

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση ισούται με την περίοδο του :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.16} = 1.51 \text{ s} \quad (1)$$

(β) Ξέρουμε ότι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m = (4.16)^2 \cdot 1.5 = 25.95 \text{ N/m} \quad (2)$$

(γ) Ξέρουμε ότι

$$u_{max} = \omega A = 4.16 \cdot 0.074 = 0.3078 \text{ m/s} \quad (3)$$

(δ) Η μέγιστη δύναμη πάνω στο σώμα ασκείται όταν βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση (είτε συμπίεση είτε έκταση του ελατηρίου) από τη θέση ισορροπίας, αφού

$$F_{max} = |kx_{max}| = 25.95 \cdot 0.074 = 1.9203 \text{ N} \quad (4)$$

(ε) Από τις εξισώσεις της Α.Α.Τ

$$x(1) = 0.074 \cos(4.16 - 2.42) = 0.074(-0.1684) = -0.0124 \text{ m} \quad (5)$$

$$u(1) = -4.16 \cdot 0.074 \sin(4.16 - 2.42) = -0.3034 \text{ m/s} \quad (6)$$

$$a(1) = -(4.16)^2 \cdot 0.074 \cos(4.16 - 2.42) = 0.2157 \text{ m/s}^2 \quad (7)$$

(ζ) Θα είναι

$$F_{t=1} = -kx(1) = -25.95 \cdot (-0.0124) = 0.3218 \text{ N} \quad (8)$$

Άσκηση 2.

(α) Από την εξίσωση του κύματος έχουμε

$$A = 0.0075 \text{ m} \quad (9)$$

$$T = \frac{1}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{250\pi}{2\pi}} = 0.008 \text{ s} \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.008} = 125 \text{ Hz} \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{40\pi} = 0.05 \text{ m} \quad (12)$$

$$u = \lambda f = 0.05 \cdot 125 = 6.25 \text{ m/s} \quad (13)$$

(β) Προς την αρνητική (αριστερά), γιατί είναι της μορφής $A \sin(kx + \omega t)$.

(γ') Γνωρίζουμε ότι

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = u^2 \mu = (6.25)^2 \cdot 0.05 = 1.95 \text{ N} \quad (14)$$

(δ) Η μέση ισχύς, P , του κύματος είναι

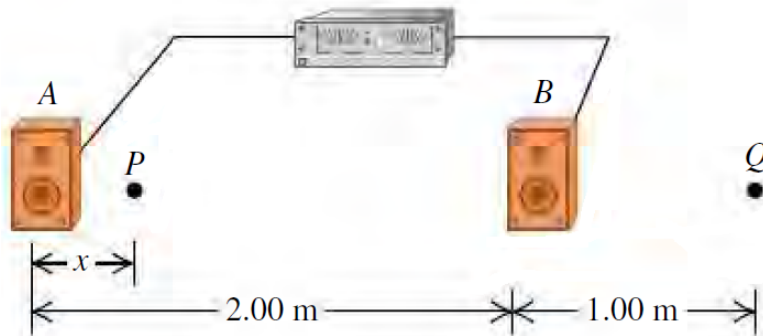
$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 5.42 \text{ W} \quad (15)$$

Άσκηση 3.

Το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος είναι

$$u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{u}{f} = \frac{344}{206} = 1.67 \text{ m} \quad (16)$$

Αν θεωρήσουμε ότι στο ηχείο (A) βρίσκεται το σημείο αναφοράς μας, (0), η θέση x θα είναι θετική, ως θέση δεξιά του σημείου αναφοράς. Η διαφορά διαδρομής των δυο ηχητικών κυμάτων είναι



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 3.

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = |2 - x - x| = |2 - 2x| \quad (17)$$

Αν $2 - 2x > 0 \Rightarrow \Delta r = |2 - 2x| = 2 - 2x$:

(α) Για καταστρεπτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 2 - 2x = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Για $m = 0$

$$2 - 2x = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 4 - 4x = \lambda \Leftrightarrow x = \frac{4 - \lambda}{4} = 0.582 \text{ m} \quad (19)$$

Για $m = 1$

$$2 - 2x = 3 \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow 4 - 4x = 3\lambda \Leftrightarrow x = \frac{4 - 3\lambda}{4} = -0.2525 \text{ m} \quad (20)$$

που ως αρνητική τιμή, απορρίπτεται. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 1$. Άρα τελικά πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 0.582 \text{ m}$

(β') Για ενισχυτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = m\lambda \iff 2 - 2x = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Για $m = 0$

$$2 - 2x = 0 \iff x = 1.00 \text{ m} \quad (22)$$

Για $m = 1$

$$2 - 2x = \lambda \iff x = \frac{2 - \lambda}{2} = 0.165 \text{ m} \quad (23)$$

Για $m = 2$

$$2 - 2x = 2\lambda \iff x = \frac{2 - 2\lambda}{2} = -0.67 \text{ m} \quad (24)$$

που είναι αρνητική, άρα απορρίπτεται. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 2$. Άρα τελικά πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 0.165 \text{ m}$
- $x = 1.00 \text{ m}$

Αν $2 - 2x < 0 \implies \Delta r = |2 - 2x| = 2x - 2$:

(α') Για καταστρεπτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \iff 2x - 2 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Για $m = 0$

$$2x - 2 = \frac{\lambda}{2} \iff 4x - 4 = \lambda \iff x = \frac{4 + \lambda}{4} = 1.4175 \text{ m} \quad (26)$$

Για $m = 1$

$$2x - 2 = 3\frac{\lambda}{2} \iff 4x - 4 = 3\lambda \iff x = \frac{4 + 3\lambda}{4} = 2.2525 \text{ m} \quad (27)$$

που είναι εκτός της απόστασης των δυο ηχείων. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 1$. Άρα πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 1.4175 \text{ m}$

(β') Για ενισχυτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = m\lambda \iff 2x - 2 = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Για $m = 0$

$$2x - 2 = 0 \iff x = 1.00 \text{ m} \quad (29)$$

Για $m = 1$

$$2x - 2 = \lambda \iff x = \frac{2 + \lambda}{2} = 1.835 \text{ m} \quad (30)$$

Για $m = 2$

$$2x - 2 = 2\lambda \iff x = \frac{2 + 2\lambda}{2} = 2.67 \text{ m} \quad (31)$$

που είναι εκτός της απόστασης των δυο ηχείων. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 2$. Άρα πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 1.835 \text{ m}$
- $x = 1.00 \text{ m}$

Οι παραπάνω περιπτώσεις σχεδόν ποτέ δε συμβαίνουν στην πράξη γιατί τα ηχεία δεν είναι στην πραγματικότητα σημειακές πηγές και σε κάθε σημείο δε συμβάλλουν μόνο τα δυο κύματα από τα ηχεία (Α) και (Β) αλλά και ανακλάσεις τους από το περιβάλλον.

Άσκηση 4.

Αφού η διάμετρος του τυμπάνου είναι 8.4 χιλιοστά, η ακτίνα του θα είναι $r = 4.2 \times 10^{-3} \text{ m}$.

(α) Η ενέργεια σχετίζεται με τη μέση ισχύ ως

$$P = \frac{E}{\Delta t} \quad (32)$$

άρα

$$E = P \Delta t \quad (33)$$

Για την ισχύ ηχητικού κύματος ξέρουμε ότι

$$I = \frac{P}{A} \implies P = IA \quad (34)$$

με A την επιφάνεια κάθετα στην οποία προσπίπτει το ηχητικό κύμα. Αφού μιλάμε για ένα τύμπανο, η επιφάνεια του τυμπάνου έχει εμβαδό $A = \pi r^2 = 17.64\pi \times 10^{-6} \text{ m}^2$. Άρα

$$E = IA \Delta t \quad (35)$$

Γνωρίζουμε την ηχοστάθμη β του ηχητικού κύματος, άρα πρέπει να βρούμε την ένταση. Είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (36)$$

$$\frac{\beta}{10} = \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} \quad (37)$$

$$I = 10^{\beta/10} 10^{-12} \quad (38)$$

$$= 10^2 10^{-12} \quad (39)$$

$$= 10^{-10} \text{ W/m}^2 \quad (40)$$

Οπότε τελικά

$$E = IA \Delta t = 10^{-10} 17.64\pi \times 10^{-6} = 17.64\pi \times 10^{-16} = 55.41 \times 10^{-16} = 5.54 \times 10^{-15} \text{ J} \quad (41)$$

(β) Το κουνούπι μάζας $m = 2.0 \text{ mg}$, δηλ. $m = 2 \times 10^{-6} \text{ kg}$ θα έχει ταχύτητα

$$K = 5.54 \times 10^{-15} = \frac{1}{2} m u^2 \implies u^2 = \frac{2 \cdot 5.54 \times 10^{-15}}{2 \times 10^{-6}} = 5.54 \times 10^{-9} \implies u = 7.44 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad (42)$$

Άσκηση 5.

(α) Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο λειτουργεί ως δεύτερη “πηγή”, όταν το κύμα ανακλάται και επιστρέφει στο περιπολικό. Άρα, αν υποθέσουμε ότι πλησιάζει το περιπολικό, λαμβάνει μια διαφορετική συχνότητα από τη συχνότητα εκπομπής, και αυτή θα είναι

$$f_{car} = \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound}} f_{police} \quad (43)$$

Λειτουργώντας ως πηγή, εκπέμπει την παραπάνω συχνότητα πίσω στο περιπολικό. Το περιπολικό λοιπόν, ως ακίνητος παρατηρητής θα λαμβάνει συχνότητα κινούμενης προς αυτόν πηγής

$$f' = \frac{u_{sound}}{u_{sound} - u_o} f_{car} \quad (44)$$

$$= \frac{u_{sound}}{u_{sound} - u_o} \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound}} f_{police} \quad (45)$$

$$= \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound} - u_o} f_{police} \quad (46)$$

$$1250 = \frac{344 + u_o}{344 - u_o} 1200 \quad (47)$$

και άρα

$$u_o = 7.02 \text{ m/s} \quad (48)$$

(β') Η παραπάνω σχέση τροποποιείται για κινούμερο παρατηρητή προς κινούμενη προς αυτόν πηγή. Άρα η συχνότητα που φτάνει στο αυτοκίνητο θα είναι

$$f_{car} = \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound} - u_{police}} f_{police} = \frac{344 - 7.02}{344 - 20} 1200 = 1300 \text{ Hz} \quad (49)$$

και αυτή εκπέμπεται πίσω στο περιπολικό. Άρα το περιπολικό, ως κινούμενος παρατηρητής προς κινούμενη προς αυτόν πηγή, θα λαμβάνει συχνότητα

$$f' = \frac{u_{sound} + u_{police}}{u_{sound} - u_o} f_{police} = \frac{344 + 20}{344 - 7.02} 1300 = 1404 \text{ Hz} \quad (50)$$

Άσκηση 6.

(α') Έχουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (51)$$

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της χορδής είναι $L = 0.386 \text{ m}$ και άρα το μήκος κύματος της θεμελιώδους ιδιομορφής είναι $\lambda = 2L$, ενώ το μέσο της χορδής θα είναι $x = L/2$. Ψάχνουμε το πλάτος A . Μπορούμε να το βρούμε από την Α.Α.Τ που εκτελεί κάθε στοιχείο της χορδής. Για το στοιχείο στο μέσο της χορδής, θα έχουμε

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \Big|_{x=L/2} = A \sin\left(\frac{2\pi L}{2L} \frac{L}{2}\right) \cos(\omega t) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t) = A \cos(\omega t) \quad (52)$$

Η μέγιστη ταχύτητα για την Α.Α.Τ που εκτελεί το στοιχείο στο μέσο της χορδής είναι

$$u_{max} = \omega A \quad (53)$$

και η μέγιστη επιτάχυνση

$$a_{max} = \omega^2 A \quad (54)$$

Άρα

$$\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{\omega} \implies \omega = \frac{a_{max}}{u_{max}} = 2.21 \times 10^3 \text{ rad/s} \quad (55)$$

Οπότε

$$A = \frac{u_{max}}{\omega} = 1.72 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (56)$$

(β') Η ταχύτητα του κύματος θα είναι

$$u = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \quad (57)$$

Για το μήκος κύματος, το μήκος κύματος της θεμελιώδους ιδιομορφής βρήκαμε ότι είναι $\lambda = 2L$. Οπότε

$$u = \frac{2L\omega}{2\pi} = \frac{L\omega}{\pi} = 271.54 \text{ m/s} \quad (58)$$