

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Αφού η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν, τότε το φορτίο ισορροπεί. Επιλέγουμε θετική φορά τη συμβατική του άξονα $x'x$. Από τον 1ο νόμο του Newton

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} = \vec{0} \implies F_{23} = F_{13} \quad (1)$$

και από το νόμο του Coulomb

$$k_e \frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} \iff \frac{|q_2|}{(0.04)^2} = \frac{|q_1|}{(0.02)^2} \iff |q_1| = 0.75 \times 10^{-9} \text{ C} \quad (2)$$

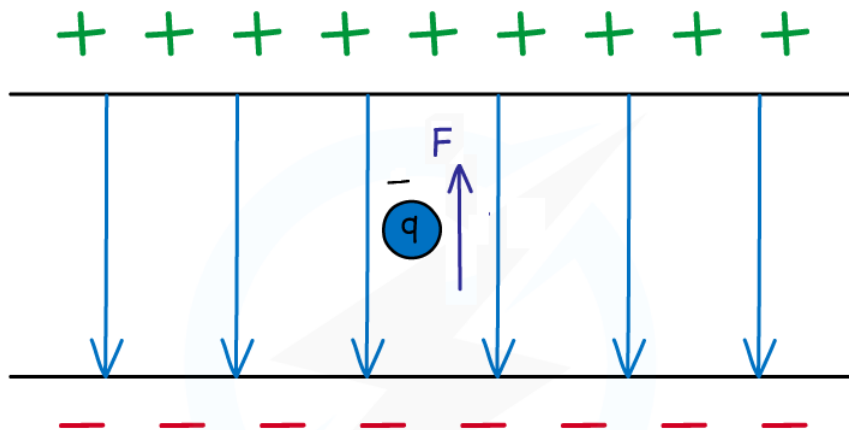
Οπότε

$$q_1 = \begin{cases} +0.75 \text{ nC} \\ -0.75 \text{ nC} \end{cases} \quad (3)$$

Όμως για να είναι αντίρροπές οι δυνάμεις που ασκούνται στο q_3 , πρέπει υποχρεωτικά το φορτίο q_1 να είναι θετικό.

Άσκηση 2.

(α') Μοντελοποιούμε το ηλεκτρόνιο ως φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Αφού το ηλεκτρόνιο ταξιδεύει κάθετα προς τα πάνω, οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου έχουν φορά προς τα κάτω, όπως στο Σχήμα 1. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να βρεθεί αν μοντελοποιήσουμε το φορτίο ως σώμα κινούμενο με



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

σταθερή επιτάχυνση στον άξονα $y'y$, ίση με

$$\vec{a}_y = -\frac{e\vec{E}}{m}\vec{j} \implies a_y = \frac{eE}{m} \implies E = \frac{ma_y}{e} \quad (4)$$

επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω. Από τις εξισώσεις επιταχυνόμενης κίνησης μεταξύ δυο σημείων A και B που απέχουν κατακόρυφη απόσταση $d = 4.5 \text{ m}$, έχουμε

$$y_B = y_A + u_{yA}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \iff \Delta y = \frac{1}{2}a_y \Delta t^2 \iff a_y = \frac{2\Delta y}{\Delta t^2} = 1 \times 10^{12} \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

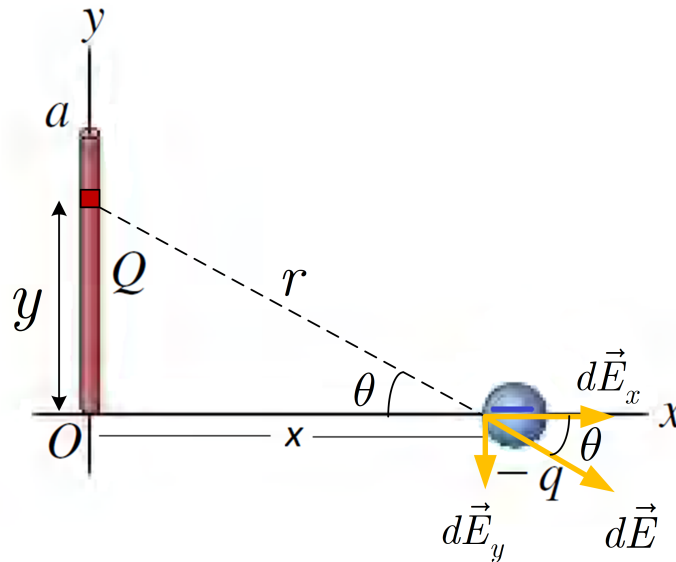
Έτσι

$$E = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \times 10^{12}}{1.6 \times 10^{-19}} = 5.69 \text{ N/C} \quad (6)$$

(β) Παρατηρούμε ότι $a_y = 10^{12} \text{ m/s}^2$, ενώ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Η επιτάχυνση του πεδίου είναι περίπου 10^{11} φορές μεγαλύτερη από αυτή της βαρύτητας, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη 2η ως αμελητέα.

Άσκηση 3.

(α') Έστω απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου, dy , απειροστά μικρού φορτίου dq . Λόγω ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου, ισχύει $\lambda = Q/a = dq/dy \implies dq = \lambda dy$. Το ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$ λόγω αυτού του σημειακού φορτίου στο σημείο απόστασης x από τη συμβολή των αξόνων φαίνεται στο Σχήμα 2. Θεωρώντας ως θετικές



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.

φορές τις συμβατικές, θα είναι

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

και οι επιμέρους συνιστώσες

$$dE_x = dE \cos(\theta) \quad (8)$$

$$dE_y = -dE \sin(\theta) \quad (9)$$

με

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (10)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (11)$$

Άρα

$$dE_x = dE \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \frac{xdq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (12)$$

$$dE_y = -dE \sin(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -k_e \frac{y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (13)$$

“Αθροίζουμε” τη συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο, σε κάθε συνιστώσα του, από κάθε σημειακό φορτίο dq της ράβδου, από $y = 0$ ως $y = a$.

$$E_x = \int dE_x = \int k_e \frac{xdq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \int_0^a \frac{xdq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda x \int_0^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (14)$$

$$E_y = \int dE_y = - \int k_e \frac{y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -k_e \int_0^a \frac{y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -k_e \lambda \int_0^a \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (15)$$

και από τα δοσμένα ολοκληρώματα

$$E_x = k_e \lambda x \int_0^a \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = k_e \lambda x \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y=0}^{y=a} = k_e \lambda x \frac{a}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (16)$$

$$E_y = -k_e \lambda \int_0^a \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = -k_e \lambda \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Big|_{y=0}^{y=a} = -k_e \frac{Q}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \quad (17)$$

(β) Ισχύει ότι $\vec{F}_e = -q\vec{E}$ και αναλύοντας σε συνιστώσες

$$\vec{F}_{e_x} = -q\vec{E}_x \implies F_{e_x} = -qE_x = -k_e \frac{Qq}{x \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (18)$$

$$\vec{F}_{e_y} = -q\vec{E}_y \implies F_{e_y} = -qE_y = k_e \frac{Qq}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \quad (19)$$

(γ) Αν $x \gg a \implies x^2 + a^2 \approx x^2$ και τότε

$$F_x = -k_e \frac{Qq}{x \sqrt{x^2 + a^2}} \approx -k_e \frac{Qq}{x^2} \quad (20)$$

ενώ

$$F_y = k_e \frac{Qq}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = k_e \frac{Qq}{a} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - x}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{Qq}{a} \frac{a^2}{x(x^2 + a^2) + x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (21)$$

$$\approx k_e Qqa \frac{1}{2x^3} = k_e \frac{Qqa}{2x^3} \quad (22)$$

Άσκηση 4.

(α) Οι θέσεις φαίνονται στο Σχήμα 3.

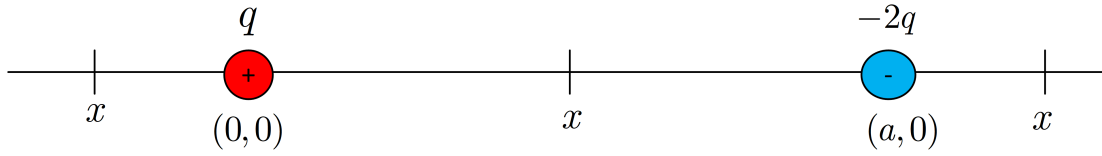
(β) Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: $x < 0$, $x > a$, $0 < x < a$.

- $x < 0$:

$$V_x = V_q + V_{-2q} = k_e \frac{q}{-x} + k_e \frac{-2q}{a - x} = k_e \frac{q(x + a)}{x(x - a)} \quad (23)$$

- $x > a$:

$$V_x = V_q + V_{-2q} = k_e \frac{q}{x} + k_e \frac{-2q}{x - a} = -k_e \frac{q(x + a)}{x(x - a)} \quad (24)$$



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 4.

- $0 < x < a$:

$$V_x = V_q + V_{-2q} = k_e \frac{q}{x} + k_e \frac{-2q}{a-x} = k_e \frac{q(3x-a)}{x(x-a)} \quad (25)$$

(γ') Λύνουμε κάθε σχέση από τις παραπάνω (οι δυο έχουν τον ίδιο αριθμητή):

$$(x+a) = 0 \text{ και } (3x-a) = 0 \iff x = -a \text{ και } x = a/3 \quad (26)$$

(δ') Αν $x \gg a \implies x+a \approx x$ τότε

$$V_x \approx -k_e \frac{qx}{x^2} = -k_e \frac{q}{x} \quad (27)$$

που είναι η σχέση ηλεκτρικού δυναμικού σημειακού φορτίου $-q$.

Άσκηση 5.

(α') Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left[\frac{d}{dx}V(x,y,z)\vec{i} + \frac{d}{dy}V(x,y,z)\vec{j} + \frac{d}{dz}V(x,y,z)\vec{k}\right] \quad (28)$$

Άρα

$$\frac{d}{dx}V(x,y,z) = 2Ax \quad (29)$$

$$\frac{d}{dy}V(x,y,z) = -6Ay \quad (30)$$

$$\frac{d}{dz}V(x,y,z) = 2Az \quad (31)$$

και

$$\vec{E} = -2Ax\vec{i} + 6Ay\vec{j} - 2Az\vec{k} \quad (32)$$

(β') Η κίνηση του φορτίου γίνεται μόνο στον άξονα $z'z$. Το έργο του πεδίου, ως εσωτερικό έργο του συστήματος {πεδίο, φορτίο}, ισούται με την αρνητική μεταβολή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

$$W_{field} = -\Delta U_E = -q\Delta V_{A \rightarrow B} = (-q) \left(- \int_{(0,0,1/4)}^{(0,0,0)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = q \int_{z_1=1/4}^{z_2=0} E_z dz = q \int_{1/4}^0 -2Az dz = 6 \times 10^{-5} \quad (33)$$

Άρα

$$-2qA \frac{z^2}{2} \Big|_{1/4}^0 = 6 \times 10^{-5} \iff -2(1.5 \times 10^{-6})A \left(0 - \frac{1}{32} \right) = 6 \times 10^{-5} \iff A = 640 \text{ V/m}^2 \quad (34)$$

(γ') Θα είναι

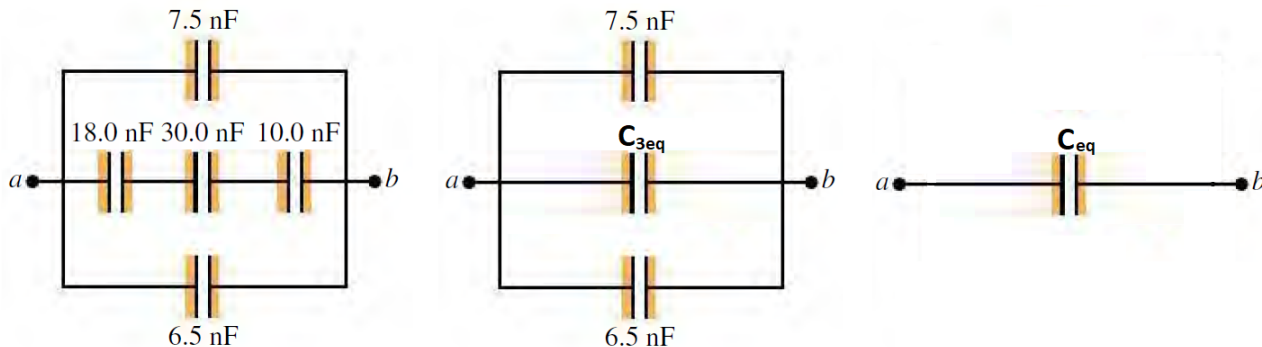
$$E(0,0,1/4) = 0 + 0 - 2 \cdot 640 \cdot (1/4) = -320 \text{ V/m} \quad (35)$$

οπότε

$$\vec{E}(0,0,1/4) = -320\vec{k} \text{ V/m} \quad (36)$$

Άσκηση 6.

Έχουμε ότι $\Delta V_{ab} = 25 \text{ V}$.



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 6.

(α) Οι τρεις σειριακοί πυκνωτές έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα

$$\frac{1}{C_{3eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{18} \iff C_{3eq} = \frac{90}{17} \text{ nF} \quad (37)$$

Οι τρεις παράλληλοι πυκνωτές που σχηματίζονται έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα

$$C_{eq} = C_1 + C_{3eq} + C_3 = \frac{90}{17} + 7.5 + 6.5 = 19.294 \text{ nF} \quad (38)$$

(β) Το συνολικό φορτίο θα είναι

$$Q_{tot} = C_{eq} \Delta V_{ab} = 482.35 \text{ nC} \quad (39)$$

(γ) Ο πυκνωτής των 6.5 nF έχει στα άκρα του διαφορά δυναμικού ίση με ΔV_{ab} . Άρα

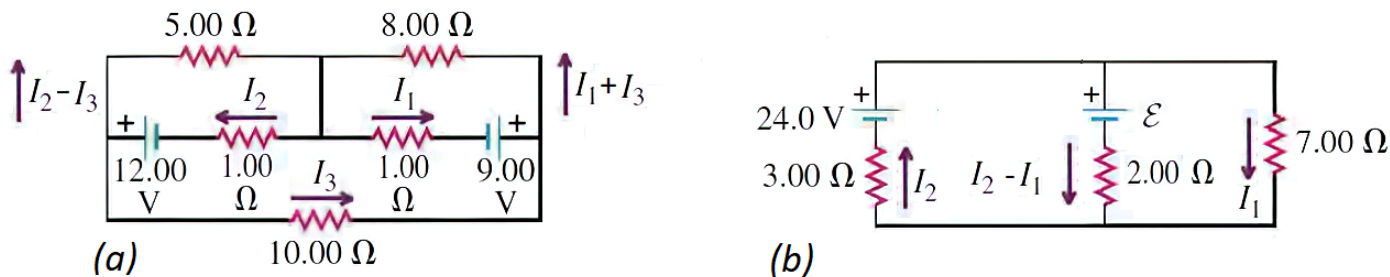
$$Q_3 = C_3 \Delta V_{ab} = 162.5 \text{ nC} \quad (40)$$

(δ) Ο πυκνωτής των 7.5 nF δέχεται κι αυτός στα άκρα του διαφορά δυναμικού ίση με ΔV_{ab} . Άρα

$$\Delta V_{ab} = 25 \text{ V} \quad (41)$$

Άσκηση 7.

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff σε κλειστούς βρόχους. Μπορούμε να βάλουμε παραπάνω ρεύματα απ'όσα φαίνονται αλλά μπορούμε να λύσουμε και μόνο με αυτά. Δείτε τα κυκλώματα του Σχήματος 5.



Σχήμα 5: Κυκλώματα Άσκησης 7.

(α') Στον ανω δεξιά βρόχο, αριστερόστροφα :

$$-I_1 + 9 - 8(I_1 + I_3) = 0 \quad (42)$$

Στον κάτω βρόχο, δεξιόστροφα :

$$-I_2 + 12 - 10I_3 - 9 + I_1 = 0 \quad (43)$$

Στον άνω αριστερά βρόχο, δεξιόστροφα :

$$-5(I_2 - I_3) - I_2 + 12 = 0 \quad (44)$$

Λύνοντας το σύστημα καταλήγουμε στο

$$I_1 = 0.848 \text{ A} \quad (45)$$

$$I_2 = 2.142 \text{ A} \quad (46)$$

$$I_3 = 0.1706 \text{ A} \quad (47)$$

(β') Στον εξωτερικό βρόχο του κυκλώματος, δεξιόστροφα :

$$-3I_2 + 24 - 7I_1 = 0 \iff I_2 = 3.8 \text{ A} \quad (48)$$

Άρα $I_2 - I_1 = 3.8 - 1.8 = 2.0 \text{ A}$. Στον αριστερό βρόχο, δεξιόστροφα :

$$-3 \cdot 3.8 + 24 - \varepsilon - 4 = 0 \iff \varepsilon = 8.6 \text{ V} \quad (49)$$

Άσκηση 8.

(α') Τη στιγμή *ακριβώς* που κλείνει, υπάρχει ρεύμα

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 0.015 \text{ A} \quad (50)$$

Άρα

$$P_R = I^2 R = 1.35 \text{ W} \quad (51)$$

(β') Ζητάμε το χρόνο t όπου

$$P_R(t) = P_C(t) \quad (52)$$

δηλ.

$$i^2(t)R = \frac{d}{dt} U_E(t) \quad (53)$$

$$i^2(t)R = \frac{d}{dt} \frac{q^2(t)}{2C} \quad (54)$$

$$i^2(t)R = \frac{1}{2C} 2q(t) \frac{d}{dt} q(t) \quad (55)$$

$$i^2(t)R = \frac{1}{2C} 2q(t)i(t) \quad (56)$$

$$i(t)R = \frac{q(t)}{C} \quad (57)$$

Όμως

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (58)$$

και

$$q(t) = Q_{max}(1 - e^{-t/RC}), \quad \text{με } Q_{max} = \varepsilon C \quad (59)$$

Οπότε

$$\varepsilon C e^{-t/RC} = Q_{max}(1 - e^{-t/RC}) \quad (60)$$

$$e^{-t/RC} = (1 - e^{-t/RC}) \quad (61)$$

$$\ln(e^{-t/RC}) = \ln(1/2) = -\ln(2) \quad (62)$$

$$-\frac{t}{RC} = -\ln(2) \quad (63)$$

$$t = RC \ln(2) \approx 8.31 \text{ ms} \quad (64)$$

(γ) Είναι

$$P_R = i^2(t)R = i^2(RC \ln(2))R = \frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-2(RC \ln(2))/RC} R = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\ln(4)} = 1.35 e^{-\ln(4)} \approx 0.3375 \text{ W} \quad (65)$$