ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

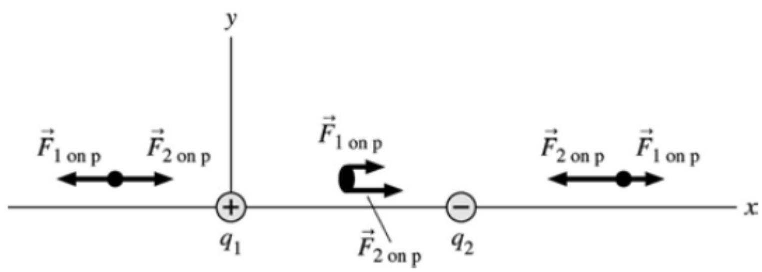
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1.

i. Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά στην εύρεση κατάλληλης θέσης για το πρωτόνιο όπου $\vec{F}_{1 \text{ επάνω } p} = -\vec{F}_{2 \text{ επάνω } p}$, δηλ. οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω στο πρωτόνιο είναι ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης. Αν το



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

πρωτόνιο βρίσκεται στη θέση x, βρίσκεται σε απόσταση $|x|$ από το q_1 και σε απόσταση $|d-x|$ από το q_2, με $d = 0.01$ m. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι

$$F_{1 \text{ επάνω} p} = k_e \frac{|q_1||q_p|}{x^2} \tag{1}$$

$$F_{2 \text{ επάνω} p} = k_e \frac{|q_2||q_p|}{(d-x)^2} \tag{2}$$

Εξισώνοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$\frac{2 \times 10^{-9}}{x^2} = \frac{4 \times 10^{-9}}{(d-x)^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{3}$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι οι $x_1 = 0.414$ και $x_2 = -2.41$ cm. Και οι δυο θέσεις είναι θέσεις όπου το μέτρο των δυο δυνάμεων είναι ίσο, αλλά η θέση $x = 0.414$ είναι σημείο όπου τα μέτρα είναι ίσα αλλά και οι κατευθύνσεις των δυνάμεων είναι επίσης ίδιες. Άρα η σωστή λύση είναι η άλλη, $x = -2.41$ cm.

ii. Ναι, η συνισταμένη θα ήταν ξανά μηδέν για ένα ηλεκτρόνιο στην παραπάνω θέση. Αυτό γιατί η λύση στο προηγούμενο ερώτημα δεν εξαρτάται από το είδος του φορτίου που δέχεται μηδενική δύναμη από τα άλλα δυο φορτία.

Άσκηση 2.

i. Χωρίζουμε τη ράβδο σε πολλά απειροστά μικρά τμήμα φορτίου dq και μήκους dy. Έστω ένα τμήμα dy με φορτίο dq της ράβδου που βρίσκεται στο σημείο $(0, \hat{y})$. Η απόσταση από το σημείο P είναι $(x^2 + \hat{y}^2)^{1/2}$. Το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει στο σημείο P το παραπάνω φορτίο δημιουργεί γωνία θ με το οριζόντιο άξονα και είναι

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2 + \hat{y}^2)} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) \tag{4}$$

Αφού $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}$ και $\sin\theta = \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2+\hat{y}^2)}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\vec{i} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\vec{j}\Big) \tag{5}$$

ii. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο P αποτελείται από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών των μικρών τμημάτων φορτίου dq. Δεδομένου ότι η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda = Q/L$, τότε $dq = \lambda d\hat{y}$. Ολοκληρώνοντας από $\hat{y} = 0$ ως $\hat{y} = L$, θα είναι

$$\vec{E} = k_e\lambda\Big(\int_0^L \frac{x d\hat{y}}{(x^2+\hat{y}^2)^{3/2}}\vec{i} - \int_0^L \frac{\hat{y} d\hat{y}}{(x^2+\hat{y}^2)^{3/2}}\vec{j}\Big) \tag{6}$$

$$= k_e\frac{Q}{L}\Big(x\frac{\hat{y}}{x^2\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\Big]_0^L\vec{i} - \frac{-1}{\sqrt{x^2+\hat{y}^2}}\Big]_0^L\vec{j}\Big) \tag{7}$$

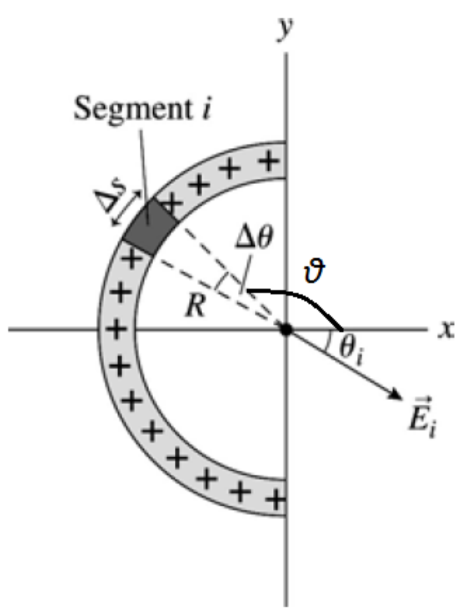
$$= k_e Q\frac{1}{x\sqrt{x^2+L^2}}\vec{i} - k_e\frac{Q}{Lx}\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\Big)\vec{j} \tag{8}$$

iii. Αν $x \gg L$, τότε $x^2 + L^2 \approx x^2$, οπότε

$$\vec{E} = k_e Q\frac{1}{x\sqrt{x^2}}\vec{i} - k_e\frac{Q}{Lx}\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\Big)\vec{j} = k_e\frac{Q}{x^2}\vec{i} \tag{9}$$

Η ράβδος τότε συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων!

Άσκηση 3.



Σχήμα 2: Φορτισμένη ράβδος Άσκησης 3.

i. Επειδή κάθε τμήμα i της ράβδου υπό γωνία θ επάνω από τον οριζόντιο άξονα “ταιριάζει” με ένα άλλο τμήμα υπό γωνία θ κάτω από τον οριζόντιο άξονα, οι $y-$συνιστώσες των ηλεκτρικών τους πεδίων αλληλοαναιρούνται. Αυτό συμβαίνει για όλα τα ζεύγη τμημάτων που βρίσκονται υπό την ίδια γωνία επάνω και κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Άρα

$$E_y = 0 \tag{10}$$

ii. Παρατηρήστε ότι όλα τα τμήματα ράβδου απέχουν απόσταση R από το κέντρο. Η συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου για ένα τμήμα i φορτίου dq είναι

$$dE_i = k_e \frac{dq}{R^2} \tag{11}$$

Η πυκνότητα φορτίου είναι γραμμική, δηλ $\lambda = Q/L$, οπότε για ένα τμήμα ράβδου απειροστά μικρού μήκους ds και απειροστά μικρού φορτίου dq, είναι $dq = \lambda ds = \frac{Q}{L} ds$. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για το τμήμα i σχηματίζει γωνία θ_i με τον οριζόντιο άξονα. Αντικαθιστώντας, έχουμε για τη $x-$συνιστώσα ότι

$$dE_x = dE_i \cos(\theta_i) = k_e \frac{Q}{LR^2} \cos(\theta_i) ds \tag{12}$$

Όμως το τμήμα i ράβδου μήκους ds μπορεί να γραφεί ως $ds = R d\theta_i$, και έτσι η $x-$συνιστώσα γράφεται ως

$$dE_x = k_e \frac{Q}{LR^2} \cos(\theta_i) R d\theta_i = k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i \tag{13}$$

iii. Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές dE_x από κάθε τμήμα ράβδου ds υπό γωνία $d\theta_i$, έχουμε ότι

$$E_x = \int dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_e \frac{Q}{LR} \cos(\theta_i) d\theta_i \tag{14}$$

$$= k_e \frac{Q}{LR} \sin(\theta_i) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{15}$$

$$= k_e \frac{2Q}{LR} \tag{16}$$

Γνωρίζουμε ότι $R = L/\pi$, οπότε

$$E_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \tag{17}$$

και το διάνυσμα αυτού γράφεται ως

$$\vec{E} = \vec{E}_x = k_e \frac{2\pi Q}{L^2} \vec{i} \tag{18}$$

iv. Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$E = 1.7 \times 10^5 \text{ N/C} \tag{19}$$

Άσκηση 4.

i. Από το πρώτο παράδειγμα της διάλεξης περί ηλεκτρικών πεδίων κατανομής φορτίου έχουμε ότι

$$E = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \tag{20}$$

ii. Έστω τμήμα dx της δεξιάς ράβδου με φορτίο dq. Η ράβδος είναι ομοιόμορφα φορτισμένη, οπότε $\lambda = \frac{Q}{2a} = \frac{dq}{dx}$. Λύνοντας ως προς dq:

$$dq = \frac{Q}{2a} dx \tag{21}$$

iii. Η ηλεκτρική δύναμη dF που ασκείται στο τμήμα μήκους dx της δεξιάς ράβδου λόγω του ηλεκτρικού πεδίου της αριστερής ράβδου έχει μέτρο ως

$$dF = dqE = k_e \frac{Q dq}{d(2a+d)} = k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \frac{Q}{2a} dx \tag{22}$$

iv. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$F = \int dF \tag{23}$$

ως

$$F = \int k_e \frac{Q}{d(2a+d)} \frac{Q}{2a} dx = \frac{k_e Q^2}{2a} \int_{b-2a}^{b} \frac{dx}{x(x+2a)} \tag{24}$$

$$= \frac{k_e Q^2}{4a^2} \ln \frac{b^2}{(b-2a)(b+2a)} = \frac{k_e Q^2}{4a^2} \ln\Big(\frac{b^2}{b^2-4a^2}\Big) \tag{25}$$

με χρήση του ολοκληρώματος

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x(x+c)} = -\frac{1}{c} \ln\Big(\frac{c+x}{x}\Big)\Big]_{x_1}^{x_2} \tag{26}$$

Άσκηση 5.

Αφού το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο του είναι σταθερό παντού. Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο μέσα στο πεδίο είναι

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \tag{27}$$

και άρα

$$a_y = -1.756 \times 10^{15} \text{ m/s}^2 \tag{28}$$

Η αρχική ταχύτητα u_0 έχει δυο συνιστώσες $u_{0x} = u_0 \cos(45^o)$ και $u_{0y} = u_0 \sin(45^o)$. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά προς τα θετικά του άξονα y. Άρα το ηλεκτρόνιο έχει αρνητική επιτάχυνση που προκαλεί μείωση της $y-$συνιστώσας της ταχύτητας. Απαιτούμε $u_{1y} = 0$ ώστε να μη χτυπήσει στην πλάκα. Από τις εξισώσεις της κινητικής,

$$u_{1y}^2 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \Rightarrow 0 = u_{0y}^2 + 2a_y \Delta y \tag{29}$$

$$u_{0y} = \sqrt{-2a_y \Delta y} = \sqrt{-2(-1.756 \times 10^{15} \times 0.02)} \tag{30}$$

$$= 8.381 \times 10^6 \text{ m/s} \tag{31}$$

και άρα

$$u_0 = \frac{8.381 \times 10^6}{\sin(45^o)} = 1.19 \times 10^7 \text{ m/s} \tag{32}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας επιφάνειας A είναι $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos(\theta)$, όπου θ η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος $\vec{A}$ που είναι κάθετο στην επιφάνεια, έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας, και δείχνει προς τα έξω από την επιφάνεια. Άρα

$$\Phi_1 = EA\cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(150^o) = -0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{33}$$

$$\Phi_2 = EA\cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(60^o) = 0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{34}$$

$$\Phi_3 = EA\cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(3^o) = 0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{35}$$

$$\Phi_4 = EA\cos(\theta_1) = 500 \times 9 \times 10^{-4} \times \cos(120^o) = -0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{36}$$

Η συνολική ροή διαμέσου των επιφανειών είναι $\Phi_T = \sum \Phi_i = 0 \text{ Nm}^2/\text{C}$.

(β΄) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια 1 και παράλληλο στις επιφάνειες 2, 3, και 5. Επίσης, η γωνία μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{A}_4$ είναι 60^o. Η ηλεκτρική ροή σε αυτές τις 5 επιφάνειες είναι

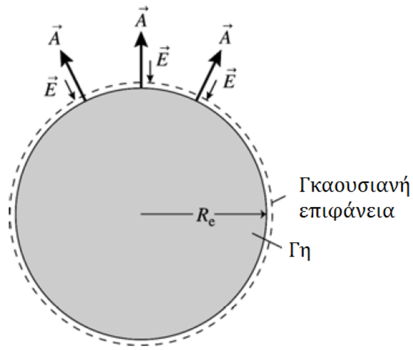
$$\Phi_1 = E_1 A_1 \cos(\theta_1) = 400 \times 2 \times \cos(180^o) = -3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{37}$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{38}$$

$$\Phi_4 = E_4 A_4 \cos(\theta_4) = 400 \times \frac{2}{\sin(30^o)} \times 4 \times \cos(60^o) = 3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \tag{39}$$

Η συνολική ηλεκτρική ροή είναι μηδέν ξανά.

Άσκηση 7.
Το πρόβλημα μπορεί να σχεδιαστεί όπως στο Σχήμα 3. Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το $\vec{E}$ είναι



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 7.

κάθετο στην επιλεγμένη γκαουσιανή επιφάνεια, και το μέτρο του πεδίου έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της επιφάνειας. Από το νόμο του Gauss, έχουμε

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \tag{40}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο "δείχνει" προς τα μέσα, προς το εσωτερικό της Γης, άρα η ροή θα είναι αρνητική, οπότε

$$Q_{in} = -\epsilon_0 E A_{\text{σφαίρας}} = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 = -4.51 \times 10^5 \text{ C} \tag{41}$$

Άσκηση 8.
Αν $\rho > 0$, το πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση ακτινικά προς τα έξω. Επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια όπως στο σχήμα, με μήκος L και ακτίνα r, που περιέχεται μέσα στο φορτισμένο κύλινδρο. Ο όγκος της είναι $V_{in} = \pi r^L$ και περικλείει φορτίο $q_{in} = \rho \pi r^2 L$. Δεν υπάρχει ηλεκτρική ροή στα κυλινδρικά ¨καπάκια¨ της γκαουσιανής επιφάνειας, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (3) για το νόμο του Gauss. Η πλευρική επιφάνεια του κυλίνδρου έχει το ηλεκτρικό πεδίο κάθετο σε κάθε τμήμα της επιφάνειάς της και παράλληλο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ ενός απειροστά μικρού τμήματος της πλευρικής επιφάνειας, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (2) για το νόμο του Gauss. Το ηλεκτρικό πεδίο σε σταθερή απόσταση από τον κύλινδρο είναι σταθερό, οπότε ικανοποιείται η συνθήκη (1) του νόμου του Gauss. Η πλευρική επιφάνεια έχει ηλεκτρική ροή

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int dA = \frac{q}{\epsilon_0} \Longleftrightarrow E(2\pi r)L = \frac{\rho r^2 \pi L}{\epsilon_0} \Longleftrightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \tag{42}$$