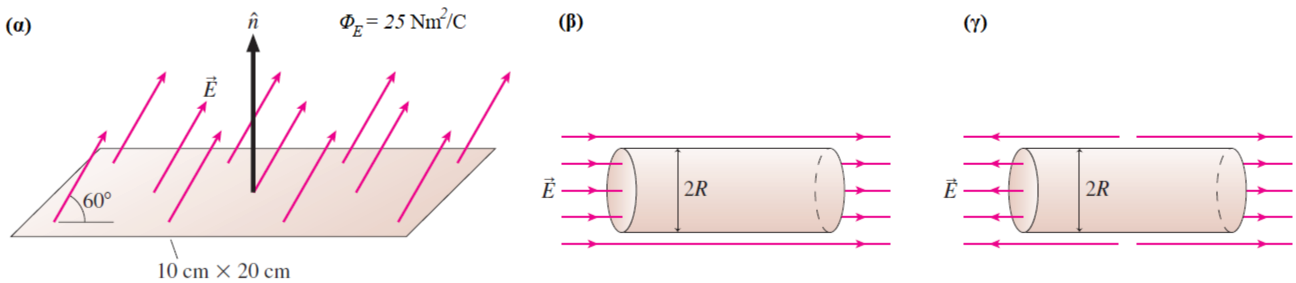
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1. Από το Σχήμα 1 θα έχουμε



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

(i.) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές σε όλη την επιφάνεια. Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου με το κάθετο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο επίπεδο είναι $\theta = 30$ μοίρες. Άρα

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos(\theta) \Longrightarrow E = \frac{\Phi_E}{A\cos(\theta)} = 1.443 \times 10^3 \text{ N/C} \tag{1}$$

(ii.) Οι επιφάνειες "καπάκια" του κυλίνδρου είναι $A = \pi R^2$. Στην περίπτωση (β), όσες δυναμικές γραμμές μπαίνουν στον κύλινδρο, τόσες βγαίνουν. Άρα σύμφωνα με τη θεωρία, η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν. Στην περίπτωση (γ), το ηλεκτρικό πεδίο δείχνει προς τα έξω στην αριστερή επιφάνεια, οπότε

$$\Phi_{left} = EA\cos(0) = E\pi R^2 \tag{2}$$

και προς τα δεξιά στη δεξιά επιφάνεια, οπότε

$$\Phi_{right} = EA\cos(0) = E\pi R^2 \tag{3}$$

Συνολικά λοιπόν $\Phi_E = 2\pi R^2 E$.

Άσκηση 2.

(α΄) Η μικρή επιφάνεια έχει εμβαδόν $\varepsilon = dy\, L$, ως ορθογώνια παραλληλόγραμμη επιφάνεια. Άρα

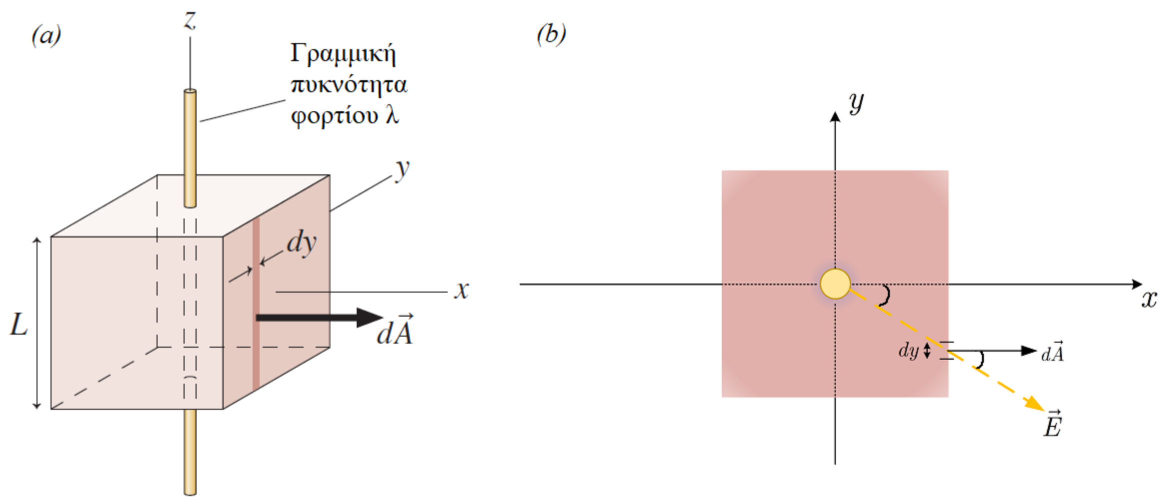
$$d\vec{A} = (dy\, L)\vec{i} \tag{4}$$

(β΄) Από το πεδίο

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{r} \tag{5}$$

και τη σχέση $d\vec{A} = (dy\, L)\vec{i}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{r} \cdot (dy\, L)\vec{i} && (6) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}(dy\, L)(\vec{r} \cdot \vec{i}) && (7) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}(dy\, L)\cos(\theta) && (8) \end{aligned}$$



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2.*

με θ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\hat{r}}$ και $\vec{i}$. Όμως

$$\vec{\hat{r}} \cdot \vec{i} = \cos(\theta) = \frac{L/2}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}} \tag{9}$$

οπότε

$$d\Phi_E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}(dy\, L)\cos(\theta) \tag{10}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}(dy\, L)\frac{L/2}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}} \tag{11}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}(dy\, L)\frac{L/2}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}} \tag{12}$$

$$= \frac{\lambda L^2 dy}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}\frac{1}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}} \tag{13}$$

$$= \frac{\lambda L^2 dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + (L/2)^2)} \tag{14}$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \frac{dy}{y^2 + c^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\left(\frac{y}{c}\right)\Big]_a^b \tag{15}$$

και ολοκληρώνοντας για όλες τις $d\Phi_E$ πάνω στην πλευρά του κύβου θα έχουμε

$$\Phi_{E_{\text{πλευρά}}} = \int d\Phi_E = \frac{\lambda L^2}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dy}{(y^2 + (L/2)^2)} \tag{16}$$

$$= \frac{\lambda L^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{(y^2 + (L/2)^2)} \tag{17}$$

$$= \frac{\lambda L^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2}{L}\tan^{-1}\frac{2y}{L}\right]_{-L/2}^{L/2} \tag{18}$$

$$= \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0}(\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)) \tag{19}$$

$$= \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{20}$$

$$= \frac{\lambda L}{4\epsilon_0} \tag{21}$$

(δ΄) Τέλος, ο κύβος έχει τέσσερις πλευρές μη μηδενικής ροής (η πάνω και η κάτω πλευρά είναι μηδενικής ηλεκτρικής ροής λόγω καθετότητας των διανυσμάτων $\vec{E}$, $d\vec{A}$) οπότε

$$\Phi_E = 4\frac{\lambda L}{4\epsilon_0} = \frac{L(q_{in}/L)}{\epsilon_0} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \tag{22}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι 250 V στο μέσο των πλακών γιατί το δυναμικό ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$V_f - V_i = V_f - 0 = Ed \tag{23}$$

με d η απόσταση από την αρνητική πλάκα μέχρι ένα σημείο του πεδίου και $V_i = 0$ το δυναμικό της αρνητικής πλάκας.

(β΄) Το πρωτόνιο θα αποκτήσει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια

$$\Delta U_e = e\Delta V = 1.6 \times 10^{-19} \times 250 = 4.00 \times 10^{-17} \text{ J} \tag{24}$$

αν κινηθεί σε όλη τη διαδρομή ως τη θετική πλάκα. Αυτή η αύξηση δυναμικής ενέργειας έρχεται σε αντίθεση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας που θα είναι

$$\Delta K = 0 - K_i = -\frac{1}{2}m_p u^2 = -\frac{1}{2} \times 1.67 \times 10^{-27} \times (2 \times 10^5)^2 = -3.34 \times 10^{-17} \text{ J} \tag{25}$$

Αφού $\Delta K + \Delta U_e \neq 0$, το πρωτόνιο δε φτάνει στη θετική πλάκα.

(γ΄) Το σύστημα πρωτόνιο-πεδίο είναι απομονωμένο. Ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, και μάλιστα επειδή το πεδίο είναι συντηρητικό, μπορεί να εφαρμοστεί η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης τοποθέτησης και της τελικής θέσης σύγκρουσης, δηλ.

$$\begin{aligned}
K_f + U_f &= K_i + U_i & (26)\\
\frac{1}{2}m_p u_f^2 + q_p V_f &= \frac{1}{2}m_p u_i^2 + q_p V_i & (27)\\
\frac{1}{2}m_p u_f^2 + 0 &= \frac{1}{2}m_p u_i^2 + q_p V_i & (28)\\
u_f^2 &= u_i^2 + \frac{2q_p V_f}{m} & (29)\\
&= \sqrt{u_i^2 + \frac{2q_p}{m}V_f} & (30)\\
&= \sqrt{(2 \times 10^5)^2 + \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 250}{1.67 \times 10^{-27}}} = 2.9648 \times 10^5 \text{ m/s} & (31)
\end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την αρνητική κλίση του γραφήματος δυναμικού ως προς x. Άρα

(α΄) Για $x = -2$ m, θα είναι

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ V/m} \tag{32}$$

άρα $E = 5$ V/m.

(β΄) Για $x = 0$ m, θα είναι

$$\frac{dV}{dx} = \frac{20}{2} = 10 \text{ V/m} \tag{33}$$

άρα $E = -10$ V/m.

(γ΄) Για $x = 2$ m, θα είναι

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ V/m} \tag{34}$$

άρα $E = 5$ V/m.

(β΄) Παραγωγίζοντας ως προς x και ως προς y τη συνάρτηση δυναμικού

$$V(x,y) = \frac{200}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{35}$$

θα έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{200x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{36}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{200y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \tag{37}$$

μετά από μερικές πράξεις. Οπότε

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} = \frac{200}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\vec{i}+y\vec{j}) \tag{38}$$

Στο σημείο $(x,y) = (2,1)$ το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι

$$\vec{E} = 17.9(2\vec{i}+\vec{j}) \tag{39}$$

οπότε θα έχει μέτρο

$$E = 17.9\sqrt{2^2+1^2} = 40.026 \text{ V/m} \tag{40}$$

και θα βρίσκεται υπό γωνία

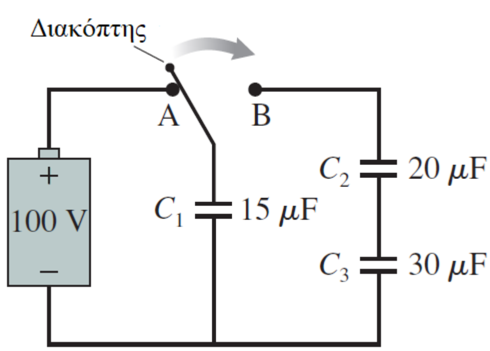
$$\theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.56^\circ \tag{41}$$

με τον οριζόντιο άξονα.

Άσκηση 5. Όταν ο διακόπτης κλείνει στη θέση Β, ο φορτισμένος πυκνωτής C_1 συνδέεται με τους άλλους δυο. Οι άλλοι δυο είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και σχηματίζουν έναν ισοδύναμο πυκνωτή C_{23} με χωρητικότητα

$$C_{23} = \frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} = 12 \text{ μF} \tag{42}$$

Όταν ο διακόπτης βρίσκεται αρχικά στη θέση Α, η διαφορά δυναμικού $\Delta V_1 = 100$ V δινει φορτίο στον



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 5.*

πυκνωτή C_1 ίσο με

$$Q_1 = C_1\Delta V_1 = 1500 \text{ μC} \tag{43}$$

Στη θέση Β, το αρχικό φορτίο Q_1 ανακατανέμεται: έστω Q_1' το φορτίο στον C_1 και Q_{23} το φορτίο στον ισοδύναμο πυκνωτή C_{23}. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα των C_1, C_{23} είναι η ίδια και άρα

$$Q_1' + Q_{23} = Q_1 = 1500\ \mu\text{C} \tag{44}$$

Από τις δυο σχέσεις

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \Longrightarrow \frac{1500 - Q_{23}}{C_1} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \Longrightarrow Q_{23} = 670\ \mu\text{C} \tag{45}$$

και άρα

$$Q_1' = Q_1 - Q_{23} = 830\ \mu\text{C} \tag{46}$$

Αφού ο C_{23} αποτελείται από σε σειρά συνδυασμό των C_2, C_3, το φορτίο τους θα είναι

$$Q_2 = Q_3 = 670\ \mu\text{C} \tag{47}$$

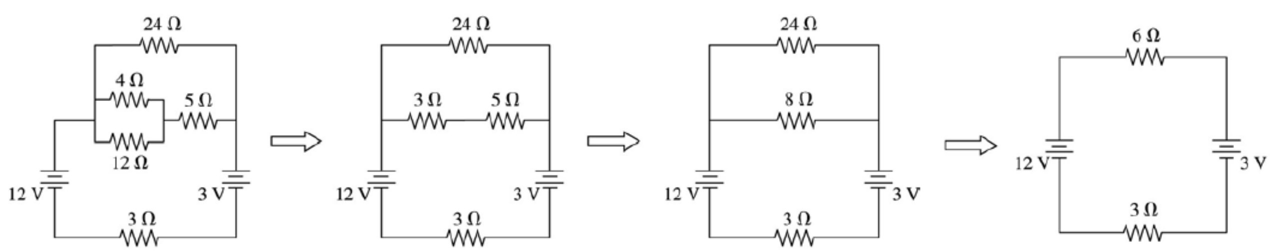
Οπότε

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{830 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-6}} = 55.33\ \text{V} \tag{48}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{670 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-6}} = 33.5\ \text{V} \tag{49}$$

$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{670 \times 10^{-6}}{30 \times 10^{-6}} = 22.33\ \text{V} \tag{50}$$

Άσκηση 6. Στο Σχήμα 4, βλέπετε πώς απλοποιείται το δοσμένο κύκλωμα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις απλοποίησης των αντιστάσεων σε σειρά και σε παραλληλία. Έχοντας καταλήξει σε ένα απλοποιημένο κύκλωμα μιας ισοδύναμης αντίστασης, θα κινηθούμε αντίστροφα για να βρούμε όλα τα ζητούμενα. Συνθέτοντας ξανά



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 6 - Απλοποίηση.*

το αρχικό κύκλωμα βήμα-βήμα, προσέχουμε οι αντιστάτες σε σειρά να έχουν το ίδιο ρεύμα και οι αντιστάτες σε παραλληλία να έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού.

Από το πρώτο κύκλωμα στο Σχήμα 5 και τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για φορά ρεύματος από την πηγή 12 V στην πηγή 3 V, έχουμε

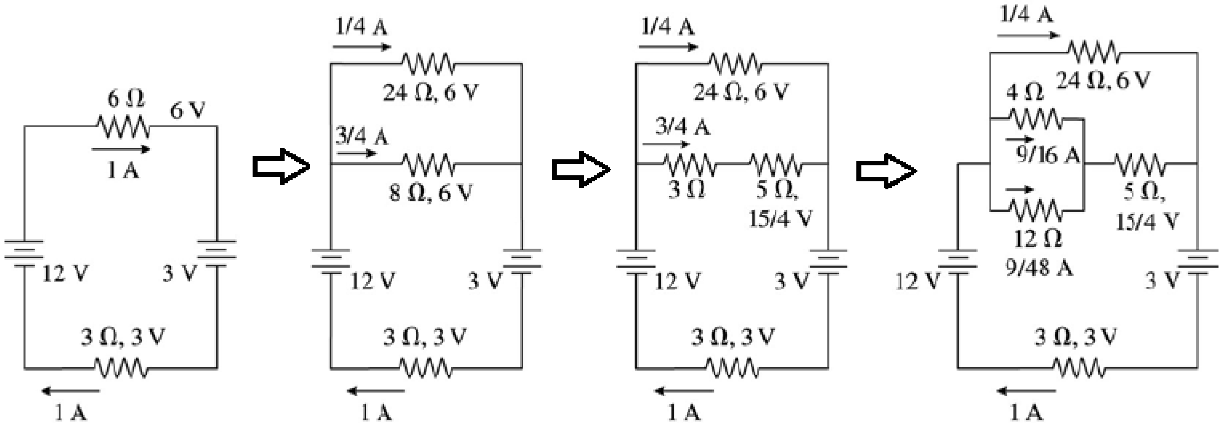
$$\sum \Delta V = 0 \Longleftrightarrow 12 - IR_1 - 3 - IR_2 = 0 \Longleftrightarrow I = \frac{12 - 3}{6 + 3} = 1\ \text{A} \tag{51}$$

Άρα το ρεύμα στο Σχήμα 5 θα είναι 1 A. Στη συνέχεια

$$\Delta V_3 = IR_2 = 3\ \text{V} \tag{52}$$

και

$$\Delta V_{6eq} = 6\ \text{V} \tag{53}$$



Σχήμα 5: *Σχήμα Άσκησης 6 - Σύνθεση του αρχικού κυκλώματος.*

Στο δεύτερο κύκλωμα, ο ισοδύναμος αντιστάτης των 6 Ω αντικαθίσταται από τους αρχικούς των 24 και 8 Ω σε παραλληλία. Οι δυο αντιστάτες πρέπει να έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού $\Delta V = 6$ V. Άρα

$$I_{8eq} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\ \mathrm{A} \tag{54}$$

και

$$I_{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}\ \mathrm{A} \tag{55}$$

Στο τρίτο κύκλωμα, ο αντιστάτης των 8 Ω αντικαθίσταται από τους αρχικούς των 3 και 5 Ω σε σειρά, άρα οι δυο αντιστάτες πρέπει να έχουν το ίδιο ρεύμα, δηλ.

$$\Delta V_{3eq} = \frac{3}{4}3 = \frac{9}{4}\ \mathrm{V} \tag{56}$$

και

$$\Delta V_5 = \frac{3}{4}5 = \frac{15}{4}\ \mathrm{V} \tag{57}$$

Στο τέταρτο κύκλωμα, ο αντιστάτης των 3 Ω αντικαθίσταται από τους δυο αντιστάτες των 4 Ω και 12 Ω σε παραλληλία, οπότε θα έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού. Άρα

$$I_4 = \frac{\frac{9}{4}}{4} = \frac{9}{16}\ \mathrm{A} \tag{58}$$

και

$$I_{12} = \frac{\frac{9}{4}}{12} = \frac{9}{48}\ \mathrm{A} \tag{59}$$

Ο πίνακας που συνοψίζει τα ευρήματα φαίνεται στο Σχήμα 6.

Αντίσταση	Διαφορά Δυναμικού	Ρεύμα
24 Ω	6	1/4
3 Ω	3	1
5 Ω	15/4	3/4
4 Ω	9/4	9/16
12 Ω	9/4	9/48

Σχήμα 6: *Πίνακας.*