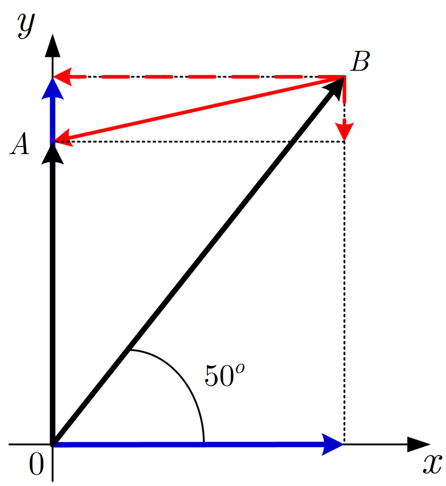
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/10/2021 Ημερομηνία Παράδοσης: 22/10/2021, 13:44:59

Άσκηση 1.
Δείτε το Σχήμα 1. Ζητούμε το διάνυσμα $\vec{BA}$ σε πολική μορφή, και παρατηρούμε ότι



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} \tag{1}$$

Από εκφώνηση ξέρουμε ότι $|\vec{OA}| = 5.6$ και $|\vec{OB}| = 7.8$. Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$\vec{OB} = OB_x\vec{i} + OB_y\vec{j} = OB\cos(50^o)\vec{i} + OB\sin(50^o) = 5.013\vec{i} + 5.975\vec{j} \text{ km} \tag{2}$$

$$\vec{OA} = OA_x\vec{i} + OA_y\vec{j} = 0\vec{i} + OA_y\vec{j} = OA_y\vec{j} = 5.6\vec{j} \text{ km} \tag{3}$$

αφού το $\vec{OA}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$. Άρα

$$\vec{BA}_x = \vec{OA}_x - \vec{OB}_x = OA_x\vec{i} - OB_x\vec{i} = 0\vec{i} - OB\cos(50^o)\vec{i} = -OB\cos(50^o)\vec{i} = -5.013\vec{i} \tag{4}$$

$$\vec{BA}_y = \vec{OA}_y - \vec{OB}_y = OA_y\vec{j} - OB_y\vec{j} = 5.6\vec{j} - 5.975\vec{j} = -0.375\vec{j} \text{ km} \tag{5}$$

Έτσι

$$\vec{BA} = -5.013\vec{i} - 0.375\vec{j} \text{ km} \tag{6}$$

Οπότε

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(-5.013)^2 + (-0.375)^2} = 5.027 \text{ km} \tag{7}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-0.375}{-5.013} = 4.3^\circ \tag{8}$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στη σωστή γωνία, προσθέτοντας π όμως παίρνουμε $\theta = 184.3^\circ$.

Άσκηση 2.

(α΄) Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m} \tag{9}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-3}{4} = -36.87^\circ \tag{10}$$

(β΄) Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8)^2} = 10 \text{ m} \tag{11}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13^\circ \tag{12}$$

(γ΄) Θα είναι

$$\vec{a} + \vec{b} = 10\vec{i} + 5\vec{j} \text{ m} \tag{13}$$

οπότε

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \text{ m} \tag{14}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{5}{10} = 26.565^\circ \tag{15}$$

(δ΄) Θα είναι

$$\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} \text{ m} \tag{16}$$

οπότε

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 11.18 \text{ m} \tag{17}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{11}{2} = 79.69^\circ \tag{18}$$

(ε΄) Θα είναι

$$\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} - 11\vec{j} \text{ m} \tag{19}$$

οπότε

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 11.18 \text{ m} \tag{20}$$

και

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-11}{-2} = 259.69^\circ \tag{21}$$

(ϛ΄) Παρατηρούμε ότι

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \tag{22}$$

άρα τα διανύσματα είναι αντίρροπα, και η μεταξύ τους γωνία θα είναι ίση με 180°.

Άσκηση 3.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a}\cdot(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) && (23)\\
&= (3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})\cdot(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) && (24)\\
&= 3\times 1 + 3\times(-2) + (-2)\times 3 = -9 && (25)
\end{aligned}$$

(β΄) Είναι

$$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=(3\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})\cdot(-3\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}) \tag{26}$$
$$=3\times(-3)+3\times(-6)+(-2)\times 1=-29 \tag{27}$$

Άσκηση 4.

Θα είναι

$$\vec{B}+\vec{A}=6\vec{i}+\vec{j} \tag{28}$$

και

$$\vec{A}-\vec{B}=-4\vec{i}+7\vec{j} \tag{29}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$2\vec{A}=2\vec{i}+8\vec{j}\Longrightarrow\vec{A}=\vec{i}+4\vec{j} \tag{30}$$

Άρα

$$|\vec{A}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}=4.123 \tag{31}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη

$$2\vec{B}=10\vec{i}-6\vec{j}\Longrightarrow\vec{B}=5\vec{i}-3\vec{j} \tag{32}$$

Άρα

$$|\vec{B}|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=5.831 \tag{33}$$

Άσκηση 5.

(α΄)

$$\frac{d}{dx}y(x)=\frac{d}{dx}\log(\cos(x))=(\cos(x))'\frac{1}{\cos(x)}=-\sin(x)\frac{1}{\cos(x)}=-\tan(x) \tag{34}$$

(β΄)

$$\frac{d}{dx}y(x)=\frac{d}{dx}\Big([\log(x^2+1)]^2-\log[(x^2+1)^2]\Big)=\frac{d}{dx}[\log(x^2+1)]^2-\frac{d}{dx}\log[(x^2+1)^2] \tag{35}$$
$$=2(x^2+1)'\log(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}-2(x^2+1)'\frac{1}{x^2+1}=\frac{4x}{x^2+1}\log(x^2+1)-\frac{4x}{x^2+1} \tag{36}$$
$$=\frac{4x(\log(x^2+1)-1)}{x^2+1} \tag{37}$$

(γ΄)

$$\frac{d}{dx}y(x)=\frac{d}{dx}(3x-2)^4(5x^2+3)^{2/3}=(5x^2+3)^{2/3}\frac{d}{dx}[(3x-2)^4]+(3x-2)^4\frac{d}{dx}[(5x^2+3)^{2/3}] \tag{38}$$
$$=12(3x-2)^3(5x^2+3)^{2/3}+\frac{2}{3}(5x^2+3)^{-1/3}(10x)(3x-2)^4 \tag{39}$$
$$=12(3x-2)^3(5x^2+3)^{2/3}+\frac{2}{3}\frac{(10x)(3x-2)^4}{(5x^2+3)^{1/3}} \tag{40}$$
$$=\frac{12(3x-2)^3(5x^2+3)}{(5x^2+3)^{1/3}}+\frac{2}{3}\frac{(10x)(3x-2)^4}{(5x^2+3)^{1/3}} \tag{41}$$
$$=\frac{36(3x-2)^3(5x^2+3)+2(10x)(3x-2)^4}{3(5x^2+3)^{1/3}} \tag{42}$$
$$=\frac{4(3x-2)^3(60x^2-10x+27)}{3(5x^2+3)^{1/3}} \tag{43}$$

(δ')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2+2)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+2)}{(x^2-1)^2} \tag{44}$$

$$= \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{6x}{(x^2-1)^2} \tag{45}$$

Άσκηση 6.

(α')

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4)^2dx = \int_{-2}^{0}(x^4-8x^2+16)dx = \int_{-2}^{0}x^4dx - 8\int_{-2}^{0}x^2dx + 16\int_{-2}^{0}dx \tag{46}$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_{x=-2}^{x=0} - 8\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-2}^{x=0} + 16x\Big|_{x=-2}^{x=0} \tag{47}$$

$$= 0 + \frac{32}{5} - 8(0+\frac{8}{3}) + 16(0+2) = \frac{256}{15} \tag{48}$$

(β')

$$\int_{1}^{2}\Big(2x^3+\frac{5}{x^4}\Big)dx = \int_{1}^{2}2x^3dx + \int_{1}^{2}\frac{5}{x^4}dx = 2\int_{1}^{2}x^3dx + 5\int_{1}^{2}x^{-4}dx \tag{49}$$

$$= 2\frac{x^4}{4}\Big|_{x=1}^{x=2} + 5\frac{-x^{-3}}{3}\Big|_{x=1}^{x=2} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3}(\frac{1}{8}-1) = \frac{215}{24} \tag{50}$$

(γ')

$$\int\frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{x}}dx = \int(2x+1)(x-1)x^{-1/2}dx = \int(2x^{3/2}-x^{1/2}-x^{-1/2})dx \tag{51}$$

$$= 2\int x^{3/2}dx - \int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx \tag{52}$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2} + c_1 - \frac{2}{3}x^{3/2} + c_2 - 2x^{-1/2} + c_3 \tag{53}$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} + c \tag{54}$$

(δ')

$$\int\left[\Big(\frac{1}{x}\Big)^3 + \Big(\frac{1}{x}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{x}\Big)\right]dx = \int\frac{1}{x^3}dx + \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{1}{x}dx \tag{55}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c_1 - \frac{1}{x} + c_2 - \log(|x|) + c_3 \tag{56}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \log|x| + c \tag{57}$$