ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Βρίσκουμε το έργο της σφαίρας ολοκληρώνοντας τη δοσμένη συνάρτηση ως

$$\begin{aligned} W &= \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{x} && (1)\\ &= \int_0^{0.6} (15000 + 10000x - 25000x^2)\cos(0)dx && (2)\\ &= 15000x + \frac{10000}{2}x^2 - \frac{25000}{3}x^3\Big|_0^{0.6} && (3)\\ &= 9000 + 18000 - 18000 && (4)\\ &= 9\text{ kJ} && (5)\end{aligned}$$

Άσκηση 2.

i. Οι δυο δυνάμεις γράφονται ως

$$\vec{F}_1 = 25(\cos 35^o\vec{i} + \sin 35^o\vec{j}) = 20.5\vec{i} + 14.3\vec{j}\text{ N} \quad (6)$$
$$\vec{F}_2 = 42(\cos 150^o\vec{i} + \sin 150^o\vec{j}) = -36.4\vec{i} + 21.0\vec{j}\text{ N} \quad (7)$$

ii. Θα είναι

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15.9\vec{i} + 35.3\vec{j})\text{ N} \quad (8)$$

iii. Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j})\ \text{m/s}^2 \quad (9)$$

iv. Τη χρονική στιγμή $t = 3$ s,

(α΄) θα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t = -5.54\vec{i} + 23.7\vec{j}\text{ m /s} \quad (10)$$

(β΄) θα ειναι

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = -2.30\vec{i} + 39.3\vec{j}\text{ m} \quad (11)$$

(γ΄) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2 \approx 1.48$ kJ

(δ΄) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \Sigma(\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}) = 55.6 + 1426 \approx 1480$ J, δηλ. 1.48 kJ

(ε΄) Το θεώρημα κινητικής ενέργειας - έργου είναι συνεπές με το 2ο νόμο του Newton.

Άσκηση 3. Για τους αθλητές, ισχύει

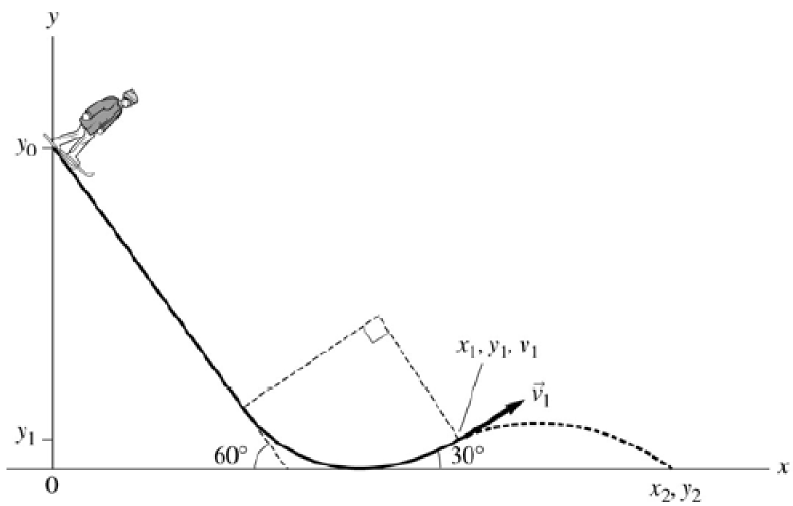
$$U_s^{\text{αθλητές}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}33000\times 0.041^2 = 27.7\text{ J} \quad (12)$$

ενώ για τους μη αθλητές,

$$U_s^{\text{μη-αθλητές}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}33000 \times 0.033^2 = 18.0 \text{ J} \tag{13}$$

Η διαφορά ελαστικής δυναμικής ενέργειας είναι 9.7 J, υπέρ των αθλητών. Παρατηρήστε πως οι αθλητές αποθηκεύουν πάνω από μιάμιση φορά περισσότερη ενέργεια από τους μη-αθλητές.

Άσκηση 4. Τοποθετούμε το σύστημα συντεταγμένων στο κάτω μέρος της ράμπας, κάτω από τη θέση εκκίνησης της Άννας. Από τη γεωμετρία του σχήματος, έχουμε ότι η Άννα εκτοξεύεται από τη ράμπα υπό γωνία 30^o. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε



$$K_1 + U_{g_1} = K_2 + U_{g_2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mu_1^2 + mgy_1 = mgy_0 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2g(y_0 - y_1)} = 20.77 \text{ m/s} \tag{14}$$

Ας βρούμε τώρα το σημείο άφιξης της Άννας μετά την εκτόξευσή της. Από την κινητική στον άξονα y, θα έχουμε

$$y_2 = y_1 + u_{y_1}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{15}$$

$$0 = 3 + u_1 \sin 30^o t - \frac{1}{2}9.8t^2 \tag{16}$$

$$t = 2.377 \text{ s} \tag{17}$$

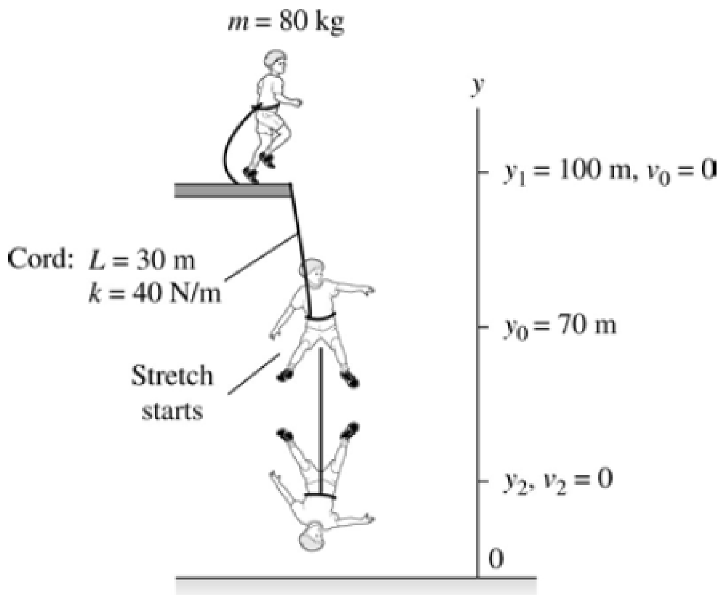
Από την κινητική στον άξονα x, έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_{x_1}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{18}$$

$$x_2 - x_1 = u_1 \cos 30^o t + 0 \tag{19}$$

$$x_2 - x_1 = 42.6 \text{ m} \tag{20}$$

Άσκηση 5. Θεωρήστε τον εαυτό σας, το ελατήριο, και τη Γη ως ένα σύστημα. Δεν υπάρχουν δυνάμεις εκτός του συστήματος, οπότε το σύστημα είναι απομονωμένο. Οι δυνάμεις που ασκούνται - βαρυτική, δύναμη ελατηρίου - είναι συντηρητικές. Δειτε το Σχήμα. Μπορούμε με χρήση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, να εξισώσουμε την αρχική ενέργεια του συστήματος, δηλ. τη στιγμή που φεύγετε από τη γέφυρα, με την τελική ενέργεια του συστήματος, όταν φτάνετε δηλ. στο χαμηλότερο σημείο. Προσέξτε ότι το ελατήριο μόλις που αρχίζει να εκτείνεται όταν βρίσκεστε σε ύψος $y_0 = y_1 - 30 = 70$ m, κι έτσι $U_{2s} = \frac{1}{2}k(y_2 - y_0)^2$. Προσέξτε



επίσης ότι $U_{1s} = 0$, αφού το ελατήριο δεν έχει εκταθεί. Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μας δίνει

$$K_2 + U_{2s} + U_{2g} = K_1 + U_{1g} + U_{1s} \tag{21}$$

$$0 + mhy_2 + \frac{1}{2}k(y_2 - y_0)^2 = 0 + mgy_1 + 0 \tag{22}$$

$$mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2 - ky_0y_2 + \frac{1}{2}ky_0^2 = mgy_1 \tag{23}$$

$$y_2^2 + \Big(\frac{2mg}{k} - 2y_0\Big)y_2 + \Big(y_0^2 - \frac{2mgy_1}{k}\Big) = 0 \tag{24}$$

$$y_2^2 - 100.8y_2 + 980 = 0 \tag{25}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες 89.9 και 10.9 m. Η πρώτη λύση δεν έχει φυσική σημασία καθώς αποτελεί ένα ύψος πάνω από το σημείο που το ελατήριο αρχίζει να εκτείνεται. Άρα τελικά, η απόσταση από το νερό όταν το ελατήριο σταματά να εκτείνεται είναι περίπου 11 m.

Άσκηση 6. Για να βρούμε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου, γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση αποτελεί παράγωγο της ταχύτητας, άρα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς t.

$$u(t) = \int_0^t a(u)du = \int_0^t (1.16u - 0.21u^2 + 0.24u^3)du \tag{26}$$

$$= 1.16\frac{u^2}{2} - 0.21\frac{u^3}{3} + 0.24\frac{u^4}{4}\Big|_0^t \tag{27}$$

$$= 0.58t^2 - 0.07t^3 + 0.06t^4 \tag{28}$$

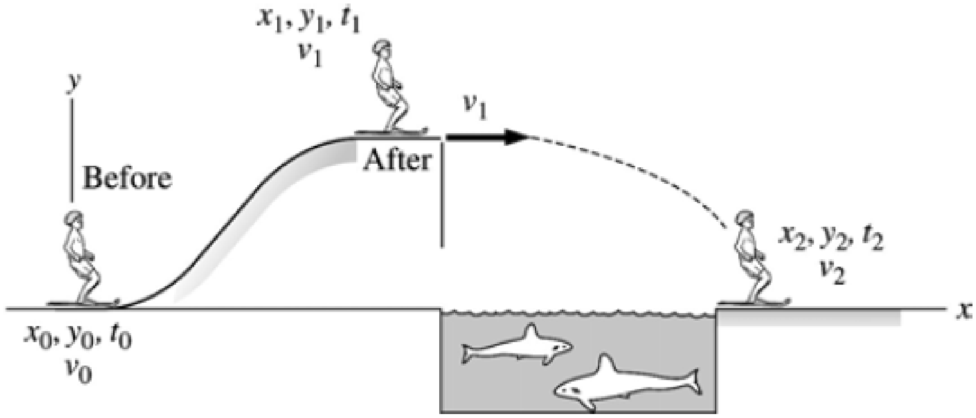
Για $t = 0$, $u_i = 0$. Σε $t = 2.5$ s, θα έχουμε

$$u_f = 0.58 \times 2.5^2 - 0.07 \times 2.5^3 + 0.06 \times 2.5^4 = 4.88 \text{ m/s} \tag{29}$$

Άρα η μεταβολή στην κινητική ενέργεια, δεδομένου ότι αρχικά το αυτοκίνητο ήταν ακίνητο, θα είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = \frac{1}{2}mu_f^2 = 1.38 \times 10^4 \text{ J} \tag{30}$$

Άσκηση 7. Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας στην βάση της ράμπας. Ας



βρούμε αρχικά τη μικρότερη ταχύτητα u_1 που πρέπει να έχει ο ακροβάτης στην κορυφή της ράμπας ώστε να περάσει πάνω από τους καρχαρίες. Από την κατακόρυφη κίνηση του άλματος, εχουμε

$$y_2 = y_1 + u_{y_1} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \tag{31}$$

$$0 = 2 + 0 + \frac{1}{2} 9.8 t^2 \tag{32}$$

$$t = 0.639 \text{ s} \tag{33}$$

Από την οριζόντια κίνηση κατά το άλμα, έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_{x_1} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{34}$$

$$x_1 + 5 = x_1 + u_1 t + 0 \tag{35}$$

$$u_1 = 7.825 \text{ m/s} \tag{36}$$

Αφού βρήκαμε την u_1 που απαιτείται για να περάσει ο ακροβάτης τους καρχαρίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να βρούμε την ελάχιστη ταχύτητα u_0. Έχουμε

$$K_1 + U_{g_1} = K_0 + U_{g_0} \tag{37}$$

$$\frac{1}{2} m u_1^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m u_0^2 + m g y_0 \tag{38}$$

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + 2g(y_1 - y_0)} \tag{39}$$

$$u_0 = 10 \text{ m/s} \tag{40}$$