ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2020
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Σε όλες τις απαντήσεις, υποθέτουμε θετική φορά της κίνησης προς τα δεξιά και προς τα πάνω.

Άσκηση 1.
Κάθε ζεύγος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μετατόπισης. Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί στις επιμέρους συνιστώσες και γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των $x-$συνιστωσών πρέπει να ισούται με τη $x-$συνιστώσα της συνολικής μετατόπισης. Ακριβώς το ίδιο και για την $y-$συνιστώσα.

(α΄) Στον $x-$άξονα

$$30 + b_x - 20 - 80 = -140 \Longleftrightarrow b_x = -70.0 \text{ cm} \tag{1}$$

και στον $y-$άξονα

$$40 - 70 + c_y - 70 = -20 \Longleftrightarrow c_y = 80.0 \text{ cm} \tag{2}$$

(β΄) Η συνολική μετατόπιση έχει συντεταγμένες $(-140.0, -20.0)$ οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-140)^2 + (-20)^2} = 141.42 \text{ cm} \tag{3}$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης με τον άξονα $x'x$ είναι

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-20}{-140} \approx 8.13^\circ \tag{4}$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στο σωστό αποτέλεσμα γιατί το διάνυσμα $(-140, -20)$ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο ενώ η γωνία που βρήκαμε μόλις στο 1ο, οπότε προσθέτοντας 180° παίρνουμε

$$\theta = 188.13^\circ \tag{5}$$

Άσκηση 2.
Υποθέτοντας γωνίες $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = -45^\circ$, $\theta_3 = -135^\circ$, όπως στο Σχήμα 1, και έχοντας $d_1 = 3.66$, $d_2 = 1.83$, $d_3 = 0.91$, αναλύουμε σε συνιστώσες και έχουμε

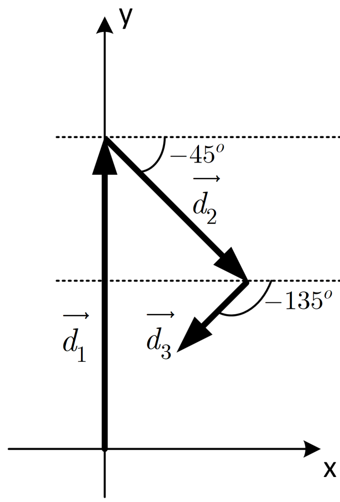
$$\begin{aligned} d_x &= d_1\cos(\theta_1) + d_2\cos(\theta_2) + d_3\cos(\theta_3) && (6)\\ &= d_1\cos(90^\circ) + d_2\cos(-45^\circ) + d_3\cos(-135^\circ) && (7)\\ &= 0.65 \text{ m} && (8)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} d_y &= d_1\sin(\theta_1) + d_2\sin(\theta_2) + d_3\sin(\theta_3) && (9)\\ &= d_1\sin(90^\circ) + d_2\sin(-45^\circ) + d_3\sin(-135^\circ) && (10)\\ &= 1.72 \text{ m} && (11)\end{aligned}$$

Οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{0.65^2 + 1.72^2} = 1.83 \text{ m} \tag{12}$$



Σχήμα 1: *Χτυπήματα golf.*

Τέλος η γωνία θα είναι

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1.72}{0.65} = 69.3^\circ \tag{13}$$

η οποια είναι σωστή, καθώς το διάνυσμα $\vec{d}$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Άσκηση 3.

(αʹ) Για να βρούμε πότε φτάνει σε ακινησία, χρειαζόμαστε μια συνάρτηση $u(t)$, που δεν είναι άλλη από τη στιγμιαία ταχύτητα. Γνωρίζουμε ότι

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 9 - \frac{9}{4}t^2 \tag{14}$$

Λύνοντας την εξίσωση $u(t) = 0$ παίρνουμε ότι $t = 2.0$ s.

(βʹ) Θέτοντας $t = 2.0$ στη δοσμένη σχέση $x(t)$ παίρνουμε $x(2.0) = 9 \cdot 2 - \frac{3}{4}(2)^3 = 12$ cm.

(γʹ) Για να βρούμε την επιτάχυνση σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή χρειαζόμαστε τη στιγμιαία επιτάχυνση, που είναι η πρώτη παράγωγος της στιγμιαίας ταχύτητας, δηλ.

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = -\frac{9}{2}t \tag{15}$$

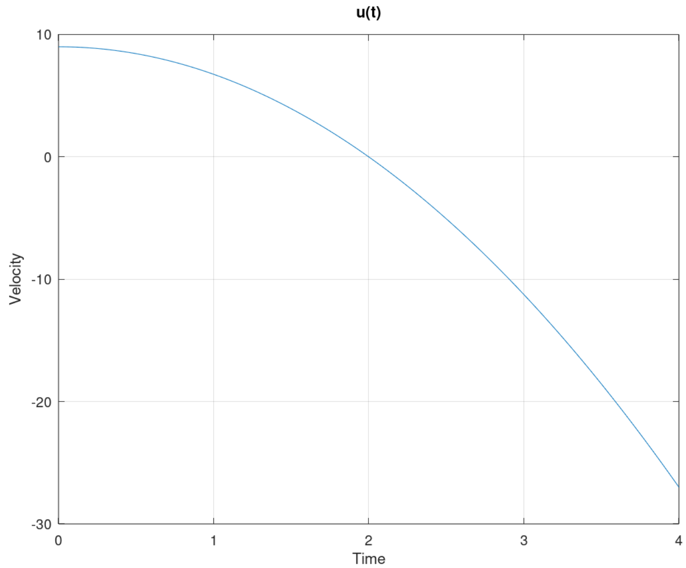
και για $t = 2.0$ έχουμε $a(2.0) = -9$ cm/s^2, με το αρνητικό πρόσημο να υποδηλώνει κατεύθυνση διανύσματος προς το αριστερό άκρο της οθόνης.

(δʹ) Αφού έρχεται σε ακινησία για $t = 2.0$, από το γράφημα της $u(t)$ καταλαβαίνουμε ότι για $t \to 2.0$ από αριστερά, έχουμε θετικές τιμές της $u(t)$, οπότε το σώμα κινούνταν προς τα δεξιά.

(εʹ) Από το γράφημα της $u(t)$ καταλαβαίνουμε ότι για $t \to 2.0$ από δεξιά, έχουμε αρνητικές τιμές της $u(t)$, οπότε το σώμα κινούνταν προς τα αριστερά.

(ϛʹ) Αφού μετά το $t = 2.0$ το σώμα κινείται προς τα αριστερά, θα συναντήσει το αριστερό άκρο της οθόνης πρώτα, που αντιστοιχεί στο $x = 0$. Λύνοντας την εξίσωση

$$x(t) = 0 \Longleftrightarrow 9t - \frac{3}{4}t^3 = 0 \Longleftrightarrow 9 - \frac{3}{4}t^2 = 0 \Longleftrightarrow t^2 = 12 \Longrightarrow t = \sqrt{12}\ \text{s} \tag{16}$$



Σχήμα 2: *Γραφική παράσταση* $u(t)$.

Άσκηση 4.

(α΄) Χρειαζόμαστε μια έκφραση της στιγμιαίας επιτάχυνσης, οπότε

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{u}(t) = (6.0 - 8.0t)\vec{i} \tag{17}$$

Για $t = 3.0$, έχουμε $\vec{a}(3.0) = -18.0\vec{i}\ \mathrm{m/s^2}$.

(β΄) Θέτοντας ίση με το μηδέν και λύνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\vec{a} = (6.0 - 8.0t)\vec{i} = 0 \Longrightarrow 6.0 - 8.0t = 0 \Longrightarrow t = \frac{3}{4}\ \mathrm{s} \tag{18}$$

(γ΄) Για να μηδενιστεί η ταχύτητα πρέπει να υπάρχει κάποιο t που να μηδενίζει τη $x-$ και την $y-$συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας. Αφού $u_y = -18$ m/s, αυτό δε συμβαίνει ποτέ.

(δ΄) Αφού

$$|\vec{u}(t)| = \sqrt{(6.0t - 4.0t^2)^2 + (8.0)^2} = 10 \tag{19}$$

τότε λύνοντας ως προς t έχουμε, υψώνοντας στο τετράγωνο την παραπάνω σχέση

$$(6.0t - 4.0t^2)^2 + 64 = 100 \Longleftrightarrow 6.0t - 4.0t^2 = \pm 6.0 \Longleftrightarrow 4.0t^2 - 6.0t \pm 6.0 = 0 \tag{20}$$

Η λύση του τριωνύμου είναι

$$t = \frac{6.0 \pm \sqrt{36 - 4(4.0)(\pm 6.0)}}{2(4.0)} = 2.18\ \mathrm{s} \tag{21}$$

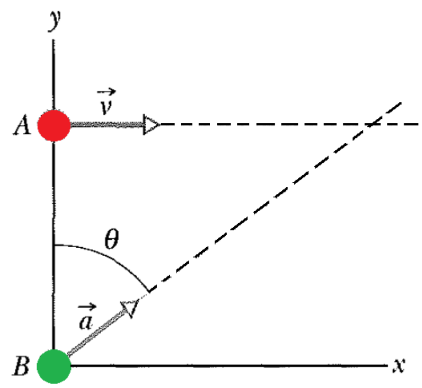
κρατώντας τη θετική πραγματική από τις ρίζες.

Άσκηση 5.

Αναλύοντας την επιτάχυνση κατά άξονες έχουμε

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \tag{22}$$

με $a_x = 0.4\sin(\theta)$ και $a_y = 0.4\cos(\theta)$, από το ορθογώνιο τρίγωνο που περιέχει τη γωνία θ. Η σύγκρουση των δυο σωμάτων απαιτεί δυο πράγματα: πρώτον, η $y-$συνιστώσα της κίνησης του σώματος B από το σημείο έναρξης ως το σημείο σύγκρουσης να ικανοποιεί τη σχέση



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 5.*

$$y_f = y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 30 \Longleftrightarrow 30 = 0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}(0.4\cos(\theta))t^2 \Longleftrightarrow 60 = 0.4\cos(\theta)t^2 \tag{23}$$

Δεύτερον, οι $x-$συνιστώσες της κίνησης των δυο σωμάτων πρέπει να συμπίπτουν στο σημείο σύγκρουσης. Το σώμα A εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, το σώμα B ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον $x-$άξονα:

$$x_{A_f} = x_{B_f} \Longleftrightarrow u_x t = \frac{1}{2}a_x t^2 \Longleftrightarrow 3t = \frac{1}{2}(0.4\sin(\theta))t^2 \tag{24}$$

και λύνοντας ως προς t

$$t = \frac{2u}{a_x} = \frac{15}{\sin(\theta)} \tag{25}$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση

$$60 = (0.4\cos(\theta))\left(\frac{15}{\sin(\theta)}\right)^2 \tag{26}$$

Με χρήση της ταυτότητας $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ καταλήγουμε στη σχέση

$$1 - \cos^2(\theta) = \frac{3}{2}\cos(\theta) \tag{27}$$

Θέτοντας $x = \cos(\theta)$ και λύνοντας το τριώνυμο κρατώντας τη θετική ρίζα, έχουμε

$$x = \frac{-1.5 + \sqrt{1.5^2 + 4}}{2} = \frac{1}{2} \tag{28}$$

δηλ.

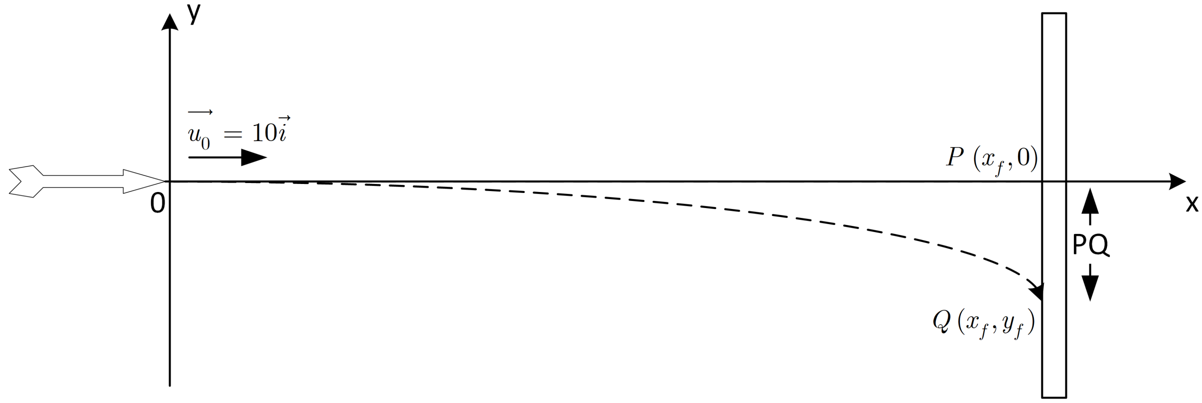
$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 60^\circ \tag{29}$$

Άσκηση 6.
Αφού το βελάκι ρίπτεται οριζόντια, αυτό σημαίνει ότι $u_{0_y} = 0$ και ότι $u_{0_x} = 10$ m/s, δηλ. $\vec{u}_0 = 10\vec{i}$ m/s.

(α') Θέτοντας τη συμβολή των αξόνων στο σημείο που το βελάκι φεύγει από το χέρι μας, η y-συνιστώσα του βέλους κατά την κίνηση από το χέρι στον στόχο δίνεται από τη σχέση

$$y_f = y_0 + u_{0_y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{30}$$

έτσι ώστε y_f να είναι η απόσταση που ζητείται από το κέντρο, και είναι αρνητική όπως εξηγείται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 6.*

Οπότε

$$|y_f| = PQ = \frac{1}{2}9.8 \cdot 0.19^2 = 0.176 \text{ m} \tag{31}$$

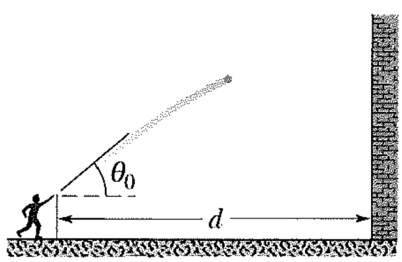
(β') Στον $x-$άξονα, το βέλος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα στην ίδια διαδρομή, οπότε

$$x_f = x_i + u_x t \Longleftrightarrow x_f = 0 + u_x t = u_{0_x} t = 1.9 \text{ m} \tag{32}$$

Άρα η απόσταση ρίψης είναι 1.9 μέτρα.

Άσκηση 7.

Θέτουμε τη συμβολή του συστήματος συντεταγμένων μας στα χέρια μας. Η $x-$συνιστώσα της ταχύτητας είναι $u_{0_x} = u_0 \cos(40°)$ και η $y-$συνιστώσα της είναι $u_{0_y} = u_0 \sin(40°)$. Θεωρούμε αρχικό σημείο της κίνησης το σημείο που φεύγει η μπάλα από τα χέρια μας και τελικό σημείο το σημείο πρόσκρουσης με τον τοίχο.



Σχήμα 5: *Σχήμα Άσκησης 7.*

(α') Ο χρόνος που χρειάζεται η μπάλα για να φτάσει στον τοίχο δίνεται αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή με σταθερή ταχύτητα, οπότε

$$x_f = x_i + u_x t \Longleftrightarrow d = 0 + u_{0_x} t \Longleftrightarrow t = \frac{d}{u_{0_x}} = \frac{22}{25\cos(40°)} = 1.15 \text{ s} \tag{33}$$

Στον $y-$άξονα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε

$$y_f = y_i + u_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow y_f = 0 + u_0 \sin(40°)t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow y_f = 12.0 \text{ m} \tag{34}$$

(β΄) Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας δεν αλλάζει αφού η $x-$συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή:

$$u_x = u_0 \cos(40^\circ) = 19.2 \text{ m/s} \tag{35}$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της μεταβάλλεται ως

$$u_y = u_{0_y} - gt = u_0 \sin(40^\circ) - gt = 4.8 \text{ m/s} \tag{36}$$

οπότε

$$\vec{u}_f = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} = 19.2\vec{i} + 4.8\vec{j} \tag{37}$$

(γ΄) Αφού $u_y > 0$ όταν η μπάλα χτυπάει τον τοίχο, δεν έχει φτάσει ακόμα στο μέγιστο ύψος (όπου $u_y = 0$, και στη συνέχεια $u_y < 0$).