ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1.

(α΄) Γνωρίζουμε ότι

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t) \tag{1}$$

για κάθε t. Οπότε

$$a = -\omega x \Longrightarrow \omega = \sqrt{-a/x} = \sqrt{\frac{123}{0.1}} = 35.07 \text{ rad/s} \tag{2}$$

(β΄) Είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = 0.325 \text{ kg} \tag{3}$$

(γ΄) Γνωρίζουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή, η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή διατηρείται, ισούται με

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{4}$$

Σε κάθε χρονική στιγμή η ενέργειά του θα είναι

$$E_{mech} = K + U_s = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow A^2 = \frac{m}{k}u^2 + x^2 \tag{5}$$

Έτσι

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}u^2 + x^2} \tag{6}$$

και με αντικατάσταση $A = 0.400$ m.

Άσκηση 2.

Ένα σύστημα ταλάντωσης ελατηρίου-μαζας έχει μηχανική ενέργεια 1.0 J, πλάτος ταλάντωσης 0.1 m, και μέγιστη ταχύτητα 1.2 m/s. Βρείτε

(α΄) Η ενέργεια του ταλαντωτή όταν βρίσκεται σε μεγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι όλη δυναμική και ισούται με

$$E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{7}$$

Λύνοντας ως προς k

$$k = \frac{2E_{mech}}{A^2} = 200 \text{ N/m} \tag{8}$$

(β΄) Η μέγιστη ταχύτητα του μας δίνεται, και συμβαίνει όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Τότε όλη του η ενέργεια είναι κινητικήμ με τιμή 1.0 J. Οπότε

$$E_{mech} = \frac{1}{2}mu_{max}^2 \Longrightarrow m = \frac{2E_{mech}}{u_{max}^2} = 1.388 \text{ kg} \tag{9}$$

(γ΄) Γνωρίζουμε ότι

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.909 \text{ Hz} \tag{10}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Από το σχήμα εύκολα βλέπουμε ότι $A = 0.3$ m.

(β΄) Ξέρουμε ότι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11}$$

αλλά πρεπει να βρούμε πρώτα το k. Απο το σχήμα βλέπουμε ότι το μέτρο της δύναμης ελατηρίου είναι

$$F = kx \Longrightarrow k = \frac{F}{x} = 250 \text{ N/m} \tag{12}$$

Έτσι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.28 \text{ s} \tag{13}$$

(γ΄) Γνωρίζουμε ότι

$$a_{max} = -\omega^2 A \Longrightarrow |a_{max}| = \omega^2 A = \frac{k}{m}A = 150\text{m/s}^2 \tag{14}$$

(δ΄) Ξέρουμε ότι

$$|u_{max}| = \omega A \tag{15}$$

οπότε

$$K = \frac{1}{2}mu_{max}^2 = 11.25 \text{ J} \tag{16}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Από την κυματική εξίσωση βλέπουμε ότι $\omega = 4$, οπότε

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.636 \text{ Hz} \tag{17}$$

(β΄) Εξ ορισμού

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{18}$$

Από την εξίσωση όμως παρατηρούμε ότι $k(0.1) = 1 \Longrightarrow k = 10$ rad/m.

(γ΄) Έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.628 \text{ m} \tag{19}$$

(δ΄) Προφανώς από την εξίσωση έχουμε $A = 0.05$ m.

(ε΄) Αφού το κύμα κινείται προς τα δεξιά, το σωστό πρόσημο είναι $-$ και η κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$y(x,t) = 0.05\sin(10x - 4t) \tag{20}$$

(ϛ΄) Αφού

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Longrightarrow T = u^2\mu = 0.064 \text{ N} \tag{21}$$

Άσκηση 5.
Η διαφορά στην ηχοστάθμη θα είναι

$$\Delta\beta = \beta_f - \beta_i = 10 \log_{10} \frac{I_f}{I_i} \tag{22}$$

Για $\Delta\beta = 5.0$, έχουμε

$$\log_{10} \frac{I_f}{I_i} = \frac{1}{2} \Longrightarrow I_f = \sqrt{10} I_i \tag{23}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \tag{24}$$

οπότε για δυο διαφορετικές εντάσεις θα έχουμε

$$I_f = \frac{P_{avg}}{4\pi r_f^2} \tag{25}$$

$$I_i = \frac{P_{avg}}{4\pi r_i^2} \tag{26}$$

και διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{I_f}{I_i} = \frac{r_i^2}{r_f^2} \tag{27}$$

Λύνοντας ως προς r_f έχουμε

$$r_f = \left(\frac{I_i}{I_f}\right)^{1/2} r_i = (0.1)^{1/4}(1.2) = 0.674 \text{ m} \tag{28}$$

Άσκηση 6.

(α') Η συχνότητα που ακούμε εμείς είναι

$$f_- = \frac{u+0}{u+u_s} f = 970.6 \text{ Hz} \tag{29}$$

(β') Υποθέτοντας ότι η συχνότητα που ανακλάται ισούται με τη συχνότητα που ακούει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στον τοίχο, θα είναι

$$f_+ = \frac{u+0}{u-u_s} f = 1031.3 \text{ Hz} \tag{30}$$

(γ') Χρησιμοποιώντας τη βοήθεια, έχουμε

$$f_+ = \frac{u-u_o}{u-u_s} f = 1238.7 \text{ Hz} \tag{31}$$

Άσκηση 7.

(α') Το πλάτος καθενός κύματος είναι το μισό του συνολικού στάσιμου κύματος, οπότε $A' = A/2 = 0.25$ cm. Η ταχύτητα των κυμάτων δίνεται από τη σχέση $u = \frac{\omega}{k} = 1.2 \times 10^2$ cm/s.

(β') Η απόσταση μεταξύ δυο δεσμών είναι μισό μήκος κύματος, δηλ.

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/k}{2} = 3.0 \text{ cm} \tag{32}$$

(γ΄) Η εγκάρσια ταχύτητα των στοιχείων δίνεται αν παραγωγίσουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος ως προς t, δηλ.

$$u_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A \sin(kx)\sin(\omega t) \tag{33}$$

Για $(x,t) = (1.5, 9/8)$ έχουμε $u_y = 0$.

Άσκηση 8.

(α΄) Οι δεσμοί βρίσκονται όταν το πλάτος $2A\sin(kx)$ του στάσιμου κύματος μηδενίζεται. Άρα

$$\sin(5\pi x) = 0 \Longleftrightarrow 5\pi x = n\pi \Longleftrightarrow x = \frac{n\pi}{5},\ n \in \mathrm{Z} \tag{34}$$

i. Η μικρότερη τιμή είναι $x = 0$ m.
ii. Η δεύτερη μικρότερη είναι $x = 1/5$ m.
iii. Η τρίτη μικρότερη είναι $x = 2/5$ m.

(β΄) Αφού κάθε στοιχείο του νήματος εκτελεί Α.Α.Τ, η περίοδος της κίνησης θα είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0.05 \text{ s} \tag{35}$$

(γ΄) Μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι τα δυο συμβαλλόμενα κύματα θα είναι της μορφής

$$y_1(x,t) = 0.02\sin(5\pi x - 40\pi t) \tag{36}$$

$$y_2(x,t) = 0.02\sin(5\pi x + 40\pi t) \tag{37}$$

Έτσι, η ταχύτητά τους θα είναι

$$u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 8.0 \text{ m/s} \tag{38}$$

και το πλάτος τους $A' = 0.02$ m.

(δ΄) Η εγκάρσια ταχύτητα κάθε στοιχείου του νήματος δίνεται από τη σχέση

$$u_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A \sin(5\pi x)\sin(40\pi t) \tag{39}$$

και μηδενίζεται όταν $\sin(40\pi t) = 0$. Άρα

$$\sin(40\pi t) = 0 \Longleftrightarrow 40\pi t = n\pi \Longleftrightarrow t = \frac{n}{40},\ n \in \mathrm{Z} \tag{40}$$

Οπότε

i. η πρώτη χφονική στιγμή θα είναι $t = 0$.
ii. η δεύτερη χρονική στιγμή θα είναι $t = 1/40$ s.
iii. η τρίτη χρονική στιγμή θα είναι $t = 2/40$ s.