ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Δεδομένης της μάζας και της συχνότητας συντονισμού, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά ελατηρίου από τη σχέση

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

Άρα

$$k = (2\pi f)^2 m = (2\pi 29)^2 \times 7.5 \times 10^{-3} \approx 250 \text{ N/m} \tag{2}$$

Άσκηση 2. Εχουμε ότι

$$K = \frac{1}{2}mu(t)^2\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\pi/6) \tag{3}$$

και

$$U = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\pi/6) \tag{4}$$

Οπότε

$$\frac{K}{U} = \frac{m\omega^2 \sin^2(\pi/6)}{k\cos^2(\pi/6)} = \frac{m}{k}\omega^2 \tan^2(\pi/6) \tag{5}$$

κι επειδή

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{6}$$

είναι

$$\frac{K}{U} = \tan^2(\pi/6) = \frac{1}{3} \tag{7}$$

Άσκηση 3. Ο αστροναύτης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(α΄) Από το σχήμα, έχουμε ότι η περίοδος είναι $T = 3$ s. Άρα

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k = 55 \text{ kg} \tag{8}$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι οι ταλαντώσεις συμβαίνουν γύρω από ένα σημείο ισορροπίας πλάτους 1.0 m. Από το γράφημα, $A = \frac{1}{2}0.8 = 0.4$ m, $\phi = 0$, και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.1$ rad/s. Η εξίσωση για τη θέση του αστροναύτη είναι

$$x(t) = 1 + A\cos(\omega t + 0) = 1 + 0.4\cos(2.1t) \Rightarrow 1.2 = 1 + 0.4\cos(2.1t) \Rightarrow \cos(2.1t) = 0.5 \Rightarrow t = 0.5 \text{ s} \tag{9}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του αστροναύτη είναι

$$u_x(t) = -A\omega\sin(\omega t) \Rightarrow u_x(0.5) = -0.4 \times 2.1 \times \sin(2.1 \times 0.5) = -0.73 \text{ m/s} \tag{10}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Έχουμε ότι

$$y(x,t) = 0.35\sin(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}) \tag{11}$$

η οποία γράφεται ως

$$y(x,t) = 0.35\sin(3\pi x - 10\pi t + \frac{3\pi}{4}) \tag{12}$$

οπότε και αναγνωρίζουμε ότι

$$k = 3\pi \text{ m}^{-1} \tag{13}$$

$$\omega = 10\pi \text{ s}^{-1} \tag{14}$$

$$A = 0.35 \text{ m} \tag{15}$$

Άρα

$$u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 3.33 \text{ m/s} \tag{16}$$

Άρα ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας είναι

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 u = 15.1 \text{ W} \tag{17}$$

(β΄) Η ενέργεια ανά κύκλο κύματος θα είναι

$$E_\lambda = PT = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda = 3.02 \text{ J} \tag{18}$$

αφού $uT = \lambda$.

Άσκηση 5 - bonus 10%.

(α΄) Θα χρειαστούμε τις ακόλουθες μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ln f(x)) = \frac{1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x} \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{f(x)} = \frac{\partial}{\partial x}[f(x)]^{-1} = -[f(x)]^{-2}\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\frac{1}{f^2(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x} \tag{20}$$

Άρα

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{b(x-ut)}\frac{\partial(bx - but)}{\partial x} = \Big(\frac{1}{b(x-ut)}\Big)b = \frac{1}{x-ut} \tag{21}$$

και επίσης

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-ut)^2} \tag{22}$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{u}{x-ut} \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{u^2}{(x-ut)^2} \tag{24}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{25}$$

άρα πράγματι η προτεινόμενη συνάρτηση αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης.

(β΄) Έχουμε

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -bue^{b(x-ut)} \tag{26}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = be^{b(x-ut)} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2u^2e^{b(x-ut)} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2e^{b(x-ut)} \tag{29}$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι

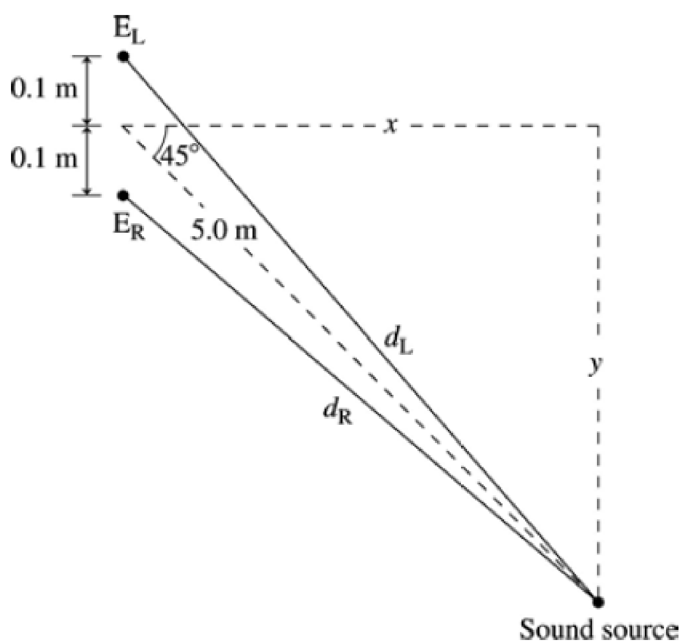
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{30}$$

που πιστοποιεί ότι η προτεινόμενη συνάρτηση αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης.

Άσκηση 6. Η ενέργεια που παραδίδεται στο αυτί μας σε χρόνο t ισούται με $E = Pt$, με P την ισχύ του κύματος. Η ένταση του κύματος είναι $I = P/A$ με A το εμβαδόν της επιφάνειας του τυμπάνου. Συνολικά,

$$E = Pt = IAt = I\pi r^2 t = 3.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{J} \tag{31}$$

Άσκηση 7. Σχηματικά, το πρόβλημα φαίνεται στο Σχήμα 1. Η απόσταση μεταξύ της πηγής και του αριστερού



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 7.*

αυτιού (E_L) είναι

$$d_L = \sqrt{x^2 + (y+0.1)^2} = \sqrt{(5\cos 45^o)^2 + (5\sin 45^o + 0.1)^2} = 5.0712\ \mathrm{m} \tag{32}$$

Όμοια για το δεξί αυτί, $d_R = 4.9298$ m. Έτσι

$$d_L - d_R = \Delta d = 0.1414\ \mathrm{m} \tag{33}$$

Για το ηχητικό κύμα με τη δεδομένη ταχύτητα, η διαφορά στις αφίξεις του ήχου στο αριστερό και στο δεξί αυτί είναι

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{343} = 412.27\mu\text{s} \approx 410\mu\text{s} \tag{34}$$

Άσκηση 8. Λύνοντας την εξίσωση ως προς I, έχουμε

$$I = I_0 \times 10^{\beta/10} \tag{35}$$

Για $\beta = 60$ dB, έχουμε $I = 10^{-6}$ W/m^2 και για $\beta = 61$ dB, έχουμε $I = 1.25 \times 10^{-6}$ W/m^2. Ο λόγος των δυο είναι 1.25.

Άσκηση 9. Λόγω της απόστασης του ακροατή από τον κύκλο που διαγράφει η σφυρίχτρα, θεωρούμε ότι η κίνηση της σφυρίχτρας είναι ευθύγραμμη, μπρος-πίσω επάνω στη διάμετρο του κύκλου που ενώνει τον ακροατή με το κέντρο του κύκλου. Η γραμμική ταχύτητα της σφυρίχτρας ισούται με

$$u = \omega r \Longrightarrow u = 0.6 \times 15 = 9 \text{ m/s} \tag{36}$$

Όταν η σφυρίχτρα πλησιάζει τον ακροατή, έχουμε

$$f' = \frac{u}{u - u_s} f = \frac{343}{343 - 9} 540 = 555 \text{ Hz} \tag{37}$$

Όταν απομακρύνεται από αυτόν,

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f = \frac{343}{343 + 9} 540 = 526 \text{ Hz} \tag{38}$$