ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1.
Θεωρήστε το χέλι σαν μια ιδανική μπαταρία που συνδέεται με το θύμα του με θεωρητικά, ιδανικά καλώδια.

(α΄) Η ισχύς που παραδίδεται από το χέλι στο θύμα είναι

$$P = (\Delta V)I \tag{1}$$

Η ενέργεια του παλμού είναι

$$E = P\Delta t = (\Delta V)I(\Delta t) = 450 \times 0.8 \times 1 \times 10^{-3} = 0.36 \text{ J} \tag{2}$$

(β΄) Το συνολικό φορτίο που ρέει στο σώμα του θύματος είναι

$$Q = I\Delta t = 0.8 \times 10^{-3} = 0.8 \text{ mC} \tag{3}$$

Άσκηση 2.
Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff - ο κανόνας κόμβου δηλαδή - μας λέει ότι το ρεύμα που ρέει στον αντιστάτη των 2 Ω στο μεσαίο κλάδο του κυκλώματος είναι

$$I_1 + I_2 = 3 \text{ A} \tag{4}$$

Μπορούμε να βρούμε το ρεύμα I_1 εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff - τον κανόνα βρόχου δηλαδή - στον αριστερό βρόχο. Διατρέχοντας το βρόχο με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από την πάνω δεξιά γωνία του βρόχου θα έχουμε

$$\sum \Delta V = 0 \iff 9 - 3I_1 - 6 = 0 \implies I_1 = 1.0 \text{ A} \tag{5}$$

και άρα

$$I_2 = 3 - I_1 = 2.0 \text{ A} \tag{6}$$

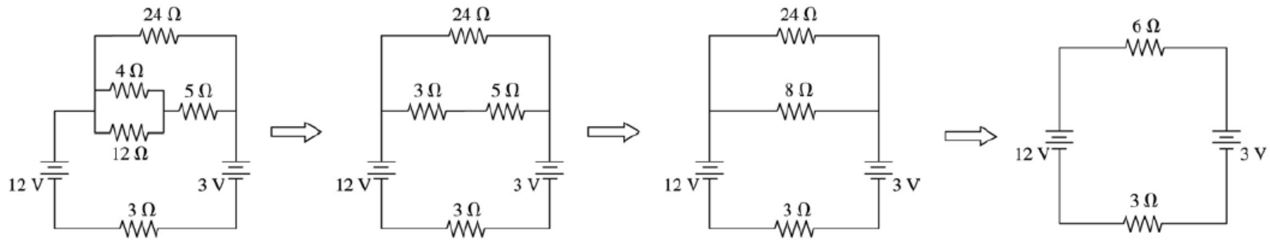
Τέλος, για να βρούμε την ΗΕΔ ε εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο δεξί βρόχο, διατρέχοντάς τον αριστερόστροφα από την πάνω δεξιά γωνία του. Οπότε:

$$\sum \Delta V = 0 \iff \varepsilon - 4.5I_2 - 6 = 0 \implies \varepsilon = 15 \text{ V} \tag{7}$$

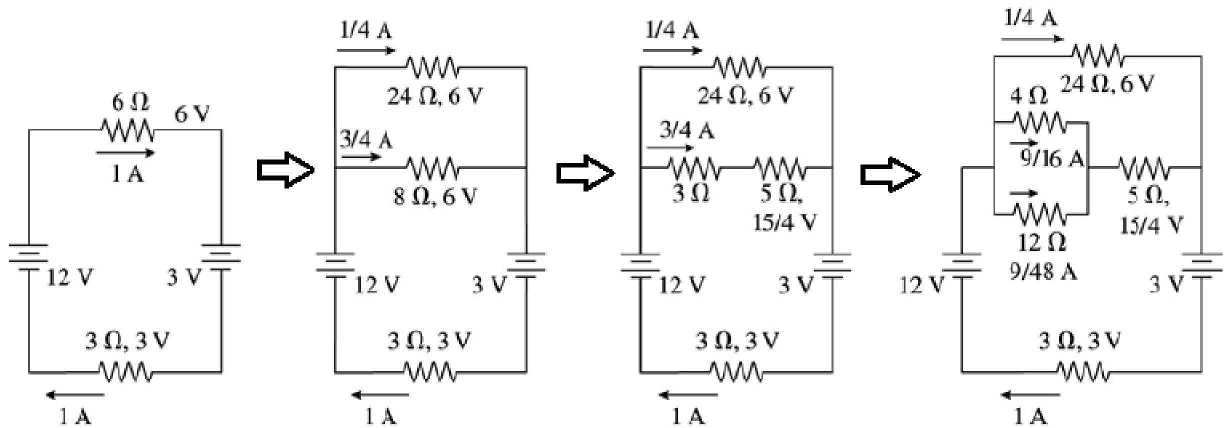
Άσκηση 3.
Στο Σχήμα 1, βλέπετε πώς απλοποιείται το δοσμένο κύκλωμα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις απλοποίησης των αντιστάσεων σε σειρά και σε παραλληλία. Έχοντας καταλήξει σε ένα απλοποιημένο κύκλωμα μιας ισοδύναμης αντίστασης, θα κινηθούμε αντίστροφα για να βρούμε όλα τα ζητούμενα. Συνθέτοντας ξανά το αρχικό κύκλωμα βήμα-βήμα, προσέχουμε οι αντιστάτες σε σειρά να έχουν το ίδιο ρεύμα και οι αντιστάτες σε παραλληλία να έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού.

Από το πρώτο κύκλωμα στο Σχήμα 2 και τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για φορά ρεύματος από την πηγή 12 V στην πηγή 3 V, έχουμε

$$\sum \Delta V = 0 \iff 12 - IR_1 - 3 - IR_2 = 0 \iff I = \frac{12-3}{6+3} = 1 \text{ A} \tag{8}$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 3 - Απλοποίηση.*



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 3 - Σύνδεση του αρχικού κυκλώματος.*

Άρα το ρεύμα στο Σχήμα 2 θα είναι 1 A. Στη συνέχεια

$$\Delta V_3 = IR_2 = 3 \text{ V} \tag{9}$$

και

$$\Delta V_{6eq} = 6 \text{ V} \tag{10}$$

Στο δεύτερο κύκλωμα, ο ισοδύναμος αντιστάτης των 6 Ω αντικαθίσταται από τους αρχικούς των 24 και 8 Ω σε παραλληλία. Οι δυο αντιστάτες πρέπει να έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού $\Delta V = 6$ V. Άρα

$$I_{8eq} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ A} \tag{11}$$

και

$$I_{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ A} \tag{12}$$

Στο τρίτο κύκλωμα, ο αντιστάτης των 8 Ω αντικαθίσταται από τους αρχικούς των 3 και 5 Ω σε σειρά, άρα οι δυο αντιστάτες πρέπει να έχουν το ίδιο ρεύμα, δηλ.

$$\Delta V_{3eq} = \frac{3}{4}3 = \frac{9}{4} \text{ V} \tag{13}$$

και

$$\Delta V_5 = \frac{3}{4}5 = \frac{15}{4} \text{ V} \tag{14}$$

Στο τέταρτο κύκλωμα, ο αντιστάτης των 3 Ω αντικαθίσταται από τους δυο αντιστάτες των 4 Ω και 12 Ω σε παραλληλία, οπότε θα έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού. Άρα

$$I_4 = \frac{\frac{9}{4}}{4} = \frac{9}{16} \text{ A} \tag{15}$$

και

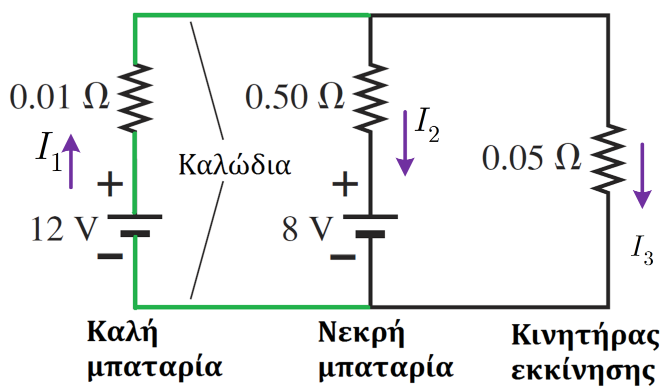
$$I_{12} = \frac{\frac{9}{4}}{12} = \frac{9}{48} \text{ A} \tag{16}$$

Αντίσταση	Διαφορά Δυναμικού	Ρεύμα
24 Ω	6	1/4
3 Ω	3	1
5 Ω	15/4	3/4
4 Ω	9/4	9/16
12 Ω	9/4	9/48

Σχήμα 3: *Πίνακας.*

Ο πίνακας που συνοψίζει τα ευρήματα φαίνεται στο Σχήμα 3.

Άσκηση 4.
Δείτε το κύκλωμα αυτοκινήτου του Σχήματος 4.



Σχήμα 4: *Κύκλωμα Άσκησης 4.*

(α') Η καλή μπαταρία μόνη της μπορεί να άγει ρεύμα μέσω του κινητήρα έντασης

$$I = \frac{12}{0.01 + 0.05} = 200 \text{ A} \tag{17}$$

(β') Αγνοώντας την πράσινη καλωδίωση, η νεκρή μπαταρία άγει ρεύμα

$$I = \frac{8}{0.5 + 0.05} = 14.5 \text{ A} \tag{18}$$

(γ') Λαμβάνοντας υπόψη την πράσινη καλωδίωση, έστω I_1, I_2, I_3 τα ρεύματα στο κύκλωμα του Σχήματος 4. Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff μπορεί να εφαρμοστεί σε δυο βρόχους: στο βρόχο που περιλαμβάνει τη νεκρή και την καλή μπαταρία, και στο βρόχο που περιλαμβάνει την καλή μπαταρία και τον κινητήρα:

$$12 - 0.01I_1 - 0.05I_3 = 0 \tag{19}$$
$$12 - 0.01I_1 - 0.5I_2 - 8 = 0 \tag{20}$$

Ο 1ος κανόνας του Kirchhoff στον πάνω μεσαίο κόμβο μας δίνει

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{21}$$

Λύνοντας ως προς I_3 έχουμε

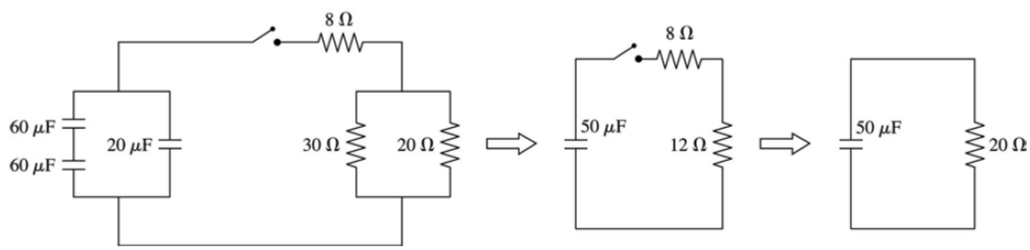
$$I_3 = 199 \text{ A} \approx 200 \text{ A} \tag{22}$$

(δ΄) Λύνουμε ως προς I_2 και παίρνουμε

$$I_2 = 3.9 \text{ A} \approx 4 \text{ A} \tag{23}$$

Άσκηση 5.

Στο Σχήμα 5 βλέπουμε την απλοποίηση του κυκλώματος. Οι αντιστάτες των 30 και 20 Ω είναι σε παραλληλία



Σχήμα 5: *Απλοποίηση κυκλώματος Άσκησης 5.*

και η ισοδύναμη αντίστασή τους είναι 12 Ω. Αυτή η αντίσταση βρίσκεται σε σειρά με τον αντιστάτη των 8 Ω, οποτε η ισοδύναμη αντίσταση θα είναι $R_{eq} = 20$ Ω, που αποτελεί τον ισοδύναμο αντιστάτη για όλο το κύκλωμα. Οι δυο πυκνωτές των 60 μF βρίσκονται σε σειρά, οπότε η ισδύναμη χωρητικότητα τους θα είναι 30 μF. Αυτός ο πυκνωτής βρίσκεται σε παραλληλία με τον πυκνωτή χωρητικότητας 20 μF οπότε η ισοδύναμη τους χωρητικότητα C_{eq} θα είναι 50 μF. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η χρονική σταθερά τ δίνεται ως

$$\tau = R_{eq}C_{eq} = 1.0 \text{ ms} \tag{24}$$

Το ρεύμα λόγω των τριών πυκνωτών που περνά από τους αντιστάτες των 20 και 8 Ω είναι το ίδιο. Άρα το ρεύμα στα άκρα του αντιστάτη των 8 Ω ακολουθεί τη σχέση της θεωρίας, δηλ.

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \tag{25}$$

Για $I = I_0/2$, έχουμε

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-10^3 t} = \log\frac{1}{2} = -\frac{t}{10^{-3}} \Longrightarrow t = 0.69 \text{ ms} \tag{26}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Από το 2ο κανόνα του Kirchhoff στον κλειστό βρόχο θα έχουμε

$$12 - 2I - 4I = 0 \Longrightarrow I = 2.0 \text{ A} \tag{27}$$

Οπότε

$$V_b - V_a = 4 - 2 \times 4 - 0 \times 10 = -4 \text{ V} \tag{28}$$

Οπότε

$$|\Delta V_{ab}| = 4 \text{ V} \tag{29}$$

(β΄) Από το προηγ. ερώτημα

$$V_b - V_a = -4 \Longrightarrow V_a = V_b + 4 \tag{30}$$

άρα το σημείο a έχει υψηλότερο δυναμικό.

Άσκηση 7.

Ας βρούμε μια έκφραση για την ισχύ που παραδίδεται στον αντιστάτη αντίστασης R.

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 R \Longrightarrow (R+r)^2 = \frac{\varepsilon^2}{P} r = aR \tag{31}$$

με $a = \frac{\varepsilon^2}{P}$. Συνεχίζοντας

$$r^2 + 2Rr + R^2 = aR \tag{32}$$

$$R^2 + (2r - a)R + r^2 = 0 \tag{33}$$

$$R^2 + bR + r^2 = 0 \tag{34}$$

με

$$b = 2r - a = 2r = \frac{\varepsilon^2}{P} \tag{35}$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$R = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4r^2}}{2} \tag{36}$$

με

$$b = 2 \times 1.2 - \frac{9.2^2}{21.2} = -1.59\ \Omega \tag{37}$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$R = \frac{-(-1.59) \pm \sqrt{(-1.59)^2 - 4 \times 1.2^2}}{2} = \frac{1.59 \pm \sqrt{-3.22}}{2} \tag{38}$$

Η παραπάνω σχέση δεν έχει πραγματικές λύσεις οπότε δεν υπάρχει αντιστάτης αντίστασης R που να μπορεί να λάβει 21.2 W από την μπαταρία.

Άσκηση 8.

(αʹ) Η ισοδύναμη χωρητικότητα αυτού του παράλληλου συνδυασμού είναι

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 5\ \mu\text{F} \tag{39}$$

Όταν φορτιστεί πλήρως από τη μπαταρία, το συνολικό φορτίο πριν το κλείσιμο του διακόπτη είναι

$$Q_0 = C_{eq}\Delta V = 60\ \mu\text{C} \tag{40}$$

Όταν ο διακόπτης κλείσει, η χρονική σταθερά τ του κυκλώματος είναι

$$\tau = RC_{eq} = 2.5\ \text{ms} \tag{41}$$

Έτσι, στο $t = 1.0$ ms μετά το κλείσιμο, το φορτίο που απομένει είναι

$$q = Q_0 e^{-t/\tau} = 40.2\ \mu\text{C} \tag{42}$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του παράλληλου συνδυασμού των πυκνωτών είναι

$$\Delta V = \frac{q}{C_{eq}} = 8.04\ \text{V} \tag{43}$$

και το εναπομείναν φορτίο στον πυκνωτή των 3.0 μF είναι

$$q_3 = C_3\Delta V = 24.1\ \mu\text{C} \tag{44}$$

(βʹ) Το φορτίο που απομένει στον πυκνωτή των 2.0 μF είναι

$$q_2 = q - q_3 = 16.1\ \mu\text{C} \tag{45}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε και με τη σχέση

$$q_2 = C_2\Delta V \tag{46}$$

(γʹ) Αφού ο αντιστάτης είναι σε παραλληλία με τη διάταξη των πυκνωτών, έχει την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα του με τους πυκνωτές. Από το νόμο του Ohm, έχουμε

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{8.04}{5 \times 10^2} = 1.61 \times 10^{-2}\ \text{A} \tag{47}$$