ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

(α΄) Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \tag{1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{6} = -33.69^\circ \tag{2}$$

(β΄) Θα είναι

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 3)^2} = \sqrt{34} \tag{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{-5} = 149.04^\circ \tag{4}$$

(γ΄) Θα είναι $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, οπότε Θα είναι

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \tag{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = -45^\circ \tag{6}$$

(δ΄) Θα είναι $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = -11\vec{i} + 7\vec{j}$, οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-11)^2 + 7^2} = \sqrt{170} \tag{7}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{-11} = 147.53^\circ \tag{8}$$

(ε΄) Θα είναι $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = 11\vec{i} - 7\vec{j}$, οπότε

$$|\vec{e}| = \sqrt{11^2 + (-7)^2} = \sqrt{170} \tag{9}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = -32.47^\circ \tag{10}$$

(ϛ΄) Τα διανύσματα αυτά βρήκαμε ότι είναι τα $\vec{d}$ και $\vec{e}$ παραπάνω. Παρατηρώντας τις συνιστώσες/συντεταγμένες τους, βλέπουμε ισχύει $\vec{e} = -\vec{d}$. Άρα τα διανύσματα είναι αντίρροπα, κι έτσι η μεταξύ τους γωνία θα είναι 180°.

Ασκηση 2.
Αναλύουμε τα δυο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σε συνιστώσες. Για το διάνυσμα $\vec{A}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δοθείσα γωνία ή να σχηματίσουμε μια γωνία 75° με τον άξονα $x'x$. Χρησιμοποιώντας τη δοθείσα γωνία, έχουμε

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i} = |\vec{A}|\sin(15^\circ)\vec{i} = 2\sin(15^\circ)\vec{i} \tag{11}$$

$$\vec{A}_y = A_y\vec{j} = |\vec{A}|\cos(15^\circ)\vec{j} = 2\cos(15^\circ)\vec{j} \tag{12}$$

Για το διάνυσμα $\vec{B}$, η γωνία που δίνεται μετριέται ως $-15°$, και άρα

$$\vec{B}_x = B_x\vec{i} = |\vec{B}|\cos(-15°)\vec{i} = 4\cos(15°)\vec{i} \tag{13}$$

$$\vec{B}_y = B_y\vec{j} = |\vec{B}|\sin(-15°)\vec{j} = -4\sin(15°)\vec{j} \tag{14}$$

Άρα τελικά

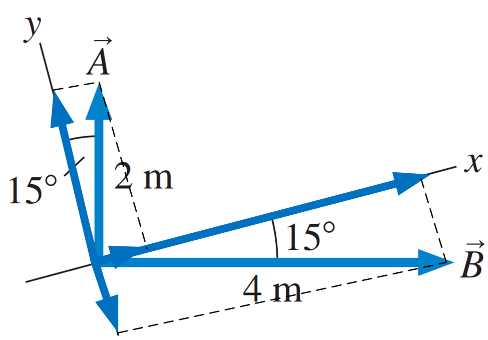
$$\vec{D} = 2\vec{A} + \vec{B} = (4\sin(15°) + 4\cos(15°))\vec{i} + (4\cos(15°) - 4\sin(15°))\vec{j} = 4.899\vec{i} + 2.828\vec{j} \tag{15}$$

Σε πολική μορφή

$$|\vec{D}| = \sqrt{4.899^2 + 2.828^2} = 5.6569 \tag{16}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2.828}{4.899} = 30° \tag{17}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Ασκ. 2.*

Ασκηση 3.
Έστω $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, με $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \implies x_1^2 + x_2^2 = 1$. Το διάνυσμα $\vec{\ }+\vec{j}$, ως ομόρροπο με το ζητούμενο διάνυσμα, θα έχει εσωτερικό γινόμενο ίσο με το γινόμενο των μετρών των επιμέρους διανυσμάτων, δηλ.

$$(\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{x} = |\vec{i} + \vec{j}||\vec{x}| = \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \tag{18}$$

Όμως ξέρουμε επίσης ότι

$$(\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{x} = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_1 + x_2 = \sqrt{2} \tag{19}$$

λόγω της προηγούμενης σχέσης. Άρα έχουμε το σύστημα

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \tag{20}$$

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2} \tag{21}$$

Λύνοντάς το καταλήγετε στο

$$\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \tag{22}$$

ως εξής:

$$(\sqrt{2} - x_2)^2 + x_2^2 = 1 \iff 2 - 2\sqrt{2}x_2 + x_2^2 + x_2^2 = 1 \iff \frac{1}{2} - \sqrt{2}x_2 + x_2^2 = 0 \tag{23}$$

Το παραπάνω τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $x_1 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ασκηση 4.
Είναι

(α') $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})\cdot(2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + (-3)\cdot 1 = -5$

(β') $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})\cdot(-4\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}) = 1\cdot(-4)+2\cdot(-4)+(-3)\cdot 3 = -21$

(γ') $(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})\cdot(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})(-\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})\cdot(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 8\cdot(-8) = -64$

Ασκηση 5.
Έστω $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$. Η καθετότητά του με το $\vec{a}$ σημαίνει ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = 5c_1 - 2c_2 = 0 \tag{24}$$

Το εσωτερικό γινόμενο του με το διάνυσμα $\vec{b}$ γράφεται ως

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = 2c_1 - 11c_2 = 1 \tag{25}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$2\frac{2c_2}{5} - 11c_2 = 1 \Longleftrightarrow \frac{4c_2}{5} - 11c_2 = 1 \Longleftrightarrow -\frac{51}{5}c_2 = 1 \Longleftrightarrow c_2 = -\frac{5}{51} \tag{26}$$

και άρα

$$c_1 = 2\frac{c_2}{5} = -\frac{2}{51} \tag{27}$$

Άρα

$$\vec{c} = -\frac{2}{51}\vec{i} - \frac{5}{51}\vec{j} \tag{28}$$