ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.
Το ηχητικό κύμα ακολουθεί διαφορετικές διαδρομές και συμβάλλει στο σημείο επανένωσης των δυο κυμάτων. Για να ακουστεί ένα ελάχιστο έντασης ήχου στο συγκεκριμένο σημείο, θα πρέπει τα κύματα να συμβάλλουν καταστρεπτικά, καθώς μόνο σε καταστρεπτική συμβολή έχουμε το ελάχιστο της έντασης του ήχου. Άρα

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = \pi r - 2r = (\pi - 2)r \tag{1}$$

με r_2 την ημικυκλική διαδρομή και r_1 την ευθεία διαδρομή μήκους μιας διαμέτρου του ημικυκλίου. Αφού το ηχητικό κύμα που δημιουργείται από τη συμβολή των επιμέρους κυμάτων προέρχεται από δυο όμοια κύματα, η διαφορά αρχικής φάσης στο σημείο συμβολής θα είναι ίση με μηδέν, δηλ.

$$\Delta\phi = 0 \tag{2}$$

Από τις εξισώσεις καταστρεπτικής συμβολής έχουμε ότι

$$\Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2},\ \ m \in \mathrm{Z} \tag{3}$$

δηλ.

$$(\pi - 2)r = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \Longleftrightarrow r = \frac{(2m+1)\lambda}{2(\pi-2)} \tag{4}$$

και για $m = 0$ θα είναι

$$r = \frac{\lambda}{2(\pi-2)} = \frac{0.2}{\pi - 2} = 0.175 \text{ m} \tag{5}$$

Ασκηση 2.

(α΄) Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται στο φορτίο 1 εξ αιτίας του φορτίου 2 δίνεται από το νόμο του Coulomb, δηλ.

$$F_{21} = k_e\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = 9\cdot 10^9\frac{400\cdot 10^{-12}}{\frac{9}{4}} = 1.6 \text{ N} \tag{6}$$

(β΄) Αφού όλα τα φορτία είναι θετικά, οι δυνάμεις θα είναι όλες απωστικές. Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα φορτία 3 και 2 στο φορτίο 1 είναι

$$F_{31} = k_e\frac{|q_1||q_3|}{r_{31}^2} = 9\cdot 10^9\frac{400\cdot 10^{-12}}{\frac{9}{4}} = 1.6 \text{ N} \tag{7}$$

$$F_{21} = F_{31} = 1.6 \text{ N} \tag{8}$$

αντίστοιχα, αφού όλα τα φορτία που εμπλέκονται είναι ίσου μέτρου. Εφόσον το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του θα είναι όλες $60°$. Από τη γεωμετρία του Σχήματος 1(b) και από την ανάλυση σε συνιστώσες παίρνουμε ότι

$$\vec{F}_{3_x} = \vec{F}_{31_x} \tag{9}$$

$$\vec{F}_{3_y} = \vec{F}_{31_y} + \vec{F}_{21_y} = \vec{F}_{31_y} + \vec{F}_{21} \tag{10}$$

Υποθέτοντας ως θετικές φορές τις συμβατικές (δεξιά, πάνω), οι παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις γίνονται αλγεβρικές ως

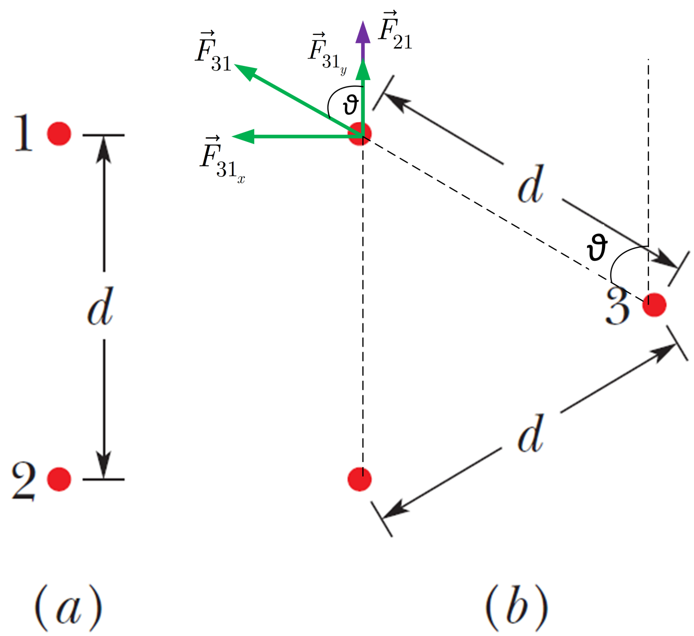
$$F_{3_x} = -F_{31_x} = -F_{31}\sin(\theta) \tag{11}$$
$$F_{3_y} = F_{31_y} + F_{21} = F_{31}\cos(\theta) + F_{21} \tag{12}$$

με θ τη γωνία του σχήματος που είναι ίση με $60°$. Άρα τελικά

$$F_{3_x} = -1.6\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.8\sqrt{3}\ \mathrm{N} \tag{13}$$
$$F_{3_y} = 1.6\frac{1}{2} + 1.6 = 2.4\ \mathrm{N} \tag{14}$$

και άρα το μέτρο της δύναμης θα είναι

$$F_3 = \sqrt{F_{3_x}^2 + F_{3_y}^2} = \sqrt{1.92 + 5.76} = 2.771\ \mathrm{N} \tag{15}$$



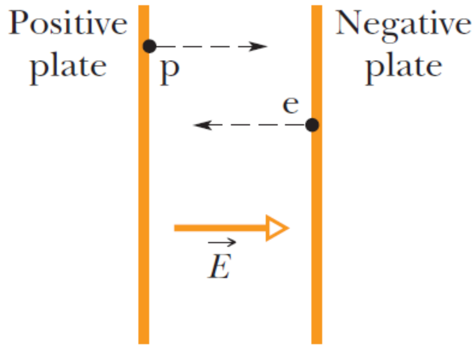
Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2.*

Ασκηση 3.

Έστω t ο χρόνος που απαιτείται για να συναντηθούν τα δυο φορτία και d η απόσταση των δυο πλακών. Τα δυο φορτία μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σώματα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης λόγω της παρουσίας ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, κινούμενα σε οριζόντιο άξονα. Η επιτάχυνση για κάθε φορτίο θα είναι ίση με

$$a_p = \frac{|q_p|E}{m_p} \tag{16}$$
$$a_e = \frac{|q_e|E}{m_e} \tag{17}$$

κατά μέτρο. Έστω A το σημείο εκκίνησης του πρωτονίου και B αυτό του ηλεκτρονίου, ενώ C θα είναι το σημείο



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 3.*

συνάντησης. Θεωρώντας σημείο αναφοράς τη θετική πλάκα (θέση εκκίνησης του πρωτονίου), θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά, κι εφαρμόζοντας τις εξισώσεις της κινητικής, θα έχουμε

$$x_C = x_A + u_x t + \frac{1}{2}a_p t^2 \iff x_C = 0 + 0t + \frac{1}{2}\frac{|q_p|E}{m_p}t^2 = \frac{1}{2}\frac{|q_p|E}{m_p}t^2 \tag{18}$$

$$x_C = x_B + u_x t - \frac{1}{2}a_e t^2 \iff x_C = d + 0t - \frac{1}{2}\frac{|q_e|E}{m_e}t^2 = d - \frac{1}{2}\frac{|q_e|E}{m_e}t^2 \tag{19}$$

Λύνοντας ως προς t^2 την πρώτη σχέση, παίρνουμε

$$t^2 = \frac{2m_p x_C}{|q_p|E} \tag{20}$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη, δεδομένου ότι $|q_e| = |q_p|$, και μετά από απλοποιήσεις παίρνουμε

$$x_C = d - \frac{m_p}{m_e}x_C \tag{21}$$

Λύνοντας ως προς x_C έχουμε τελικά

$$x_C = \frac{d}{1 + \frac{m_p}{m_e}} = 2.726 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \tag{22}$$

Ασκηση 4.

(α') Δείτε το Σχήμα 3. Στο σχήμα φαίνονται δυο καταστάσεις γιατί το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση $x = d/4$ μπορεί να

Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 4α.*

είναι μηδέν αν και τα δυο φορτία είναι θετικά (κάτω σχήμα) ή αν και τα δυο φορτία είναι αρνητικά (επάνω σχήμα). Άλλος συνδυασμός φορτίων είναι αδύνατο να δώσει ηλεκτρικό πεδίο μηδέν. Άρα καταλαβαίνουμε από αυτό ότι τα δυο φορτία έχουν το ίδιο πρόσημο (θετικό ή αρνητικό, δε γνωρίζουμε όμως ποιό από τα δυο).

(β') Έστω C ένα σημείο τ ου άξονα $x'x$ που το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μηδέν. Επειδή έχουμε δυο πηγές φορτίου, το δυναμικό θα ισούται με

$$V_C = V_{C_1} + V_{C_2} = k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2} \tag{23}$$

με τους δείκτες $1, 2$ να δηλώνουν το δυναμικό εξ αιτίας της πηγής φορτίου 1 και 2 αντίστοιχα. Επειδή το δυναμικό είναι πραγματικός αριθμός και τα φορτία q_1, q_2 είναι ομόσημα, δεν υπάρχει σημείο στον άξονα $x'x$ που το δυναμικό θα μηδενίζεται, γιατί τα V_{C_1}, V_{C_2} θα είναι πάντα είτε και τα δυο θετικά είτε και τα δυο αρνητικά. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει σημείο C που το δυναμικό να είναι μηδέν.

Ασκηση 5.

(α') Για το σύστημα των δυο φορτίων, η ηλεκτρική δυναμική του ενέργεια θα είναι

$$U_{e_1} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6)^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 10^{-2}} = 1.152 \cdot 10^{-26} \text{ J} \tag{24}$$

(β') Για το σύστημα των τριών φορτίων, η ηλεκτρική δυναμική του ενέργεια θα είναι

$$\begin{aligned} U_{e_2} &= k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}} && (25) \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6)^2 \cdot 10^{-38}}{2 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6)^2 \cdot 10^{-38}}{1 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6)^2 \cdot 10^{-38}}{1 \cdot 10^{-2}} && (26) \\ &= 5.76 \cdot 10^{-26} \text{ J} && (27) \end{aligned}$$

(γ') Το τρίτο φορτίο, ερχόμενο από το άπειρο στο σημείο ανάμεσα στα δυο αρχικά φορτία, είχε κινητική ενέργεια K_∞. Αυτή η κινητική ενέργεια μετατράπηκε σε ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με τη διαφορά ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας μεταξύ των συστημάτων των τριων και των δυο φορτίων. Άρα από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στο απομονωμένο σύστημα των τριών φορτίων από το άπειρο ως το σημείο ανάμεσα στα δυο φορτία, έχουμε

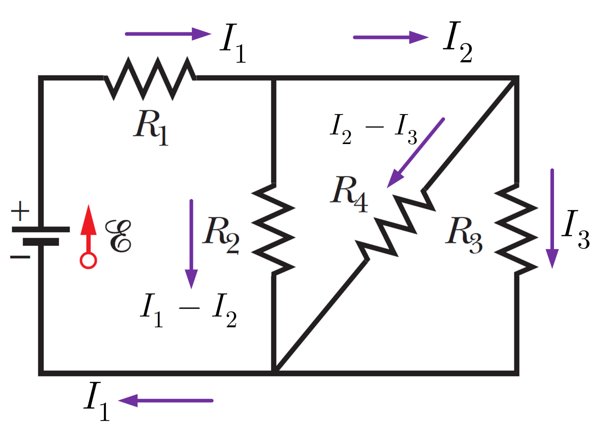
$$\Delta K = \Delta U_e \iff K_\infty - 0 = \Delta U_e = U_{e_2} - U_{e_1} = 4.608 \cdot 10^{-26} \text{ J} \tag{28}$$

$$\frac{1}{2} m_e u_0^2 - 0 = 4.608 \cdot 10^{-26} \tag{29}$$

$$u_0^2 = \frac{9.216}{9.11} \cdot 10^5 \implies u_0 = 318.06 \text{ m/s} \tag{30}$$

Ασκηση 6.

Έχουμε τρία ρεύματα, άρα θέλουμε τρεις εξισώσεις. Στους κόμβους η εκφώνηση δε μας δίνει ξεχωριστά ρεύματα (δηλ. στους κόμβους θα πάρουμε ταυτότητες και όχι εξισώσεις), άρα θα χρειαστούμε τρεις εξισώσεις με βάση τον κανόνα βρόχου.



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 6.*

Στον αριστερό βρόχο, διατρέχοντάς τον δεξιόστροφα, θα έχουμε

$$\varepsilon - I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_2 = 0 \Longleftrightarrow 6 - 100 I_1 - 50 I_1 + 50 I_2 = 0 \Longleftrightarrow -150 I_1 + 50 I_2 = -6 \tag{31}$$

Στον πάνω δεξιά βρόχο, διατρέχοντάς τον δεξιόστροφα, θα έχουμε

$$(I_1 - I_2) R_2 - (I_2 - I_3) R_4 = 0 \Longleftrightarrow 50 I_1 - 50 I_2 - 75 I_2 + 75 I_3 = 0 \Longleftrightarrow 50 I_1 - 125 I_2 + 75 I_3 = 0 \tag{32}$$

και στον κάτω δεξιά βρόχο, διατρέχοντάς τον δεξιόστροφα, θα έχουμε

$$(I_2 - I_3) R_4 - I_3 R_3 = 0 \Longleftrightarrow 75 I_2 - 75 I_3 - 50 I_3 = 0 \Longleftrightarrow 75 I_2 - 125 I_3 = 0 \tag{33}$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στις τιμές

$$I_1 = \frac{24}{475}\ \text{A}, I_2 = \frac{3}{95}\ \text{A}, I_3 = \frac{9}{475}\ \text{A} \tag{34}$$

Σημείωση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με απλοποίηση των αντιστατών: οι R_2, R_3, R_4 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι αντιστάτες με ισοδύναμη αντίσταση ≈ 18.76 Ω. Σε συνδυασμό με τον αντιστάτη R_1, που είναι σειριακά συνδεδεμένος με τον ισοδυνάμο των R_2, R_3, R_4, η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος θα είναι ≈ 118.76 Ω και άρα το ρεύμα I_1 που θα διαρρέει το ισοδύναμο κύκλωμα θα είναι ίσο με $I_1 = 6/118.76 = 0.0505$ A. Αυτό το ρεύμα περνά από τον αντιστάτη R_1 λόγω σειριακής σύνδεσης με τον ισοδύναμο των R_2, R_3, R_4. Τα υπόλοιπα ρεύματα βρίσκονται "ξεδιπλώνοντας" το κύκλωμα στην αρχική του μορφή.