ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/10/2022 Ημερομηνία Παράδοσης: 21/10/2022, 12:00:00

Άσκηση 1.
Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο ταξιδεύει σε νοητό άξονα $x'x$.

(α΄) Για τη μέση ταχύτητα θα έχουμε

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

Έτσι

i. $t = 0$ ως $t = 2$ s: $u_{avg} = \frac{x(2)-x(0)}{2-0} = \frac{5.6-0}{2-0} = 2.8$ m/s και ως διάνυσμα (όχι υποχρεωτικό να γραφεί) θα είναι

$$\vec{u}_{avg} = 2.8\vec{i}\ \text{m/s} \tag{2}$$

ii. $t = 0$ ως $t = 4$ s: $u_{avg} = \frac{x(4)-x(0)}{4-0} = \frac{20.8-0}{4-0} = 5.2$ m/s και ως διάνυσμα (όχι υποχρεωτικό να γραφεί) θα είναι

$$\vec{u}_{avg} = 5.2\vec{i}\ \text{m/s} \tag{3}$$

iii. $t = 2$ ως $t = 4$ s: $u_{avg} = \frac{x(4)-x(2)}{4-2} = \frac{20.8-5.6}{4-2} = 7.6$ m/s και ως διάνυσμα (όχι υποχρεωτικό να γραφεί) θα είναι

$$\vec{u}_{avg} = 7.6\vec{i}\ \text{m/s} \tag{4}$$

(β΄) i. Ξανά από την ίδια σχέση

$$u_{avg} = \frac{x(10)-x(0)}{10-0} = \frac{120-0}{10-0} = 12\ \text{m/s} \tag{5}$$

και ως διάνυσμα $\vec{u}_{avg} = 12\vec{i}$ m/s.

ii. Για τη στιγμιαία ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $x(t)$ ως προς t:

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 4.8t - 0.36t^2 \tag{6}$$

Άρα $u(0) = 0$, $u(5) = 15$, $u(10) = 12$ m/s. Ως διανύσματα

$$\vec{u}(0) = 0\vec{i},\ \ \vec{u}(5) = 15\vec{i},\ \ \vec{u}(10) = 12\vec{i}\ \text{m/s} \tag{7}$$

iii. Για να βρούμε το χρόνο που είναι ξανά στιγμιαία ακίνητο θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$u(t) = 0 \Longleftrightarrow 4.8t - 0.36t^2 = 0 \Longleftrightarrow t(4.8 - 0.36t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \text{ ή } t = \frac{4.8}{0.36} = 13.333\ \text{s} \tag{8}$$

Άσκηση 2.
Θεωρούμε ότι ο πιλότος ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή, σε νοητό άξονα $x'x$. Η επιτάχυνση είναι σταθερή άρα μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τον πιλότο ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση.

(α΄) Θεωρώντας ως αρχική θέση τη θέση ακινησίας, όπου $x_i = 0$ και $u_i = 0$, και τελική θέση τη θέση που "πιάνει" τα Mach $3 = 3 \cdot 331$ m/s, μπορούμε να βρούμε το χρόνο που απαιτείται:

$$u_f = u_i + a_x t \Longleftrightarrow 3 \cdot 331 = 0 + 5g \cdot t \Longleftrightarrow t = \frac{993}{5 \cdot 9.81} = 20.244 \text{ s} \tag{9}$$

Άρα η απάντηση είναι ναι, θα περάσει αρκετός χρόνος (τετραπλάσιος περίπου) από τον ελάχιστο χρόνο των 5 δευτερολέπτων και ο πιλότος θα λιποθυμήσει.

(β΄) Ο πιλότος λιποθυμά στα 5 δευτερόλεπτα, οπότε θεωρούμε αρχική κατάσταση την ακινησία και τελική κατάσταση τη στιγμή που πιάνει τα 5 δευτερόλεπτα, οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u_f = u_i + a_x t = 0 + 5gt = 5 \cdot 9.81 \cdot 5.0 = 245.25 \text{ m/s} \tag{10}$$

Άσκηση 3.

Η μπάλα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση, τόσο στην άνοδο όσο και στην κάθοδο. Θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται σε νοητό άξονα $y'y$, με θετική φορά προς τα πάνω, και θα παραλείψουμε τους δείκτες $_y$ στις εξισώσεις μας για ευκολία και απλοποίηση. Σημείο αναφοράς μας θα είναι το σημείο ρίψης. Η επιτάχυνση στον πλανήτη Άρη έχει μέτρο

$$g_M = 0.379g = 3.718 \text{ m/s}^2 \tag{11}$$

με φορά προς τα κάτω, δηλ. $\vec{g}_M = -3.718\vec{j}$ m/s^2.

(α΄) Θεωρούμε τη διαδρομή από το μέγιστο ύψος (θέση B) ως την επιστροφή της στο ίδιο σημείο (θέση A). Ξέρουμε ότι ο χρόνος ανόδου ισούται με το χρόνο καθόδου, άρα $t_{A\to B} = t_{B\to A} = 4.25$ s. Οπότε

$$y_A = y_B - u_B t - \frac{1}{2} g_M t^2 \Longleftrightarrow 0 = y_B - 0t - \frac{1}{2} 3.718(4.26)^2 = 33.578 \text{ m} \tag{12}$$

Άρα η μπάλα έφτασε σε ύψος 33.578 μέτρων.

(β΄) Θεωρούμε τη διαδρομή από τη θέση ρίψης A ως τη θέση μεγίστου ύψους B.

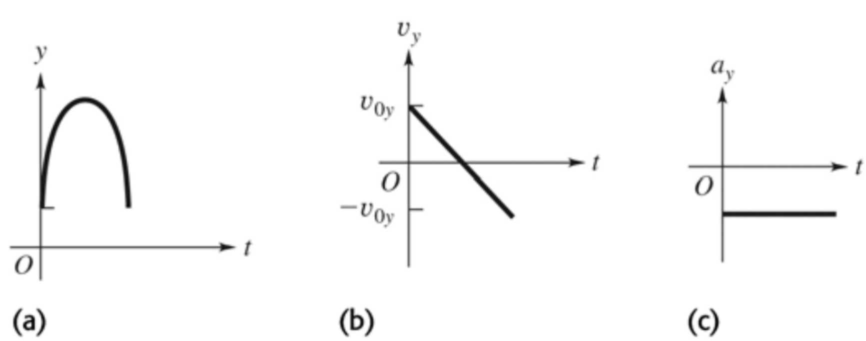
$$u_B = u_A - g_M t \Longleftrightarrow 0 = u_A - g_M t \Longleftrightarrow u_A = g_M t = 15.801 \text{ m/s} \tag{13}$$

Εναλλακτικά - για να δείτε ότι μπορεί να δουλεύουν πολλές εξισώσεις στο ίδιο ερώτημα - στην ίδια διαδρομή

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g_M \Delta y \Longleftrightarrow 0 = u_A^2 - 2g_M \Delta y \Longleftrightarrow u_A^2 = 2g_M \Delta y \Longrightarrow u_A = \sqrt{2 \cdot 3.718 \cdot 33.578} = 15.801 \text{ m/s} \tag{14}$$

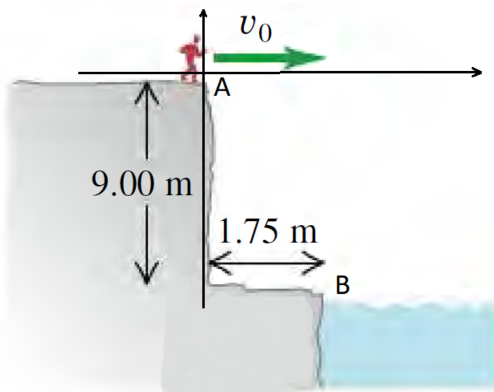
Επιλέξαμε τη θετική λύση γιατί η φορά του διανύσματος της αρχικής ταχύτητας είναι προς τα επάνω (προς τη θετική φορά κίνησης που επιλέξαμε).

(γ΄) Τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Γραφήματα Άσκησης 3.*

Άσκηση 4.
Ο κολυμβητής εκτελεί κίνηση σε νοητό xy επίπεδο με οριζόντια ταχύτητα $\vec{u}_0 = u_{0x}\vec{i}$. Θεωρούμε αρχική θέση τη θέση στην άκρη του γκρεμού (θέση Α) και τελική θέση τη θέση που οριακά ακουμπά την άκρη του πλατώματος (θέση Β) και τοποθετούμε τους άξονες αναφοράς μας στη θέση που βουτάει (θέση Α).



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 4.*

Θετικές φορές της κίνησης θεωρούνται οι συμβατικές (δεξιά, πάνω). Η κίνηση του κολυμβητή - που μοντελοποιείται ως σωματίδιο - αναλύεται σε δυο άξονες:

- κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση - της βαρύτητας - στον άξονα $y'y$
- κίνηση υπό σταθερή ταχύττηα στον άξονα $x'x$

Στον άξονα $x'x$ θα έχουμε

$$x_B = x_A + u_{Ax}t \Longleftrightarrow 1.75 = 0 + u_{Ax}t \Longleftrightarrow 1.75 = u_{0x}t \Longleftrightarrow u_{0x} = \frac{1.75}{t} \tag{15}$$

Χρειαζόμαστε το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στο σημείο Β, δηλ. για να πέσει κατακόρυφα 9.0 μέτρα. Στον άξονα $y'y$, θα έχουμε

$$y_B = y_A + u_{Ay}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow -9 = 0 + 0t - 4.9t^2 \Longleftrightarrow t = \sqrt{\frac{9}{4.9}} = 1.354 \text{ s} \tag{16}$$

Αυτός είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στη θέση Β, στο όριο του πλατώματος. Άρα η αρχική του (οριζόντια) ταχύτητα πρέπει να είναι τουλάχιστον

$$u_0 = u_{0x} = \frac{1.75}{1.354} = 1.292 \text{ m/s} \tag{17}$$

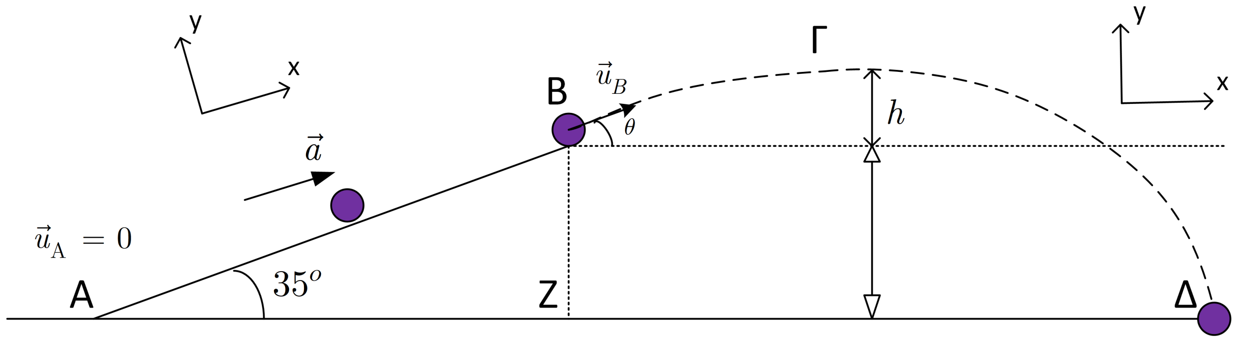
ή

$$\vec{u}_0 = 1.292\vec{i} \text{ m/s} \tag{18}$$

Άσκηση 5.
Θεωρούμε τον ακροβάτη ως σωματίδιο. Δείτε το Σχήμα 3. Για τη διαδρομή από τη θέση Α στη θέση Β, θεωρούμε νοητό άξονα $x'x$ παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο. Ο ακροβάτης εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα $x'x$, ίση με $\vec{a}_x = 1.9\vec{i}$ m/s^2. Θεωρούμε σημείο αναφοράς του άξονα τη θέση Α, όπου $x_A = 0$.

(α') Ο ακροβάτης εκτελεί βολή από τη θέση Β, οπότε το μέγιστο ύψος που φτάνει *με αναφορά τη θέση Β* στη θέση Γ θα δίνεται από τη σχέση

$$h = \frac{u_B^2 \sin^2(\theta)}{2g} \tag{19}$$



Σχήμα 3: *Ακροβάτης Άσκησης 5.*

Η γωνία θ ισούται με τη γωνία του κεκλιμένου. Χρειαζόμαστε όμως την αρχική ταχύτητα u_B. Στη διαδρομή Α ως Β, θα έχουμε

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x\Delta x \Longleftrightarrow u_B^2 = 0^2 + 2 \cdot 1.9 \cdot 200 \Longrightarrow u_B = \sqrt{3.8 \cdot 200} = 27.56 \text{ m/s} \tag{20}$$

Άρα από τη σχέση του μέγιστου ύψους βολής

$$h = \frac{u_B^2 \sin^2(\theta)}{2g} = 12.743 \text{ m} \tag{21}$$

Όμως σε σχέση με το έδαφος, ο ακροβάτης βρίσκεται σε μέγιστο ύψος

$$h_{max} = h + y_{BZ} = h + 200\sin(35^\circ) = 12.743 + 114.715 = 127.458 \text{ m} \tag{22}$$

(β΄) Ουσιαστικά μας ζητείται η απόσταση ΑΔ. Η οριζόντια απόσταση ΑΖ δίνεται εύκολα ως

$$x_{AZ} = AB\cos(35^\circ) = 200\cos(35^\circ) = 163.83 \text{ m} \tag{23}$$

Μένει να βρούμε την απόσταση ΖΔ. Κατα την κίνηση του ακροβάτη από το σημείο Β στο σημείο Δ, θεωρούμε σύστημα αξόνων με αναφορά στη θέση Β. Εχουμε δυο ανεξάρτητες κινήσεις:

- Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα στον άξονα $x'x$
- Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση - της βαρύτητας - στον άξονα $y'y$

Στον άξονα $x'x$ θα έχουμε

$$x_\Delta = x_B + u_{xB}t = 0 + u_B\cos(\theta)t \tag{24}$$

Χρειαζόμαστε τον χρόνο t για να φτάσει ο ακροβάτης από τη θέση Β στη θέση Δ. Στον άξονα $y'y$ θα έχουμε

$$y_\Delta = y_B + u_{By}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow -114.715 = 0 + u_B\sin(35^\circ)t - 4.9t^2 \Longleftrightarrow 4.9t^2 - 15.807t - 114.715 = 0 \tag{25}$$

Λύνοντας το τριώνυμο και παίρνοντας τη θετική ρίζα, έχουμε $t = 6.713$ s. Επιστρέφοντας στον άξονα $x'x$

$$x_\Delta = u_B\cos(\theta)t = 151.55 \text{ m} \tag{26}$$

Άρα συνολικά θα είναι

$$x_{A\Delta} = x_{AZ} + x_{Z\Delta} = 315.38 \text{ m} \tag{27}$$