ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1.
Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο δίνεται από το φορτίο 1 στο φορτίο 3 είναι

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{d^2 + x^2} \tag{1}$$

ενώ από το φορτίο 2 στο φορτίο 3 είναι

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{r^2} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{d^2 + x^2} \tag{2}$$

Παρατηρούμε ότι αναλύοντας τις δυνάμεις σε συνιστώσες, οι $y-$συνιστώσες αλληλοακυρώνονται, οπότε η συνολική δύναμη στο φορτίο 3 θα έχει $x-$συνιστώσα μόνο. Οι αντίστοιχες $x-$συνιστώσες είναι

$$F_{13_x} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{d^2 + x^2} \cos(\theta) = k_e \frac{|q_1||q_3|}{d^2 + x^2} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} = k_e \frac{x|q_1||q_3|}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \tag{3}$$

$$F_{23_x} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{d^2 + x^2} \cos(\theta) = k_e \frac{|q_2||q_3|}{d^2 + x^2} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} = k_e \frac{x|q_2||q_3|}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Οπότε

$$\vec{F_3} = F_3 \vec{i} = (F_{13_x} + F_{23_x}) \vec{i} \tag{5}$$

με

$$F_3 = k_e \frac{x|q_1||q_3|}{(d^2 + x^2)^{3/2}} + k_e \frac{x|q_2||q_3|}{(d^2 + x^2)^{3/2}} = k_e \frac{x(|q_1| + |q_2|)|q_3|}{(d^2 + x^2)^{3/2}} = F_3(x) \tag{6}$$

(α') Δοκιμάζουμε για $x = 0$ και $x = 5$ για να δούμε τις τιμές στα άκρα του διαστήματος. Είναι

$$F_3(x)\Big|_{x=0} = 0 \tag{7}$$

άρα ελάχιστη τιμή στο μέτρο της δύναμης έχουμε για $x = 0$.

(β') Για να βρούμε το μέγιστο θέτουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν. Θα είναι

$$\frac{d}{dx} F_3(x) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{(x^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + d^2)^{5/2}} = 0 \tag{10}$$

$$2x^2 = d^2 \tag{11}$$

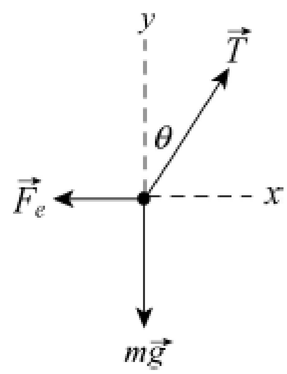
$$x = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

Κρατάμε τη θετική λύση ως κατάλληλη για το πρόβλημά μας (η κινηση γίνεται στο θετικό ημιάξονα). Άρα για $x = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{0.17}{\sqrt{2}}$ m, έχουμε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της F_3.

Για αυτήν την τιμή του x και αντικαθιστώντας στη σχέση (6) παίρνουμε

$$F_{3_{max}} = 4.9 \times 10^{-26}\ \text{N} \tag{13}$$

Άσκηση 2.
Αναλύοντας τις δυνάμεις πάνω στο αριστερό εκ των φορτίων, έχουμε τις δυνάμεις του σχήματος 1. Τα σώματα



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2.*

θέλουμε να ισορροπούν, δηλ.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \tag{14}$$
$$\vec{T}_x + \vec{F}_e = 0 \tag{15}$$
$$T_x - F_e = 0 \tag{16}$$
$$T\sin(\theta) = k_e\frac{q^2}{x^2} \tag{17}$$
$$\sum \vec{F}_y = 0 \tag{18}$$
$$\vec{T}_y + m\vec{g} = 0 \tag{19}$$
$$T_y - mg = 0 \tag{20}$$
$$T\cos(\theta) = mg \tag{21}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις έχουμε

$$\tan(\theta) = k_e\frac{q^2}{mgx^2} \tag{22}$$

Θεωρώντας την προσέγγιση

$$\tan(\theta) \approx \sin(\theta) \tag{23}$$

και από την τριγωνομετρία του σχήματος ισχύει

$$\sin(\theta) = \frac{x}{2L} \tag{24}$$

οπότε

$$\frac{x}{2L} = k_e\frac{q^2}{mgx^2} \Longleftrightarrow x^3 = \frac{q^2L}{2\pi\epsilon_0 mg} \Longleftrightarrow x =]\left(\frac{q^2L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3} \tag{25}$$

Άσκηση 3.
Η ηλεκτρική δύναμη επάνω στο φορτίο 1 δίνεται ως

$$F_1 = k_e\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = k_e\frac{24e^2}{d_1^2 + d_2^2} \tag{26}$$

και η $x-$συνιστώσα της θα είναι

$$F_{1_x} = F_1 \cos(\theta) = k_e \frac{24e^2}{d_1^2 + d_2^2} \cos(\theta) \tag{27}$$

με

$$\cos(\theta) = \frac{d_2}{r} = \frac{d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \tag{28}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$F_{1_x} = k_e \frac{24e^2 d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} \tag{29}$$

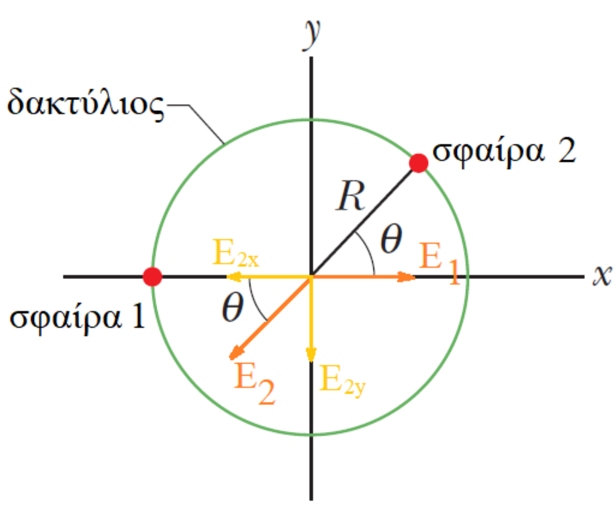
και με διανυσματική μορφή

$$\vec{F}_{1x} = \left(k_e \frac{24e^2 d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{i} \tag{30}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε τέλος ότι

$$F_{1x} = 1.31 \times 10^{-22} \text{ N} \tag{31}$$

Άσκηση 4.
Τα ηλεκτρικά πεδία φαίνονται στο Σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 4.*

δακτυλίου έχει

$$E_x = E_1 - E_{2x} \tag{32}$$
$$E_y = E_{2y} \tag{33}$$

με

$$E_x = k_e \frac{q_1}{R^2} - k_e \frac{q_2}{R^2} \cos(\theta) = \frac{k_e}{R^2}(q_1 - q_2 \cos(\theta)) \tag{34}$$
$$E_y = -k_e \frac{q_2}{R^2} \sin(\theta) \tag{35}$$

Οπότε αφού θέλουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου να είναι 2×10^5 N/C, θα πρέπει

$$E = 2 \times 10^5 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \tag{36}$$

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 \tag{37}$$

$$\Big(\frac{k_e}{R^2}(q_1 - q_2\cos(\theta))\Big)^2 + \Big(-k_e\frac{q_2}{R^2}\sin(\theta)\Big)^2 = 4 \times 10^{10} \tag{38}$$

$$2q_1q_2\cos(\theta) = q_1^2 + q_2^2 - E^2(R^2/k_e)^2 \tag{39}$$

δηλ.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{q_1^2 + q_2^2 - (\frac{R^2}{k_e})^2E^2}{2q_1q_2}\right) \tag{40}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται λαμβάνουμε τη γωνία $\theta = 67.8°$. Γνωρίζουμε όμως ότι στον τριγωνομετρικό κύκλο, υπάρχουν δυο γωνίες με συνημίτονο ίσο με μια θετική τιμή, η θ κι η $-\theta$. Άρα τελικά οι γωνίες είναι δυο, $\theta = \pm 67.8°$.

Άσκηση 5.

Από τις διαλέξεις γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο λόγω φορτισμένου δακτυλίου ακτίνας R και φορτίου Q σε ένα σημείο P απόστασης x από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση

$$E_P = k_e\frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{41}$$

με κατεύθυνση παράλληλη στον $x-$άξονα, δηλ. το πεδίο έχει μόνο $x-$συνιστώσα. Ο δακτυλιος 1 έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q_1 > 0$ και ακτίνα R, άρα συνεισφέρει στο σημείο P απόστασης $x = R$ ηλεκτρικό πεδίο

$$E_{P_1} = k_e\frac{q_1R}{(R^2 + R^2)^{3/2}} \tag{42}$$

μόνο στη $x-$συνιστώσα, ενώ ο δακτύλιος 2 έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q_2 > 0$, και την ίδια ακτίνα R, και βρίσκεται σε απόσταση $x = 2R$ από το σημείο, άρα για αυτόν θα έχουμε

$$E_{P_2} = k_e\frac{q_2(2R)}{(R^2 + (2R)^2)^{3/2}} \tag{43}$$

στη $x-$κατεύθυνση ξανά. Αφού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό, θα πρέπει

$$E_{P_1} = E_{P_2} \tag{44}$$

δηλ.

$$k_e\frac{q_1R}{(R^2 + R^2)^{3/2}} = k_e\frac{q_2(2R)}{(R^2 + (2R)^2)^{3/2}} \tag{45}$$

Απλοποιώντας

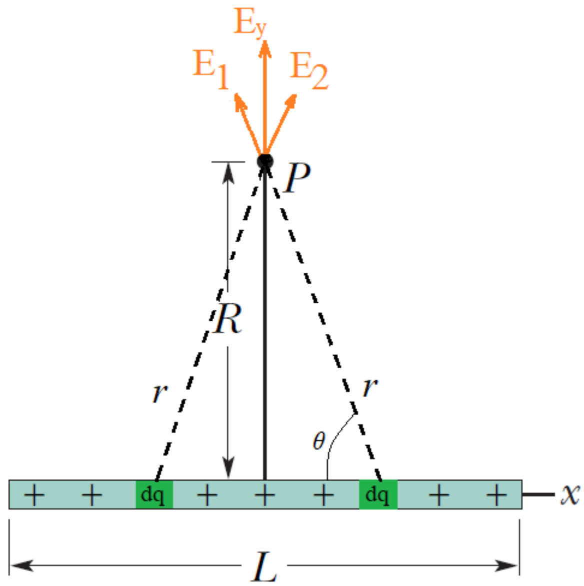
$$\frac{q_1}{(2R^2)^{3/2}} = \frac{2q_2}{(5R^2)^{3/2}} \tag{46}$$

και εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{q_1}{q_2} = 2\Big(\frac{2}{5}\Big)^{3/2} \tag{47}$$

Άσκηση 6.

Στο Σχήμα 3 βλέπετε ότι αν επιλέξουμε δυο συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ απειροστά μικρά φορτία dq, μήκους dx, οι $x-$συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου τους στο σημείο P αλληλοακυρώνονται. Οπότε στο



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 6.*

σημείο P το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει μόνο $y-$συνιστώσα. Για ένα φορτίο dq της ράβδου που απέχει απόσταση x από τη συμβολή των αξόνων, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι

$$dE_P = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \tag{48}$$

και η $y-$συνιστώσα του θα είναι

$$dE_{P_y} = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \sin(\theta) \tag{49}$$

Από την τριγωνομετρία του σχήματος

$$\sin(\theta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \tag{50}$$

οπότε

$$dE_{P_y} = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = k_e \frac{dqR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{51}$$

Επειδή η ράβδος είναι ομοιόμορφα φορτισμένη, θα έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \frac{q}{L}$ και αυτή η σχέση θα ισχύει για κάθε τμήμα της, οπότε

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Longrightarrow dq = \lambda dx \tag{52}$$

Αντικαθιστώντας

$$dE_{P_y} = k_e \frac{\lambda R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{53}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x, θα έχουμε τη συνολική συνεισφορά του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P, με τα άκρα ολοκλήρωσης να είναι από $-L/2$ ως $L/2$. Έτσι

$$E_{P_y} = \int dE_{P_y} = \int_{-L/2}^{L/2} k_e \frac{\lambda R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{54}$$

$$= k_e \lambda R \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \tag{55}$$

Από το δοσμένο ολοκλήρωμα της εκφώνησης θα έχουμε

$$E_{P_y} = k_e \lambda R \frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}}\Big|_{x=-L/2}^{x=L/2} \tag{56}$$

$$= k_e \lambda R \Big[\frac{L/2}{R^2\sqrt{(L/2)^2+R^2}} - \frac{-L/2}{R^2\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\Big] \tag{57}$$

$$= k_e \lambda R \Big[\frac{L/2}{R^2\sqrt{(L/2)^2+R^2}} + \frac{L/2}{R^2\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\Big] \tag{58}$$

$$= k_e \lambda R \Big[\frac{L}{R^2\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\Big] \tag{59}$$

$$= k_e \lambda \Big[\frac{L}{R\sqrt{(L/2)^2+R^2}}\Big] \tag{60}$$

$$= 2k_e \lambda \Big[\frac{L}{R\sqrt{L^2+4R^2}}\Big] \tag{61}$$

$$\tag{62}$$

και θέτοντας $\lambda = q/L$, μας δίνει

$$E_{P_y} = 2k_e \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{L^2+4R^2}} \tag{63}$$

και σε μορφή διανύσματος

$$\vec{E}_P = 2k_e \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{L^2+4R^2}}\vec{j} \tag{64}$$