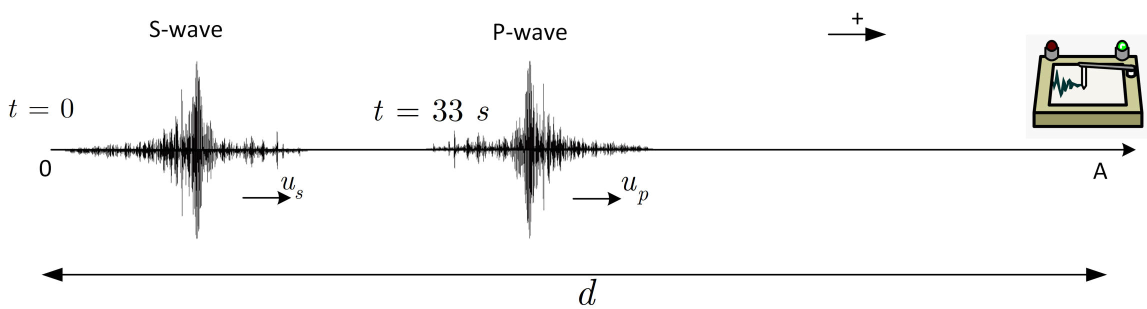
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.
Θεωρούμε αυθαίρετα ότι το κύμα ταξιδεύει προς τη θετική κατεύθυνση νοητού άξονα $x'x$, που είναι η συμβατική (δεξιά). Ορίζουμε ως σημείο αναφοράς του άξονα το 0, που ταυτίζεται με το επίκεντρο του σεισμού. Πατάμε το χρονόμετρό μας ($t = 0$) όταν ξεκινά το δεύτερο κύμα (δηλ. το πρώτο κύμα έχει ξεκινήσει ήδη και προηγείται κατά 33 δευτερόλεπτα). Η κίνηση του κύματος είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα. Έστω η διαδρομή ΟΑ, με Α το σημείο του σεισμικού σταθμού, με $x_A = d$ τη θέση του στον άξονα, όπως στο Σχήμα 1. Ισχύει για το κύμα P



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

$$x_A = x_O + u_p t \iff d = 0 + u_p t \iff d = u_p t \iff t = \frac{d}{u_p} \tag{1}$$

ενώ για το κύμα S

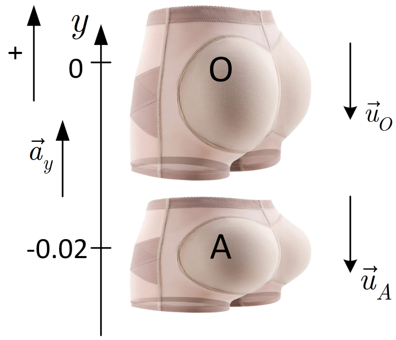
$$x_A = x_O + u_s(t+33) \iff d = 0 + u_s(t+33) \iff d = u_s(t+33) \iff d = u_s\left(\frac{d}{u_p} + 33\right) \tag{2}$$

$$\iff \frac{d}{u_s} = \frac{d}{u_p} + 33 \iff d = \frac{33}{\frac{1}{3500/3600} - \frac{1}{6500/3600}} = 250250 \text{ m} = 250.25 \text{ km} \tag{3}$$

Σημείωση: Τα σεισμικά κύματα δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σημειακά σώματα που ταξιδεύουν, όπως αυτά που έχουμε δει στο μάθημα. Η παραπάνω εκφώνηση περιγράφει μια αρκετά απλοποιημένη κατάσταση για λόγους εξάσκησης.

Άσκηση 2.

(α') Το μαξιλαράκι πρέπει να μειώσει την ταχύτητα του ισχίου από 2.0 m/s σε 1.3 m/s σε μια απόσταση 0.02 m, και ζητούμε να βρούμε την επιτάχυνση σε αυτή τη διαδρομή. Θεωρούμε άξονα $y'y$ παράλληλα με τον οποίο γίνεται η κίνηση (πτώση). Θεωρούμε θετική φορά τη συμβατική (προς τα πάνω). Ας θεωρήσουμε τη διαδρομή ΟΑ, με Ο το σημείο αναφοράς του άξονα, όπου το μαξιλαράκι είναι ασυμπίεστο, και Α το σημείο στο οποίο το μαξιλαράκι συμπιέζεται κατά 0.02 m. Πατάμε το χρονόμετρό μας ($t = 0$) στη θέση Ο. Η κίνηση του ισχίου είναι ευθύγραμμη επιταχυνομενη με σταθερή επιτάχυνση. Οι αναφερόμενες ταχύτητες θα έχουν φορά προς τα κάτω, άρα θα χρησιμοποιήσουμε αρνητικό πρόσημο στην όποια εξίσωση χρησιμοποιήσουμε. Δεδομένου ότι το



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

μαξιλαράκι επιβραδύνει την κίνηση, η επιτάχυνση θα έχει φορά προς τα θετικά του άξονα $y'y$ (προς τα πάνω), όπως στο Σχήμα 2. Θα είναι λοιπόν

$$u_A^2 = u_O^2 + 2a_y\Delta y \iff (-1.3)^2 = (-2)^2 + 2a_y \cdot (-0.02) \iff a_y = \frac{(-1.3)^2 - (-2)^2}{-2 \cdot 0.02} = 57.75 \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

Το πρόσημο δηλώνει όμοια φορά με τη θετική του άξονα $y'y$, άρα προς τα πάνω, δηλ. $\vec{a}_y = (57.75 \text{ m/s}^2)\vec{j}$.

(β΄) Ο χρόνος στην ίδια διαδρομή θα δίνεται από τη σχέση

$$u_A = u_O + a_y t \iff (-1.3)^2 = (-2)^2 + 57.75t \iff t = \frac{(-1.3)^2 - (-2)^2}{57.75} = 12.12 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (5)$$

που είναι ουσιαστικά 12 milliseconds, ή αλλιώς, περίπου το ένα εκατοστό του δευτερολέπτου.

Άσκηση 3.

(α΄) Θεωρούμε το σημείο αναφοράς νοητού συστήματος αναφοράς xy στα πόδια του παίκτη, σημείο Ο $(0,0)$. Η μπάλα φεύγει ξανά από τα χέρια του παίκτη, δηλ. από σημείο Α $(0,2.0)$. Η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα $y'y$ και ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα $x'x$, μέχρι το σημείο Β $(10,3)$, που η μπάλα καταλήγει στο καλάθι. Μελετάμε την κίνηση της μπάλας από τη χρονική στιγμή $(t=0)$ που η μπάλα μόλις φεύγει από τα χέρια του παίκτη. Θεωρούμε ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές (πάνω και δεξιά), όπως στο Σχήμα 3. Στον άξονα $x'x$, θα έχουμε

$$x_B = x_A + u_x t \iff 10 = 0 + u_i\cos(40°)t \implies t = \frac{10}{u_i\cos(40°)} \quad (6)$$

Στον άξονα $y'y$ θα έχουμε

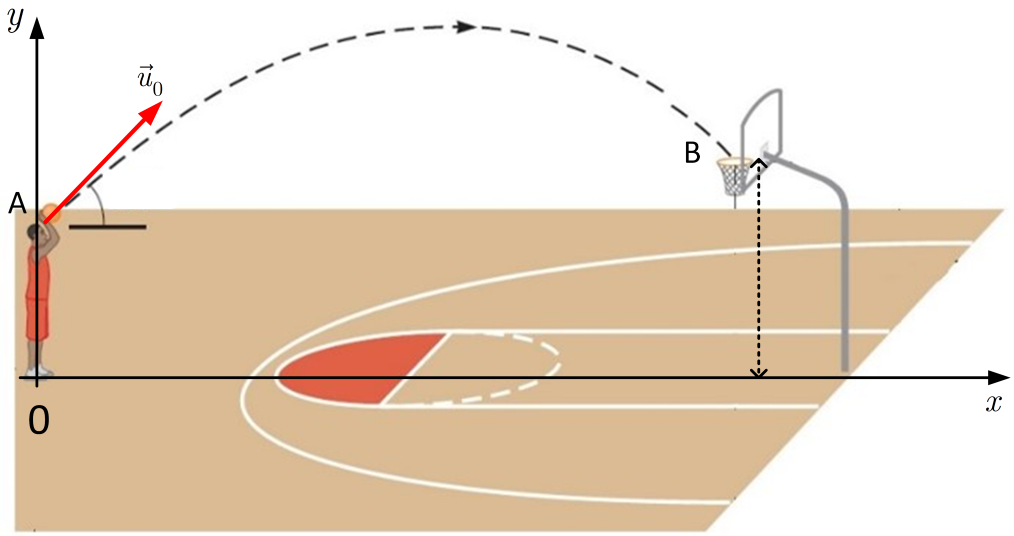
$$y_B = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 3 = 2 + u_i\sin(40°)t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 1 = 10\tan(40°) - \frac{9.8}{2}\left(\frac{100}{u_i^2\cos^2(40°)}\right) \quad (7)$$

που μας δίνει $u_i \approx 10.68$ m/s.

(β΄) Η πρώτη εξίσωση - για τον άξονα $x'x$ παραμένει ίδια. Στον άξονα $y'y$ θα είναι

$$y_B = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 3.05 = 2.13 + u_i\sin(40°)t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 0.92 = 10\tan(40°) - \frac{9.8}{2}\left(\frac{100}{u_i^2\cos^2(40°)}\right) \quad (8)$$

που μας δίνει $u_i \approx 10.62$ m/s. Για τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιήσαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της σχετικής διάλεξης: $\tan(40°) = 0.84$, $\cos(40°) = 0.76$, $\cos^2(40°) = 0.58$. Αν υπολογίσατε εσείς τους αριθμούς ξανά με μεγαλύτερη ακρίβεια τα αποτελέσματά σας θα διαφέρουν λίγο από τα παραπάνω.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 3.*

Άσκηση 4.

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου και στους δυο άξονες. Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που μάθαμε για σταθερή επιτάχυνση. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}u_x(t) \Longleftrightarrow u_x(t) = u_{0_x} + \int_0^t a_x(\tau)d\tau \tag{9}$$

και ότι

$$u_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t u_x(\tau)d\tau = x_0 + \int_0^t \left(u_{0_x} + \int_0^\tau a_x(u)du\right)d\tau \tag{10}$$

με χρήση της Εξ. (9) στην παραπάνω.

(αʹ) Θα είναι

$$\begin{aligned}
\vec{u}(t) = \vec{u}_x(t) + \vec{u}_y(t) &= u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} &(11)\\
&= \left(u_{0_x} + \int_0^t a_x(\tau)d\tau\right)\vec{i} + \left(u_{0_y} + \int_0^t a_y(\tau)d\tau\right)\vec{j} &(12)\\
&= u_{0_x}\vec{i} + \frac{5}{6}t^3\vec{i} + u_{0_y}\vec{j} + (9t - 0.7t^2)\vec{j} &(13)\\
&= \vec{i} + \frac{5}{6}t^3\vec{i} + 7\vec{j} + 9t\vec{j} - 0.7t^2\vec{j} &(14)\\
&= \left(1 + \frac{5}{6}t^3\right)\vec{i} + (7 + 9t - 0.7t^2)\vec{j} &(15)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} & &(16)\\
&= \left(x_0 + \int_0^t u_x(\tau)d\tau\right)\vec{i} + \left(y_0 + \int_0^t u_y(\tau)d\tau\right)\vec{j} &(17)\\
&= \left(x_0 + \int_0^t \left(u_{0_x} + \int_0^\tau a_x(u)du\right)d\tau\right)\vec{i} + \left(y_0 + \int_0^t \left(u_{0_y} + \int_0^\tau a_y(u)du\right)d\tau\right)\vec{j} &(18)
\end{aligned}$$

κι επειδή για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη συμβολή των αξόνων $(0, 0)$, δηλ. $x_0 = y_0 = 0$, θα είναι

$$\vec{r}(t) = \left(0 + \int_0^t \left(u_{0_x} + \int_0^\tau a_x(u)du\right) d\tau\right)\vec{i} + \left(0 + \int_0^t \left(u_{0_y} + \int_0^\tau a_y(u)du\right) d\tau\right)\vec{j} \tag{19}$$

$$= \left(\int_0^t u_{0_x} d\tau + \int_0^t \left(\int_0^\tau a_x(u)du\right) d\tau\right)\vec{i} + \left(\int_0^t u_{0_y} d\tau + \int_0^t \left(\int_0^\tau a_y(u)du\right) d\tau\right)\vec{j} \tag{20}$$

$$= \left(u_{0_x} t + \int_0^t \frac{5}{6}\tau^3 d\tau\right)\vec{i} + \left(u_{0_y} t + \int_0^t (9\tau - 0.7\tau^2) d\tau\right)\vec{j} \tag{21}$$

$$= \left(u_{0_x} t + \frac{5}{24}t^4\right)\vec{i} + \left(u_{0_y} t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{0.7}{3}t^3\right)\vec{j} \tag{22}$$

$$= \left(t + \frac{5}{24}t^4\right)\vec{i} + \left(7t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{0.7}{3}t^3\right)\vec{j} \tag{23}$$

αφού $u_{0x}\vec{i} + u_{0y}\vec{j} = \vec{i} + 7\vec{j}$. Φυσικά η επιμέρους επίλυση και αντικατάσταση των ολοκληρωμάτων είναι επίσης σωστή λύση - δε χρειάζεται να τα κάνετε όλα μαζί όπως παραπάνω.

(β΄) Το μέγιστο ύψος θα δίνεται όταν η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας μηδενιστεί για κάποια χρονική στιγμή. Άρα

$$u_y(t) = 0 \Longleftrightarrow 7 + 9t - 0.7t^2 = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 13.59 \text{ s ή } t_2 = -0.735 \text{ s} \tag{24}$$

Κρατάμε τη θετική λύση βρίσκουμε το μέγιστο ύψος θέτοντας $t = 13.59$ στην $y-$συνιστώσα της θέσης, δηλ.

$$y(t)\Big|_{t=13.59} = y(13.59) = \left(7t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{0.7}{3}t^3\right)\Big|_{t=13.59} = 340.58 \text{ m} \tag{25}$$

(γ΄) Πρέπει να βρούμε κατάρχάς πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε να μηδενιστεί ξανά η $y-$συνιστώσα της θέσης, δηλ.

$$y(t) = 0 \Longleftrightarrow 7t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{0.7}{3}t^3 = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 0 \text{ s ή } t_2 = -1.44 \text{ s ή } t_3 = 20.732 \text{ s} \tag{26}$$

Κρατάμε τη θετική λύση και βρίσκουμε την οριζόντια μετατόπιση θέτοντας $t = 20.732$ στην $x-$συνιστώσα της θέσης, δηλ.

$$x(t)\Big|_{t=20.732} = x(20.732) = \left(t + \frac{5}{24}t^4\right)\Big|_{t=20.732} = 38508.57 = 3.85 \times 10^4 \text{ m} \tag{27}$$

Άσκηση 5.

Μια σταγόνα νερού εκτελεί βολή, από τη θέση Ο στις θέσεις Α και Β όπως στο Σχήμα 4. Τοποθετούμε το σύστημα αξόνων μας με σημείο αναφοράς το Ο, δηλ. Ο $(0, 0)$. Θεωρούμε ότι η σταγόνα πέφτει στη δεξαμενή όταν φτάνει στα σημεία Α και Β, και σε οποιοδήποτε ανάμεσά τους, δηλ. πρέπει $x_A = 6D \leq x \leq x_B = 7D$ και $y_A = y = y_B = 2D$. Θεωρούμε θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές (πάνω και δεξιά). Η σταγόνα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση (τη βαρυτική) κίνηση στον άξονα $y'y$ και ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα στον άξονα $x'x$. Θεωρούμε ότι $t = 0$ στο σημείο Ο. Έστω (x, y) ένα τυχαίο σημείο που ικανοποιεί τις προαναφερθείσες ανισότητες. Στον άξονα $x'x$ ισχύει

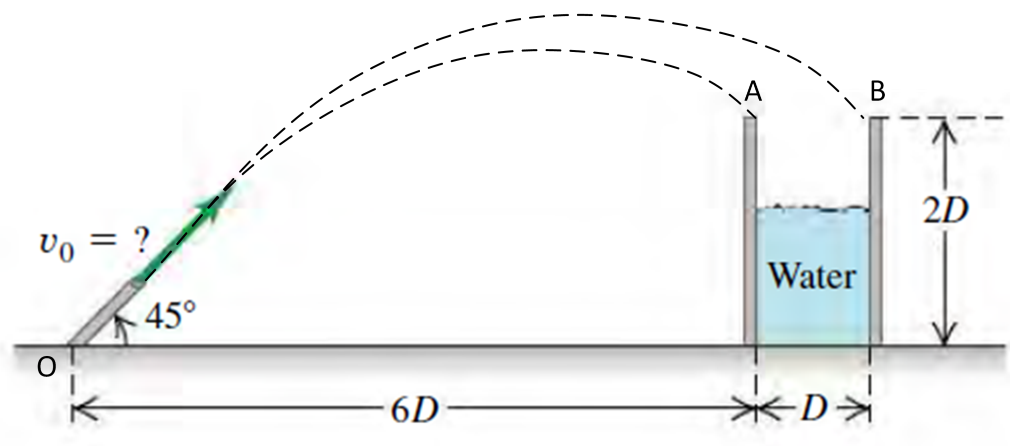
$$x = x_O + u_x t = 0 + u_O\cos(45°)t \Longleftrightarrow x = u_0\cos(45°)t \Longleftrightarrow t = \frac{x}{u_0\cos(45°)} \tag{28}$$

Στον άξονα $y'y$ θα έχουμε

$$y = y_O + u_{y_O}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + u_O\sin(45°)t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow y = u_0\sin(45°)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{29}$$

κι αντικαθιστώντας από την Εξ. (28), έχουμε

$$y = u_0\sin(45°)\frac{x}{u_0\cos(45°)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u_0\cos(45°)}\right)^2 = \tan(45°)x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u_0^2\cos^2(45°)} = y(x) \tag{30}$$



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Η ελάχιστη δυνατή τιμή του x για να πέσει η σταγόνα στη δεξαμενή ισούται με $6D$, και η τιμή του y θα πρέπει να είναι $2D$, άρα

$$y(6D) = 2D = \tan(45°)6D - \frac{1}{2}g\frac{(6D)^2}{u_0^2\cos^2(45°)} \iff 2D = 6D - g\frac{36D^2}{u_0^2} \iff 4Du_0^2 = 36D^2g \tag{31}$$

και άρα

$$u_0^2 = 9Dg \Longrightarrow u_0 = \sqrt{9gD} \tag{32}$$

Τέλος, η μέγιστη δυνατή τιμή του x για να πέσει η σταγόνα στη δεξαμενή ισούται με $7D$, και η τιμή του y θα πρέπει να είναι $2D$, άρα

$$y(7D) = 2D = \tan(45°)7D - \frac{1}{2}g\frac{(7D)^2}{u_0^2\cos^2(45°)} \iff 2D = 7D - g\frac{49D^2}{u_0^2} \iff 5Du_0^2 = 49D^2g \tag{33}$$

και άρα

$$u_0^2 = \frac{49}{5}Dg \Longrightarrow u_0 = \sqrt{\frac{49}{5}gD} \tag{34}$$

Άρα εν τέλει $u_0 \in \left[\sqrt{9gD}, \sqrt{\frac{49}{5}gD}\right]$.

Άσκηση 6.

Θεωρούμε ότι ο αστροναύτης εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

(α') Το κεφάλι του αστροναύτη βρίσκεται σε απόσταση $R = 8.84$ μέτρα από το κέντρο του κύκλου και έχει γραμμική ταχύτητα u. Άρα

$$a = \frac{u^2}{R} \Longrightarrow u^2 = aR \Longrightarrow u = \sqrt{aR} = \sqrt{12.5 \cdot 9.81 \cdot 8.84} = 32.9 \text{ m/s} \tag{35}$$

(β') Τα πόδια του αστροναύτη βρίσκονται σε απόσταση $R' = R - 2.0 = 6.84$ μέτρα από το κέντρο του κύκλου και έχουν γραμμική ταχύτητα u'. Άρα για το κεφάλι του αστροναύτη

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a}} = 1.688 \text{ s} \tag{36}$$

Οπότε για τα πόδια του

$$a' = \frac{4\pi^2 R'}{T} = 94.8 \text{ m/s}^2 = 9.67g \tag{37}$$

Οπότε

$$\Delta a = 12.5g - 9.67g = 2.83g = 27.7 \text{ m/s}^2 \tag{38}$$

(γ') Ο βραχίονας περιστρέφεται μια φορά κάθε $T = 1.688$ s, άρα σε ένα λεπτό θα έχει περιστραφεί 35.54 φορές, αφού

$$\text{rpm} = \frac{60}{T} = 35.54 \text{ στροφές.} \tag{39}$$