

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 6/10/2025, έως 11:00, γραπτά
ή ηλεκτρονικά στο: csd4876@csd.uoc.gr ως την ίδια ώρα.

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Κρατήστε 3 ψηφία στις πράξεις σας.

Κάποιες από τις δοσμένες απαντήσεις ίσως να είναι προσεγγιστικές και να διαφέρουν από τις δικές σας
σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο μετά το 2ο.

Ασκηση 1.

Θα χρειαστούμε τις σχέσεις

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

για το μέτρο και τη γωνία των διανυσμάτων με συντεταγμένες (x, y) .

(α') Είναι

$$\rho = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \quad (3)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-8}{2} = \tan^{-1}(-4) = -1.3258 \text{ rad} \implies \theta = -75.964^\circ \quad (4)$$

(β') Είναι

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (5)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{-2} + \pi = 2.034 \text{ rad} \implies \theta = 116.57^\circ \quad (6)$$

(γ') Είναι

$$\vec{a} + \vec{b} = -4\vec{j} \quad (7)$$

οπότε

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4 \quad (8)$$

και

$$\theta = -\pi/2 \text{ rad} \implies \theta = -90^\circ \quad (9)$$

(δ) Είναι

$$\vec{b} - \vec{a} = -4\vec{i} + 12\vec{j} \quad (10)$$

οπότε

$$\rho = \sqrt{(-4)^2 + 12^2} = 4\sqrt{10} \quad (11)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{12}{-4} + \pi = \tan^{-1}(-3) + \pi = 1.8925 \text{ rad} \implies \theta = 108.43^\circ \quad (12)$$

(ε) Είναι

$$\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} - 12\vec{j} \quad (13)$$

οπότε

$$\rho = \sqrt{4^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{10} \quad (14)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-12}{4} = \tan^{-1}(-3) = -1.249 \text{ rad} \implies \theta = -71.565^\circ \quad (15)$$

(ζ') Τα δυο διανύσματα είναι αντίθετα μεταξύ τους, οπότε η γωνία τους ισούται με $\theta = \pi \text{ rad}$ ή $\theta = 180^\circ$.**Ασκηση 2.**

Αφού το μέτρο του ζητούμενου διανύσματος είναι 6, τότε

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 6 \implies |\vec{x}|^2 = 6 \iff x_0^2 + y_0^2 = 6 \quad (16)$$

Αφού το διάνυσμα $\vec{x}$ και το διάνυσμα $(2\vec{i} - 3\vec{j})$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, οι γωνίες τους θα είναι συμπληρωματικές, άρα αν

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-3}{2} = -0.9828 \text{ rad} \implies \phi = -56.31^\circ \quad (17)$$

τότε η γωνία του ζητούμενου διανύσματος θα είναι

$$\theta = 180 - 56.31^\circ = 123.69^\circ \implies \theta = 2.1588 \text{ rad} \quad (18)$$

Έχοντας το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_0 = |\vec{x}| \cos(\theta) = -3.3282 \quad (19)$$

$$y_0 = |\vec{x}| \sin(\theta) = 4.9923 \quad (20)$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι το

$$\vec{x} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = (-3.3282)\vec{i} + 4.9923\vec{j} \quad (21)$$

Ασκηση 3.

Ξέρουμε ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (22)$$

Άρα

$$(\alpha) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}) = (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}) = 3$$

$$(\beta) \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} - (\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k})) = (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (0\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}) = 23$$

$$(\gamma) (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = ((2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}))((2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})) = (-10)(+14) = 140$$

Ασκηση 4.

Αν το διάνυσμα $\vec{c}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}$, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν, δηλ.

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad (23)$$

και επίσης μας δίνεται ότι

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \quad (24)$$

Μαζί

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \quad (26)$$

που μας δίνει

$$(x_c \vec{i} + y_c \vec{j}) \cdot (\vec{i} - 4\vec{j}) = 0 \iff x_c - 4y_c = 0 \iff x_c = 4y_c \quad (27)$$

και

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \iff (x_c \vec{i} + y_c \vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 5\vec{j}) = 3x_c - 5y_c = 1 \iff 12y_c - 5y_c = 1 \iff y_c = \frac{1}{7} \quad (28)$$

και άρα

$$x_c = \frac{4}{7} \quad (29)$$

Συνολικά

$$\vec{c} = \frac{4}{7}\vec{i} + \frac{1}{7}\vec{j} \quad (30)$$

Ασκηση 5.

(α)

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' \quad (31)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \quad (32)$$

$$= -1 - \frac{1}{x^3} + 2 - \frac{1}{x^3} = 1 - \frac{2}{x^3} \quad (33)$$

(β)

$$y'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad (34)$$

(γ)

$$y'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)}\right)' = \frac{\cos'(x)(1 - \sin(x)) - (1 - \sin(x))' \cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} \quad (35)$$

$$= \frac{-\sin(x)(1 - \sin(x)) + \cos(x) \cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \frac{-\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \frac{1}{1 - \sin(x)} \quad (36)$$

(δ)

$$y'(x) = \left(\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}\right)' = \frac{[(x-1)(x^2-2x)]'x^4 - (x^4)'[(x-1)(x^2-2x)]}{x^8} \quad (37)$$

$$= \frac{(x-1)'(x^2-2x)x^4 + (x-1)(x^2-2x)'x^4 - 4x^3(x-1)(x^2-2x)}{x^8} \quad (38)$$

$$= \frac{(x^2-2x)x^4 + (x-1)(2x-2)x^4 - 4x^3(x-1)(x^2-2x)}{x^8} \quad (39)$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \quad (40)$$

Άσκηση 6.

(α') Είναι

$$\int \sqrt{x} (x^2 - x + 1) dx = \int x^{1/2} (x^2 - x + 1) dx \quad (41)$$

$$= \int (x^{5/2} - x^{3/2} + x^{1/2}) dx \quad (42)$$

$$= \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + c \quad (43)$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{x^7} - \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c \quad (44)$$

(β') Είναι

$$\int \cos(x) \sin(3x) dx = \int \frac{1}{2} \sin(4x) dx - \int \frac{1}{2} \sin(-2x) dx \quad (45)$$

$$= \int \frac{1}{2} \sin(4x) dx + \int \frac{1}{2} \sin(2x) dx \quad (46)$$

$$= -\frac{1}{8} \cos(4x) + c_1 - \frac{1}{4} \cos(2x) + c_2 \quad (47)$$

$$= -\frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + c \quad (48)$$