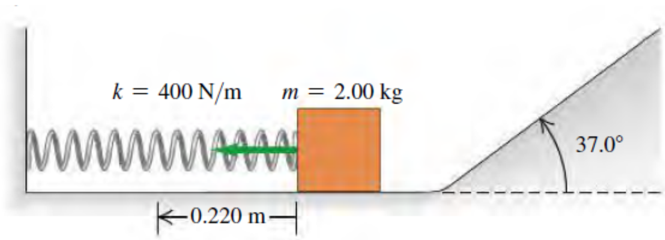
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(α΄) Θεωρούμε ως συστημα το $\{$ελατήριο, σώμα$\}$. Το σύστημα είναι πολυμελές και απομονωμένο στη διαδρομή Α $\to$ Β, καθώς η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του ελατηρίου (όλες οι άλλες δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση και το έργο τους είναι μηδέν), που είναι εσωτερική στο σύστημα, και συντηρητική. Η κίνηση γίνεται σε νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$ που είναι παράλληλος με το οριζόντιο επίπεδο με φορά προς τα δεξιά. Έστω Α το σημείο συμπίεσης του ελατηρίου κατά $x = 0.22$ m και Β το σημείο που το σώμα μόλις αφήνει την άκρη του - σε φυσικό μήκος πλέον - ελατηρίου. Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α $\to$ Β:

$$\Delta K + \Delta U_e = 0 \tag{1}$$
$$K_B - K_A + U_B - U_A = 0 \tag{2}$$
$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \tag{3}$$
$$\frac{1}{2}mu_B^2 = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4}$$
$$u_B^2 = \frac{kx^2}{m} \tag{5}$$
$$u_B = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{400 \cdot (0.22)^2}{2}} = 3.1113 \text{ m/s} \tag{6}$$

Το πρόσημο της λύσης είναι θετικό γιατί η φορά της ταχύτητας είναι προς τα δεξιά.

(β΄) Θεωρούμε ως συστημα το $\{$σώμα, Γη$\}$. Κατά την άνοδο του σώματος στη διαδρομή Β $\to$ C, ασκείται πάνω του η δύναμη του βάρους, μεταξύ άλλων που όμως δεν παράγουν έργο, η οποία είναι εσωτερική στο σύστημα, και συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας αυτό στη βάση του κεκλιμένου. Η κίνηση γίνεται σε νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$ που είναι παράλληλος με το κεκλιμένο επίπεδο με θετική φορά προς τα πάνω. Έστω Β το σημείο που το σώμα μόλις αφήνει την άκρη του - σε φυσικό μήκος πλέον - ελατηρίου και C το σημείο που ακινητοποιείται στιγμιαία πάνω στο κεκλιμένο. Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή B → C:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \tag{7}$$

$$K_C - K_B + U_C - U_B = 0 \tag{8}$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_B^2 + mgh - 0 = 0 \tag{9}$$

$$u_B^2 = 2gh \tag{10}$$

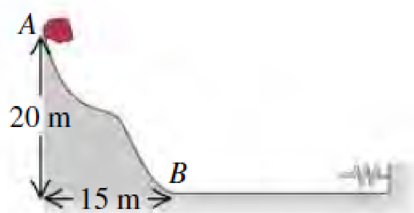
Από το σχήμα, ισχύει

$$\sin(\theta) = \frac{h}{L} \iff h = L\sin(\theta) \tag{11}$$

και άρα

$$u_B^2 = 2gL\sin(\theta) \iff L = \frac{u_B^2}{2g\sin(\theta)} = 0.8207 \text{ m} \tag{12}$$

Άσκηση 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

(α΄) Θεωρούμε ως σύστημα το {βράχος, Γη}. Το σύστημα είναι πολυμελές απομονωμένο στη διαδρομή $A \to B$, και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι αυτή του βάρους, εσωτερική στο σύστημα, και συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη βάση της πλαγιάς, δηλ. το επίπεδο του σημείου B. Ισχύει στη διαδρομή $A \to B$ η ΑΔΜΕ:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \tag{13}$$

$$K_B - K_A + U_B - U_A = 0 \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}mu_A^2 + 0 - mgh = 0 \tag{15}$$

$$u_B^2 = 2gh + u_A^2 \tag{16}$$

$$u_B = \sqrt{2gh + u_A^2} = 22.181 \text{ m/s} \tag{17}$$

(β΄) Θεωρούμε το σύστημα {βράχος, επιφάνεια, ελατήριο}. Το σύστημα είναι πολυμελές και απομονωμένο στη διαδρομή $B \to C$, με C στο σημείο μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου. Έστω x αυτή η συμπίεση. Στο βράχο παράγουν έργο οι δυνάμεις της τριβής και του ελατηρίου (οι υπόλοιπες είναι κάθετες στη μετατόπιση). Η κίνηση γίνεται σε νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$ παράλληλο με το οριζόντιο επίπεδο, με φορά προς τα δεξιά. Ισχύει η ΑΔΕ στη διαδρομή $B \to C$:

$$\Delta E_{sys} = 0 \tag{18}$$

$$\Delta K + \Delta E_{th} + \Delta U_e = 0 \tag{19}$$

$$K_C - K_B + \Delta E_{th} + U_C - U_B = 0 \tag{20}$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_B^2 + f_k(L + x) + \frac{1}{2}kx^2 - 0 = 0 \tag{21}$$

$$-\frac{1}{2}mu_B^2 + \mu_k nL + \mu_k nx + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \tag{22}$$

Ο βράχος ισορροπεί στον άξονα $y'y$, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton - υποθέτουμε θετική φορά προς τα πάνω:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \Longrightarrow n - F_g = 0 \Longrightarrow n = mg \tag{23}$$

και αντικαθιστώντας,

$$-\frac{1}{2}mu_B^2 + \mu_k mgL + \mu_k mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 + \mu_k mgx + \left(\mu_k mgL - \frac{1}{2}mu_B^2\right) = 0 \tag{24}$$

Λύνοντας το πολυώνυμο παίρνουμε (θετική ρίζα μόνο)

$$x = \frac{-\mu_k mg + \sqrt{\mu_k^2 m^2 g^2 - 2k\left(\mu_k mgL - \frac{1}{2}mu_B^2\right)}}{k} = 16.376 \text{ m} \tag{25}$$

(γ') Για να μπορέσει να κινηθεί, πρέπει η δύναμη του ελατηρίου να είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη στατικής τριβής στο σημείο C. Θα είναι

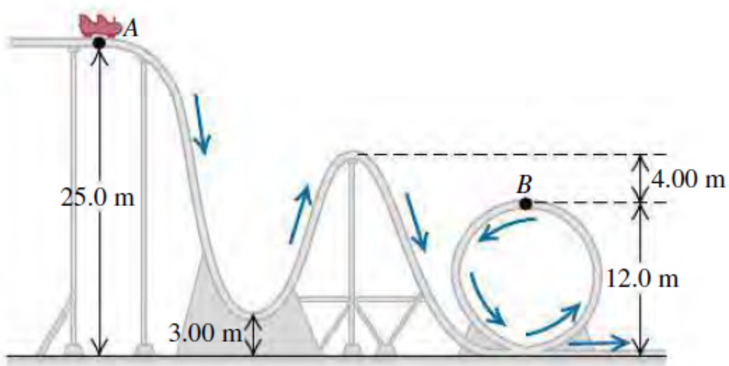
$$F_s = kx = 2 \cdot 16.376 = 32.752 \text{ N} \tag{26}$$

και

$$f_s = \mu_s n = \mu_m g = 0.8 \cdot 15 \cdot 9.8 = 117.6 \text{ N} \tag{27}$$

λόγω 1ο νόμου Newton στον άξονα $y'y$, όπως είδαμε νωρίτερα. Επειδή $F_s < f_s$, ο βράχος δε θα κινηθεί προς τα πίσω.

Άσκηση 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 3.*

(α') Θεωρούμε ως σύστημα το {αμαξάκι, Γη}, απομονωμένο και πολυμελές. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο αμαξάκι είναι η δύναμη του βάρους (η κάθετη δύναμη από την πίστα είναι κάθετη σε κάθε μικρή μετατόπιση πάνω στην πίστα και άρα δεν παράγει έργο), η οποία είναι εσωτερική και συντηρητική στο σύστημα. Θεωρούμε ότι διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι η διάταξη που το αμαξάκι βρίσκεται στη θέση Β. Έστω y η κατακόρυφη απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β, δηλ. $y = 25 - 12 = 13$ m. Στη διαδρομή $A \to B$ ισχύει η ΑΔΜΕ:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \tag{28}$$

$$K_B - K_A + U_B - U_A = 0 \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - mgy = 0 \tag{30}$$

$$u_B^2 = 2gy \tag{31}$$

$$u_B = \sqrt{2gy} = 15.962 \text{m/s} \tag{32}$$

(β΄) Θεωρούμε ότι στο σημείο Β το αμαξάκι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, άρα επιταχύνει, κι έτσι ισχύει ο 2ος νόμος Newton. Η επιτάχυνση της κυκλικής κίνησης έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου ακτίνας $r = 6$ m. Θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω.

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_r \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = m\vec{a}_r \Longrightarrow n + F_g = ma_r \Longrightarrow n = ma_r - F_g = ma_r - mg = m(a_r - g) \quad (33)$$

Γνωρίζουμε από την κυκλική κίνηση ότι

$$a_r = \frac{u^2}{r} \quad (34)$$

οπότε

$$n = m\left(\frac{u^2}{r} - g\right) = 350 \cdot \left(\frac{15.962^2}{6} - 9.8\right) = 1.1433 \times 10^4 \text{ N} \quad (35)$$

Άσκηση 4.

Αν η περίοδος της ΑΑΤ είναι 0.9 δευτερόλεπτα, η συχνότητά της θα είναι $f = 1/T = \frac{10}{9}$ Hz και η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f = \frac{20\pi}{9}$ rad/s. Το πλάτος της είναι $A = 0.32$ m. Αφού για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = A$ και ακίνητο, τότε οι αρχικές συνθήκες της ΑΑΤ είναι $x(0) = A$, $u(0) = 0$. Η γενική μορφή της ΑΑΤ είναι

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 0.32\cos\left(\frac{20\pi}{9}t + \phi\right) \quad (36)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$x(0) = 0.32\cos(\phi) = 0.32 \Longrightarrow \phi = 0 \quad (37)$$

Δε χρειαζόμαστε τη δεύτερη αρχική συνθήκη, άρα

$$x(t) = 0.32\cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) \quad (38)$$

(α΄) Στη θέση $x = 0.32$ m, το σώμα είναι ακίνητο. Ο χρόνος που απαιτείται για να κινηθεί στη θέση $x = 0.16$ m δίνεται ως

$$x(t) = 0.16 \Longleftrightarrow 0.32\cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0.16 \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (39)$$

Η λύση της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι

$$\frac{20\pi}{9}t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3},\ \ k \in \mathrm{Z} \quad (40)$$

Θεωρούμε ότι ο χρόνος που ζητείται αφορά την πρώτη φορά που το σώμα πηγαίνει από τη θέση $x = 0.32$ στη θέση $x = 0.16$, άρα θέτουμε $k = 0$ παραπάνω, και έχουμε

$$\frac{20\pi}{9}t = \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow t = \frac{9}{60} = 0.15 \text{ s} \quad (41)$$

(β΄) Μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται από τη θέση $x = 0.32$ ως τη θέση $x = 0$ και να αφαιρέσουμε το χρόνο του πρώτου ερωτήματος. Θα είναι

$$x(t) = 0 \Longleftrightarrow 0.32\cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0 \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (42)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\frac{20\pi}{9}t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathrm{Z} \quad (43)$$

Θεωρούμε ότι ο χρόνος που ζητείται αφορά την πρώτη φορά που το σώμα πηγαίνει από τη θέση $x = 0.32$ στη θέση $x = 0$, άρα θέτουμε $k = 0$ παραπάνω, και έχουμε

$$\frac{20\pi}{9}t = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow t = \frac{9}{40} = 0.225 \text{ s} \quad (44)$$

Ο ζητούμενος χρόνος θα είναι $t = t_2 - t_1 = 0.225 - 0.15 = 0.075$ s.

Άσκηση 5.
Οι δείκτες v και s δηλώνουν ιό (virus) και σιλικόνη (silicon), αντίστοιχα.

(α΄) Οι συχνότητες ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$f_s = \sqrt{\frac{k}{m_s}} \tag{45}$$

$$f_{s+v} = \sqrt{\frac{k}{m_{s+v}}} \tag{46}$$

με $m_{s+v} = m_s + m_v$, και

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m_{s+v}}}{\frac{k}{m_s}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{m_{s+v}}}{\frac{1}{m_s}}} = \sqrt{\frac{m_s}{m_{s+v}}} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_v}} \tag{47}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα στον παρονομαστή το m_s, παίρνουμε

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s\left(1 + \frac{m_v}{m_s}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_v}{m_s}}} \tag{48}$$

(β΄) Από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_v}{m_s}}} \Longleftrightarrow f_s^2 = f_{s+v}^2\left(1 + \frac{m_v}{m_s}\right) \tag{49}$$

$$m_v = m_s \frac{f_s^2 - f_{s+v}^2}{f_{s+v}^2} \tag{50}$$

$$= 2.1 \times 10^{-16}\left(\frac{4 \times 10^{30} - (2.87)^2 \times 10^{28}}{(2.87)^2 \times 10^{28}}\right) \tag{51}$$

$$= 9.988 \times 10^{-15}\ \text{g} \tag{52}$$