \text{ m/s}^2) \vec{i}$.

(β) Η επιτάχυνση μηδενίζεται όταν $a(t) = 0$ για κάποιο t , δηλ.

$$6 - 8t = 0 \iff 8t = 6 \iff t = \frac{3}{4} \text{ s} \quad (58)$$

(γ) Η ταχύτητα δε μηδενίζεται ποτέ, αφού η y -συνιστώσα της είναι πάντα σταθερή και ίση με 8 m/s .

(δ) Η ταχύτητά του ισούται με 10 m/s όταν

$$|\vec{u}| = \sqrt{(6t - 4t^2)^2 + 8^2} = 10 \quad (59)$$

$$100 = (6t - 4t^2)^2 + 64 \quad (60)$$

$$36 = (6t - 4t^2)^2 \quad (61)$$

$$4t^2 - 6t \pm 6 = 0 \quad (62)$$

Το παραπάνω πολυώνυμο έχει δυο ρίζες, εκ των οποίων κρατάμε τη θετική, $t = 2.2 \text{ s}$.