ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/12/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/12/2021, 13:44:59

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας. Κρατήστε 3 δεκαδικά ψηφία στις πράξεις σας.
Κάποιες από τις δοσμένες απαντήσεις μπορεί να είναι προσεγγιστικές και να διαφέρουν από τις δικές σας.
Θεωρήστε - όπου χρειάζεται - $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C και $k_e = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2.

Άσκηση 1.

(α΄) Η κυματοσυνάρτηση είναι της μορφής

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) \tag{1}$$

και μας δίνεται το σχήμα της μετατόπισης του στοιχείου $x = 0$ ως προς t. Άρα

$$y(0,t) = A\sin(-\omega t + \phi) \tag{2}$$

η οποία από το σχήμα είναι μια ορθή ημιτονοειδής συνάρτηση, δηλ. πρέπει

$$y(0,t) = A\sin(-\omega t + \phi) = A\sin(\omega t) \tag{3}$$

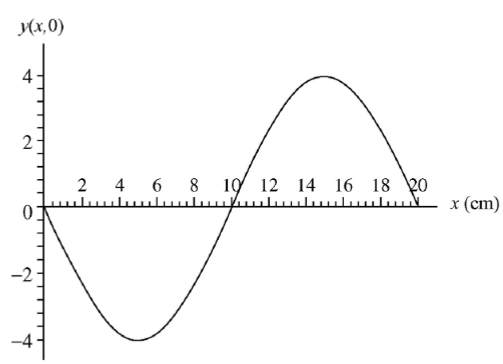
Για να ισχύει η σχέση πρέπει $\phi = \pi$, δηλ.

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \pi) \tag{4}$$

Για $t = 0$, έχουμε

$$y(x,0) = A\sin(kx + \pi) = -A\sin(kx) \tag{5}$$

που είναι μια ανεστραμμένη ημιτονοειδής συνάρτηση. Το σχήμα της φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(β΄) Το πλάτος του κύματος είναι $A = 4.0$ cm.

(γ') Είναι

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{10} \text{ rad/cm} \tag{6}$$

(δ') Είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s} \tag{7}$$

(ε') Βρήκαμε ήδη ότι $\phi = \pi$.

(ϛ') Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$$u = \lambda f = 2.0 \text{ cm/s} \tag{8}$$

(ζ') Αφού η κυματοσυνάρτηση είναι τελικά της μορφής

$$y(x,t) = 4.0 \sin(\frac{\pi x}{10} - \frac{\pi t}{5} + \pi) \tag{9}$$

παραγωγίζοντας ως προς t θα έχουμε

$$u(x,t) = \frac{4}{5}\pi \cos(\frac{\pi x}{10} - \frac{\pi t}{5}) \tag{10}$$

που δίνει $u(0,5) = -2.5$ cm/s.

Άσκηση 2.

(α') Αφού έχουμε σφαιρικό κύμα, θα είναι

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.0}{4\pi(1)^2} = 0.0795 \text{ W/m}^2 \tag{11}$$

(β') Αφού έχουμε σφαιρικό κύμα, θα είναι

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.0}{4\pi(2.5)^2} = 0.00128 \text{ W/m}^2 \tag{12}$$

Άσκηση 3.

(α') Είναι

$$\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \tag{13}$$

$$\beta_2 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0} \tag{14}$$

και από το σχήμα για $r = 100$ (ή $r = 1000$), έχουμε

$$\beta_1 - \beta_2 = 5 \Longleftrightarrow 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} = 5 \tag{15}$$

$$\log_{10} \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 10^{1/2} = \frac{I_1}{I_2} \tag{16}$$

$$\sqrt{10} = \frac{\frac{P_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{P_2}{4\pi r_2^2}} \Longleftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \sqrt{10} \tag{17}$$

(β΄) Είναι 5.0 dB κι εκεί αφού δείξαμε ότι η διαφορά των δυο ηχοστάθμεων δεν εξαρτάται από το r.

Άσκηση 4.

(α΄) Με $f = 1000$ Hz, η συχνότητα που ακούμε είναι

$$f' = \frac{u+0}{u+u_s} f = 970.6 \text{ Hz} \tag{18}$$

εφ΄ όσον εμείς (ο παρατηρητής) είμαστε στάσιμοι και η σειρήνα απομακρύνεται από μας.

(β΄) Η συχνότητα που παρατηρούμε όταν ανακλάται το κύμα από την πλαγιά είναι το ηχητικό κύμα που θα άκουγε ένας ακίνητος παρατηρητής αν βρισκόταν στην πλαγιά, την οποία προσεγγίζει η σειρήνα. Άρα

$$f' = \frac{u+0}{u-u_s} f = 1031.3 \text{ Hz} \tag{19}$$

Άσκηση 5.
Θα χρειαστούμε την ταυτότητα

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2) \tag{20}$$

(α΄) Θα έχουμε

$$y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) = 0.1\cos(\pi x)\cos(4\pi t) \tag{21}$$

(β΄) Λύνουμε την εξίσωση

$$\cos(\pi x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(\pi x) = \cos(\pi/2) \Longleftrightarrow \pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ m} \tag{22}$$

για $k = 0$ και θετικά x.

(γ΄) Παραγωγίζοντας την κυματοσυνάρτηση έχουμε

$$u(x,t) = \frac{d}{dt} y(x,t) = 0.1\cos(\pi x)(-4\pi\sin(4\pi t)) \tag{23}$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$u(0,t) = 0.4\pi\sin(4\pi t) \tag{24}$$

και λύνοντας έχουμε

$$0.4\pi\sin(4\pi t) = 0 \Longleftrightarrow \sin(4\pi t) = \sin(0) \Longleftrightarrow 4\pi t = k\pi \Longleftrightarrow t = \frac{k}{4},\ \ k \in \mathrm{Z} \tag{25}$$

Άρα η πρώτη, δευτερη, και τρίτη φορά που το στοιχείο $x = 0$ αποκτά μηδενική ταχύτητα είναι για $t = 0, 0.25, 0.5$ s, αντίστοιχα, θέτοντας $k = 0, 1, 2$ στην παραπάνω λύση.

Άσκηση 6 - bonus.
Από το νόμο του Coulomb έχουμε

$$F = k_e \frac{|q|^2}{r^2} = k_e \frac{(e/3)^2}{r^2} = \frac{9\times 10^9 \times (1.6\times 10^{-19})^2}{9(2.6\times 10^{-15})^2} = 3.786 \text{ N} \tag{26}$$

Άσκηση 7.

Για να μπορεί να είναι η συνισταμένη των δυνάμεων μηδέν στα ζητούμενα φορτία, θα πρέπει είτε $Q > 0$ και $q < 0$ είτε το αντίθετο. Έστω $Q > 0, q < 0$. Θεωρούμε θετικές φορές τις συμβατικές.

(α') Η $x-$συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο $q_1 = Q$ θα είναι

$$F_{1x} = F_{21x} - F_{41x} = k_e\left(\frac{|q|Q}{a^2} - \frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2}\cos(\pi/4)\right) = k_e\frac{Q|q|}{a^2}\left(-\frac{\frac{Q}{|q|}}{2\sqrt{2}} + 1\right) \quad (27)$$

η οποία δίνει (αν εξισωθεί με μηδέν) ότι

$$-\frac{\frac{Q}{|q|}}{2\sqrt{2}} + 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{Q}{q} = -2\sqrt{2}. \quad (28)$$

(β') Η $y-$συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο $q_2 = q$ είναι

$$F_{2y} = F_{32y} - F_{42y} = k_e\left(\frac{|q|^2}{(\sqrt{2}a)^2}\sin(\pi/4) - \frac{|q|Q}{a^2}\right) = k_e|q|^2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{Q}{|q|}\right) \quad (29)$$

για την οποία (αν την εξισώσουμε με μηδέν) παίρνουμε ότι

$$\frac{Q}{q} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (30)$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι συνεπές με αυτό του (α) ερωτήματος. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε ισορροπία κάθε φορτίου σε αυτή τη διάταξη.

Άσκηση 8 - bonus.

(α') Τα μέτρα των βαρυτικών και ηλεκτρικών δυνάμεων θα πρέπει να είναι ίσα:

$$k_e\frac{q^2}{r^2} = G\frac{mM}{r^2} \quad (31)$$

και λύνοντας ως προς q έχουμε

$$q = \sqrt{\frac{GmM}{k_e}} = 5.7 \times 10^{13}\ \mathrm{C} \quad (32)$$

(β') Οι αποστάσεις r αλληλοακυρώνονται στην παραπάνω σχέση (31) γιατί είναι ίδιες.

Άσκηση 9.

Στα σημεία ανάμεσα στα φορτία, τα ηλεκτρικά πεδία είναι ομόρροπα και δεν αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα το ζητούμενο σημείο πρέπει να είναι είτε αριστερά του q_1 είτε δεξιά του q_2. Όμως επειδή το φορτίο q_2 έχει μεγαλύτερο μέτρο από το q_1, το σημείο μηδενικού πεδίου θα πρέπει να είναι πιο κοντά στο q_1 παρά στο q_2, άρα πρέπει να είναι στα αριστερά του q_1. Έστω x αυτή η τετμημένη του σημείου όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά, το ηλεκτρικό πεδίο εξ' αιτίας κάθε φορτίου θα είναι

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Longrightarrow E = E_2 - E_1 = k_e\left(\frac{|q_2|}{(x-0.7)^2} - \frac{|q_1|}{(x-0.2)^2}\right) \quad (33)$$

το οποίο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν,άρα

$$\frac{|q_2|}{(x-0.7)^2} = \frac{|q_1|}{(x-0.2)^2} \Longleftrightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = \frac{(x-0.7)^2}{(x-0.2)^2} \Longleftrightarrow \frac{x-0.7}{x-0.2} = \pm 2 \Longrightarrow x = -0.3 \text{ ή } x = \frac{1.1}{3} \quad (34)$$

Η μόνη έγκυρη λύση με βάση τα δεδομένα είναι η $x = -0.3$ m.