ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/11/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 10/12/2021, 15:44:59

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.
Κρατήστε 3 δεκαδικά ψηφία στις πράξεις σας.
Κάποιες από τις δοσμένες απαντήσεις μπορεί να είναι προσεγγιστικές και να διαφέρουν από τις δικές σας.
Θεωρήστε - όπου χρειάζεται - $|\vec{g}| = 9.8$ m/s^2.

Άσκηση 1.
Η αρχική κινητική ενέργεια του πατέρα είναι

$$K_{father,i} = \frac{1}{2}K_{son} \tag{1}$$

και η τελική του κινητική ενέργεια είναι

$$K_{father,f} = K_{son} \tag{2}$$

Άρα

$$\frac{1}{2}m_{father}u^2_{father,i} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_{father}(u_{father,i}+1)^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}u^2_{father,i} - u_{father,i} - \frac{1}{2} = 0 \tag{3}$$

Το πολυώνυμο δίνει θετική λύση $u_{father,i} = 2.4142$ m/s. Άρα $u_{son} = 2u_{father,i} = 4.8284$ m/s.

Άσκηση 2.
Έστω $\vec{F}$ η δύναμη με κατεύθυνση προς τα πάνω που ασκείται από το σχοινί στον αστροναύτη. Η δύναμη του βάρους είναι ίση με mg, με φορά προς τα κάτω. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Από το 2ο Νόμο του Newton επάνω στον αστροναύτη έχουμε

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{F} + \vec{F}_g = m\vec{a} \Longrightarrow F - mg = ma \Longrightarrow F = m(g+a) = \frac{11}{10}mg \tag{4}$$

(α΄) Αφού τα διανύσματα της δύναμης του σχοινιού και της μετατόπισης είναι ομόρροπα, έχουμε

$$W_F = F\Delta y = 15F = \frac{15\cdot 11}{10}mg = 1.164\times 10^4 \text{ J} \tag{5}$$

(β΄) Επειδή το διάνυσμα της δύναμης του βάρους είναι αντίρροπο με το διάνυσμα της μετατόπισης, το έργο θα είναι

$$W_{F_g} = -F_g\Delta y = -15mg = -1.058\times 10^4 \text{ J} \tag{6}$$

(γ΄) Για το μονομελές σύστημα {αστροναύτης} ισχύει το θεώρημα Κινητικής Ενέργειας Έργου.

$$\Delta K = \Sigma W_{ext} \Longleftrightarrow K_f - K_i = W_F + W_{F_g} = 1.06\times 10^3 \text{ J} \tag{7}$$

Ο αστροναύτης ξεκινά από ακινησία, άρα η αρχική του κινητική ενέργεια K_i είναι μηδέν. Οπότε λύνοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$u = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 5.4263 \text{ m/s} \tag{8}$$

Άσκηση 3.

(α′) Η δύναμη είναι μεταβαλλόμενου μέτρου, οπότε το έργο της υπολογίζεται μέσω ολοκλήρωσης. Όσο το σώμα κινείται στον άξονα $x'x$ από τη θέση $x_i = 3$ ως τη θέση $x_f = 4$ m, το έργο της δύναμης θα είναι

$$W_F = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_3^4 (-6x)dx = -6\frac{x^2}{2}\Big|_{x=3}^{x=4} = -21 \text{ J} \tag{9}$$

Από το θεώρημα Κινητικής Ενέργειας Έργου στο σύστημα {σώμα} θα έχουμε

$$\Delta K = \Sigma W_F \iff K_f - K_i = W_F \iff u_f = \sqrt{\frac{2W_F}{m} + u_i^2} = 6.5574 \text{ m/s} \tag{10}$$

(β′) Έστω x_f η θέση του σώματος όταν έχει ταχύτητα $u_f = 5$ m/s. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Κινητικής Ενέργειας Έργου από την αρχική θέση $x_i = 3$ m με ταχύτητα $u_i = 8$ m/s ως την τελική άγνωστη θέση x_f, με ταχύτητα $u_f = 5$ m/s, έχουμε

$$\Delta K = W_F \tag{11}$$

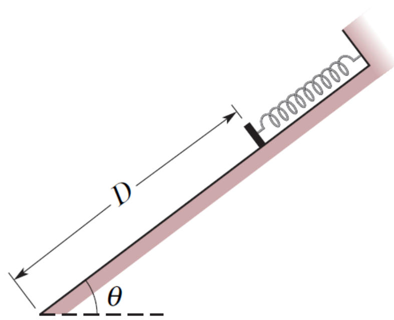
$$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-6x)dx \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}m(u_f^2 - u_i^2) = -3(x_f^2 - x_i^2) \tag{13}$$

$$x_f = 4.6904 \text{ m/s} \tag{14}$$

Άσκηση 4.

Έστω το σύστημα {ελατήριο, σώμα, Γη}. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (βάρους και ελατηρίου) είναι εσωτερικές και συντηρητικές. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη βάση του κεκλιμένου. Έστω άξονας $x'x$ παράλληλος του επικλινούς, με θετική φορά προς τα πάνω και σημείο αναφοράς τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου. Συμβολίζουμε με $x_0 = 0.2$ m τη συμπίεση του ελατηρίου.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 4.*

(α′) Μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, καθώς πληρούνται οι προϋποθέσεις της, στη διαδρομή από τη θέση συμπίεσης x_0 του ελατηρίου ως τη θέση που το ελατήριο επιστρέφει στο φυσικό του μήκος, και λαμβάνοντας υπ′ όψη τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \tag{15}$$

$$0 + mg(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 + mgD\sin(\theta) + 0 \tag{16}$$

$$u_f = \sqrt{2gx_0\sin(\theta) + \frac{kx_0^2}{m}} = 2.399 \text{ m/s} \tag{17}$$

(β΄) Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, καθώς πληρούνται οι προϋποθέσεις της, στη διαδρομή από τη θέση συμπίεσης x_0 του ελατηρίου ως τη θέση που το σώμα βρίσκεται στη βάση του κεκλιμένου, και λαμβάνοντας υπ' όψη τη γεωμετρία του σχήματος, θα είναι

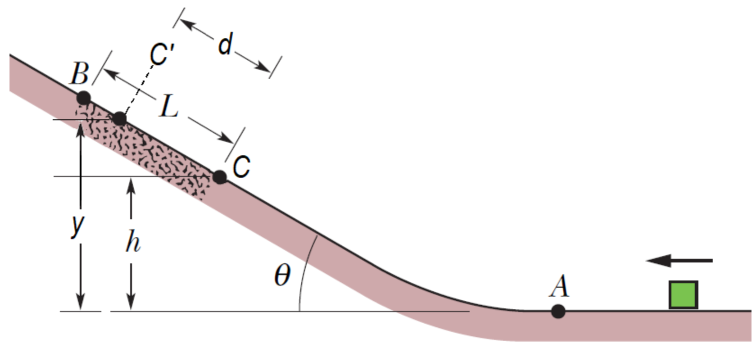
$$K_i + U_{g_i} + U_{s_i} = K_f + U_{g_f} + U_{s_f} \tag{18}$$

$$0 + mg(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 0 + 0 \tag{19}$$

$$u_f = \sqrt{2g(D + x_0)\sin(\theta) + \frac{kx_0^2}{m}} = 4.1898\ \mathrm{m/s} \tag{20}$$

Άσκηση 5.

Ας συμβολίσουμε με το γράμμα C το σημείο που το σώμα μόλις φτάνει στο μη-λείο μονοπάτι, που βρίσκεται σε ύψος h από το επίπεδο αναφοράς, που είναι το μη κεκλιμένο τμήμα του σχήματος. Έστω το απομονωμένο σύστημα $\{$έλκηθρο, Γη$\}$, στη διαδρομή από τη θέση A στη θέση C. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι μόνο βαρυτικές, και ως



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 5.*

εκ τούτου εσωτερικές και συντηρητικές. Ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας, δηλ.

$$K_A + U_{g_A} = K_C + U_{g_C} \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mu_C^2 + mgh \tag{22}$$

$$u_C = \sqrt{u_A^2 - 2gh} \tag{23}$$

$$u_C = 4.98\ \mathrm{m/s} \tag{24}$$

Η κινητική του ενέργεια στο σημείο C είναι $K_C = 12.4m$. Ας υποθέσουμε ότι δε φτάνει στο σημείο B, δηλ. διανύει απόσταση $d < L$ επάνω στο μη-λείο τμήμα του κεκλιμένου. Τότε, όλη η κινητική ενέργεια που έχει στη θέση C θα μετατραπεί σε θερμική και δυναμική ενέργεια. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στο ίδιο απομονωμένο σύστημα από τη θέση C ως τη θέση C', που είναι χαμηλότερα από την B. Εδώ, μπορούμε να θεωρήσουμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη θέση C.

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0 \tag{25}$$

$$K_{C'} - K_C + U_{g_{C'}} - U_{g_C} + \Delta E_{th} = 0 \tag{26}$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_C^2 + mgy_{C'} - 0 + f_k d = 0 \tag{27}$$

$$-\frac{1}{2}mu_C^2 + mgd\sin(\theta) + \mu_k n d = 0 \tag{28}$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα $y'y$ που είναι κάθετος στο κεκλιμένο, και από τον 1ο νόμο του Newton έχουμε

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_{g_y} = \vec{0} \Longrightarrow n - mg\cos(\theta) = 0 \Longleftrightarrow n = mg\cos(\theta) \tag{29}$$

οπότε πίσω στη Σχέση (28) έχουμε

$$\frac{1}{2}mu_C^2 = mgd\sin(\theta) + \mu_k mgd\cos(\theta) \tag{30}$$

Λύνοντας ως προς d βρίσκουμε ότι $d = 1.49$ m, που είναι μεγαλύτερο από την τιμή του $L = 0.75$ m. Άρα η αρχική μας υπόθεση ($d < L$) που σήμαινε ότι το έλκηθρο σταματά πριν το σημείο B είναι λανθασμένη. Εφαρμόζοντας ξανά την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από το σημείο C στο σημείο B έχουμε

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0 \tag{31}$$

$$K_B - K_C + U_{gB} - U_{gC} + \Delta E_{th} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}mu_C^2 + mgy_B - 0 + \mu_k nL = 0 \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}mu_C^2 + mgL\sin(\theta) - 0 + \mu_k mgL\cos(\theta) = 0 \tag{34}$$

υιοθετόντας τις ίδιες επιλογές με πριν, και λύνοντας ως προς u_B, έχουμε

$$u_B = \sqrt{u_C^2 - 2gL(\sin(\theta) + \mu_k\cos(\theta)} = 3.5154 \text{ m/s} \tag{35}$$

Άσκηση 6.

Από εκφώνηση, όταν το σώμα B πέφτει απόσταση $d = 0.25$ m, τότε το σώμα A πρέπει να ανέβει στο κεκλιμένο απόσταση d, η οποία αντιστοιχεί σε κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος A ίση με $h = d\sin(\theta)$. Θεωρούμε το σύστημα $\{$σώματα, Γη$\}$. Το σύστημα είναι απομονωμένο, η δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι εσωτερική και συντηρητική (βαρυτική), θεωρώντας ότι τα σώματα A και B κινούνται ως ένα, λόγω αβαρούς και ανελαστικού νήματος και αβαρούς και χωρίς τριβές τροχαλίας, και ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη θέση που το σώμα B έχει κατέβει απόσταση d. Οπότε

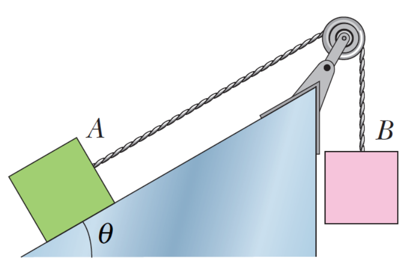
$$K_f + U_{g_f} = K_i + U_{g_i} \tag{36}$$

$$K_f + m_A gh = 0 + m_B gd \tag{37}$$

$$K_f = m_B gd - m_A gh \tag{38}$$

και άρα

$$K_f = m_B gd - m_A gd\sin(\theta) = gd(m_B - m_A\sin(\theta)) = 3.675 \text{ J} \tag{39}$$



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 6.*

Άσκηση 7.

(α') Το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μισό της συνολικής απόστασης, άρα $A = 0.001$ m.

(β') Η μέγιστη ταχύτητα της λεπίδας είναι $u_{max} = \omega A = 2\pi fA = 0.754$ m/s.

(γ') Η μέγιστη επιτάχυνση της λεπίδας είναι $a_{max} = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = 568.49$ m/s^2.

Άσκηση 8.
Για $t = 2.0$ s,

(α΄) η θέση του σώματος είναι

$$x(2) = 6\cos(6\pi + \pi/3) = 3.0 \text{ m} \tag{40}$$

(β΄) η ταχύτητα του σώματος είναι

$$u(2) = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=2} = -18\pi\sin(6\pi + \pi/3) = -48.97 \text{ m/s} \tag{41}$$

(γ΄) η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$a(2) = \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=2} = -(3\pi)^2 \cdot 6\cos(6\pi + \pi/3) = -266.48 \text{ m/s}^2 \tag{42}$$

(δ΄) η συνολική φάση είναι το όρισμα του συνημιτόνου, δηλ. $6\pi + \pi/3 = 19\pi/3$.

Η συχνότητα και η περίοδος της κίνησης είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2} \text{ Hz} \tag{43}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3} \text{ s} \tag{44}$$

Άσκηση 9.
Η συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{45}$$

Για δυο διαφορετικές μύγες με μάζες m_1, m_2, θεωρώντας ότι η σταθερά του ελατηρίου-ιστού είναι η ίδια, θα έχουμε

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\sqrt{\frac{k}{m_2}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{2.5} = 1.581 \tag{46}$$