ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Θεωρούμε ως χρονικό σημείο αναφοράς τη στιγμή που ξεκινά η Porsche. Τότε, το Honda έχει ήδη ξεκινήσει - ένα δευτερόλεπτο νωρίτερα. Ο χρόνος που απαιτείται για την Porsche βρίσκεται από τη σχέση

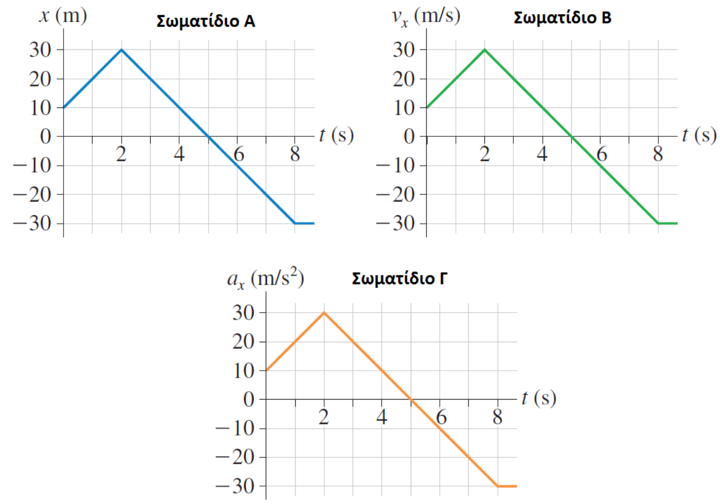
$$x_P = x_{P_0} + u_{P_0}t + \frac{1}{2}a_P t^2 \tag{1}$$
$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.5t^2 \tag{2}$$
$$t = 15.1 \text{ s} \tag{3}$$

Για το Honda, είναι αντίστοιχα

$$x_H = x_{H_0} + u_{H_0}t + \frac{1}{2}a_H(t+1)^2 \tag{4}$$
$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3(t+1)^2 \tag{5}$$
$$t = 15.3 \text{ s} \tag{6}$$

Άρα η Porsche κερδίζει. Προσέξτε ότι αν θεωρήσουμε ώς χρονική αναφορά το χρόνο εκκίνησης του Honda, δε θα μπορούσαμε να εφαρμοόσουμε τις εξισώσεις για την Porsche, αφού για το πρώτο δευτερόλεπτο, το αμάξι θα ήταν ακίνητο, και μετά θα έκανε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Συνολικά, η κίνηση αυτή ΔΕΝ περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις!

Άσκηση 2. Το διάγραμμα του σωματιδίου Α είναι μια ευθεία γραμμή από $t = 2$ ως $t = 8$ s. Η κλίση της



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2.*

είναι -10 m/s, που είναι η ταχύτητα του σωματιδιου για $t = 7$ s. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει κίνηση προς χαμηλότερες τιμές του άξονα x. Η ταχύτητα του σωματιδίου Β για $t = 7$ s μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το διάγραμμα. Είναι -20 m/s. Η ταχύτητα για το σωματίδιο Γ μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$u_f = u_i + \text{ εμβαδόν της καμπύλης επιτάχυνσης μεταξύ } t_i \text{ και } t_f.$$

Το συνολικό εμβαδό είναι $40 + 45 - 10 = 75$ m/s.

Άσκηση 3.

i. Το πρόβλημα είναι διττό: αρχικά, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία που δίνεται για να βρούμε την επιτάχυνση κατά το φρενάρισμα. Δεύτερον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επιτάχυνση για να βρούμε την απόσταση που απαιτείται για να σταματήσει, δεδομένης της διαφορετικής αρχικής ταχύτητας. Αρχικά, το αυτοκίνητο προχωρά με σταθερή ταχύτητα πριν φρενάρει:

$$x = x_0 + u_0 t = u_0 t = 15 \text{ m} \tag{7}$$

Τότε, το αυτοκινητο φρενάρει. Επειδή δεν ξέρουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u^2 = u_1^2 + 2a_1\Delta x \Rightarrow a_1 = -\frac{u_1^2}{2\Delta x} = -10 \text{ m/s}^2 \tag{8}$$

Χρησιμοποιήσαμε $u_1 = u_0 = 30$ m/s. Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο, επειδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει προς τα αριστερά. Επαναλαμβάνουμε τώρα με $u_0 = 40$ m/s. Η απόσταση μέχρι το φρενάρισμα είναι

$$x_1 = u_0 t = 20 \text{ m} \tag{9}$$

Η θέση x_2 μετά το φρενάρισμα είναι

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1\Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{40^2}{2(-10)} = 80 \text{ m} \tag{10}$$

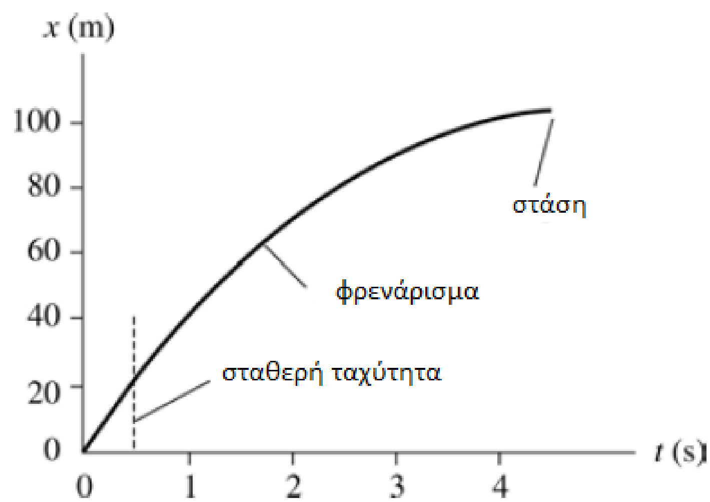
Άρα

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = 80 + 20 = 100 \text{ m} \tag{11}$$

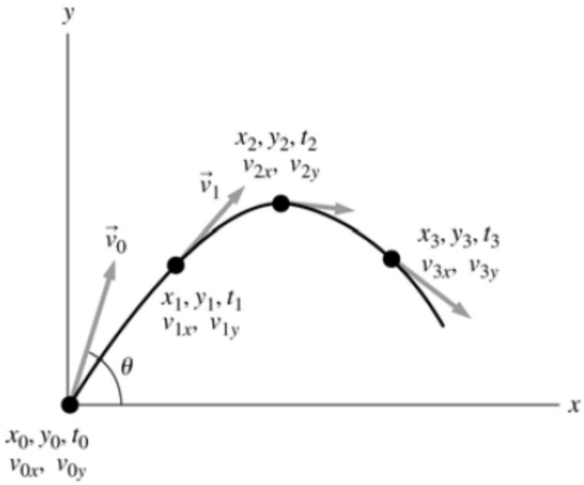
ii. Το αυτοκίνητο διανύει με σταθερή ταχύτητα τα πρώτα 0.5 s, ταξιδεύοντας για 20 m. Το διάγραμμα θα είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση 40 m/s. Για $t \geq 0.5$, το διάγραμμα θα είναι μια παραβολή, μέχρι το σημείο που το αυτοκίνητο σταματά (χρονική στιγμή t_2). Μπορούμε να βρούμε αυτή τη στιγμή ως

$$u_2 = u_1 + a_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 = \frac{u_1}{a_1} = 4.5 \text{ s} \tag{12}$$

Η παραβολή θα έχει μηδενική κλίση $u = 0$ σε χρόνο $t = 4.5$ s. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Διάγραμμα Άσκησης 3.*



Σχήμα 3: *Διάγραμμα Άσκησης 4.*

Άσκηση 4. Δείτε το Σχήμα 3.

i. Ξέρουμε το διάνυσμα ταχύτητας της μπάλας όταν $t = 1$ s. Η μπάλα στο ψηλότερό της σημείο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Εκεί λοιπόν πρέπει $u_y = 0$. Η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή στη διάρκεια της κίνησης, έτσι $u_x = 2$ m/s, για κάθε χρονική στιγμή. Αρα $\vec{u}_2 = 2\vec{i}$ m/s, για $t = 2$ s. Παρατηρούμε ότι η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας άλλαξε κατά $\Delta u_y = -2$ m/s ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2$ s. Επειδή η επιτάχυνση στον $y-$άξονα είναι σταθερή - βαρυτική επιτάχυνση - η u_y αλλάζει κατά -2 m/s σε οποιοδήποτε διάστημα διάρκειας ενός δευτερολέπτου. Τη χρονική στιγμή $t = 3$ s, η u_y είναι 2 m/s μικρότερη από τη (μηδενική) τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Για $t = 0$, η u_y πρέπει να είναι 2 m/s μεγαλύτερη από την τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 1$ s. Κατά συνέπεια, έχουμε συνολικά:

$$t = 0 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j} \text{ m/s} \tag{13}$$

$$t = 1 : \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m/s} \tag{14}$$

$$t = 2 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} + 0\vec{j} \text{ m/s} \tag{15}$$

$$t = 3 : \vec{u}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s} \tag{16}$$

ii. Επειδή η u_y αλλάζει με ρυθμό -2 m/s ανά δευτερόλεπτο, η $y-$συνιστώσα της επιτάχυνσης πρέπει να είναι $a_y = -2$ m/s^2. Όμως η a_y είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο θάλαμο, άρα η βαρυτική επιτάχυνση του θαλάμου είναι $g = -2$ m/s^2.

iii. Από το πρώτο υποερώτημα, οι συνιστώσες τη χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνουν

$$\theta = \tan^{-1}\frac{u_{0y}}{u_{0x}} = \tan^{-1} 2 \approx 63^o \tag{17}$$

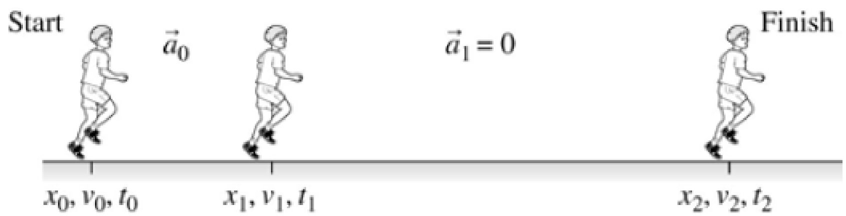
Άσκηση 5. Δείτε το παρακάτω σχήμα και τις μεταβλητές του.

i. Από τη σχέση σταθερής ταχύτητας για την απόσταση $x_1 \to x_2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{100 - x_1}{u_1} + \frac{10}{3} \tag{18}$$

Ας βρούμε τώρα τις ταχύτητες και θέσεις, ως εξής:

$$u_1 = u_0 + a_0(t_1 - t_0) = 0 + 3.6\frac{10}{3} = 12 \text{ m/s} \tag{19}$$



Σχήμα 4: *Σχήμα Άσκησης 5.*

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.6\Big(\frac{10}{3}\Big)^2 = 20 \text{ m} \tag{20}$$

Έτσι, έχουμε

$$t_2 = \frac{100 - 20}{12} + \frac{10}{3} = 10 \text{ s} \tag{21}$$

ii. Η μέγιστη ταχύτητα των 12 m/s σημαίνει $u_1 = 12$ m/s. Για να βρούμε την επιτάχυνση, έχουμε

$$u_1 = u_0 + a_0(t_2 - t_1) \Rightarrow 12 = 0 + a_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{a_0} \tag{22}$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 \tag{23}$$

Αφού

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t_2 - t_1)^2 \tag{24}$$

έχουμε

$$100 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + 12(9.9 - t_1) \tag{25}$$

Άρα

$$100 = \frac{1}{2}a_0\Big(\frac{12}{a_0}\Big)^2 + 12\Big(9.9 - \frac{12}{a_0}\Big) \Rightarrow a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2 \tag{26}$$

iii. Από τα παραπάνω ερωτήματα βλέπουμε ότι η επιτάχυνση πρέπει να αυξηθεί από 3.6 σε 3.8 m/s^2 ώστε ο χρόνος του αθλητή να μειωθεί από 10 σε 9.9 s. Αυτή η μείωση είναι της τάξης του 1%. Η μείωση του χρόνου κατά 1% αντιστοιχεί σε αύξηση της επιτάχυνσης κατά

$$\frac{3.8 - 3.6}{3.6} \times 100\% = 5.6\% \tag{27}$$

iv. (α΄) Η επιτάχυνση είναι η χρονική παράγωγος της ταχύτητας, δηλ.

$$a_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{d}{dx}(a(1 - e^{-bt}) = abe^{-bt} \tag{28}$$

Με τις δοθείσες τιμές, έχουμε $a_x = 8.314e^{-0.6887t}$ m/s^2. Τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$ s, η τιμή της επιτάχυνσης είναι $8.134, 2.052, 0.5175$ m/s^2.

(β΄) Αφού $u_x = a - ae^{-bt}$, έχουμε

$$x(t) = \int_0^t (a - ae^{-bu})du \tag{29}$$

$$= at + \frac{a}{b}e^{-bt} - \frac{a}{b} \tag{30}$$

$$= \frac{a}{b}(bt + e^{-bt} - 1) \tag{31}$$

$$= 17.15(0.6887t + e^{-0.6887t} - 1) \text{ m} \tag{32}$$

(γ΄) Με δοκιμές, για $t = 9.92$ s, έχουμε $x = 100.0$ m.

Άσκηση 6 - bonus 10%

Μια λύση είναι η εξής: έστω θ μια γωνία και $\frac{\pi}{2} - \theta$ η συμπληρωματική της. Ας υπολογίσουμε το εύρος βολής για κάθε περίπτωση.

$$R_1 = \frac{u_i^2 \sin(2\theta)}{g} \tag{33}$$

$$R_2 = \frac{u_i^2 \sin(2(\pi/2 - \theta))}{g} = \frac{u_i^2 \sin(\pi - 2\theta))}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta)}{g} = R_1 \tag{34}$$

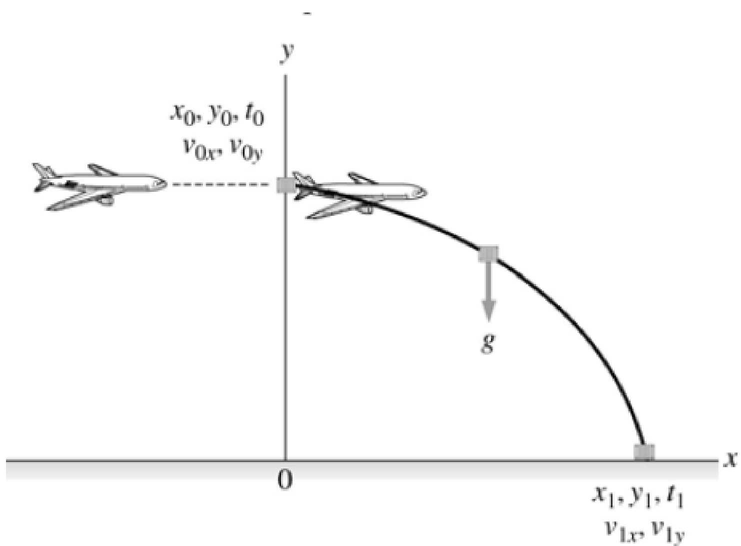
(35)

χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \tag{36}$$

Εναλλακτικά, μπορείτε να δείξετε με χρήση τριγωνομετρικού κύκλου ότι το ημίτονο της διπλάσιας γωνίας συμπληρωματικών γωνιών δεν αλλάζει.

Άσκηση 7. Δείτε το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5: *Σχήμα Άσκησης 7.*

Για την κίνηση στον οριζόντιο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, έχουμε

$$x_1 = x_0 + u_{0x} t_1 = 0 + 150 t_1 = 150 t_1 \tag{37}$$

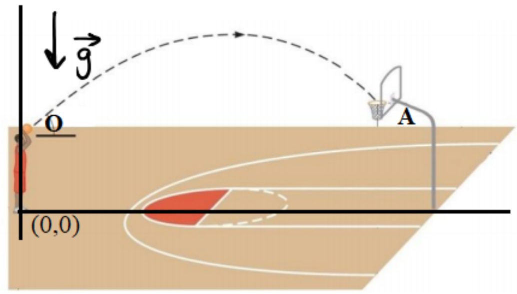
Από την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, έχουμε

$$y_1 = y_0 + u_{0y} t_1 + \frac{1}{2} a_y t_1^2 \Longleftrightarrow 0 = 100 + 0 - \frac{1}{2} 9.8 t_1^2 \Longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{200}{9.8}} = 4.518 \text{ s} \tag{38}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε

$$x_1 \approx 678 \text{m} \tag{39}$$

Άσκηση 8.



Σχήμα 6: *Σχήμα Άσκησης 8.*

(α΄) Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση των ποδιών του παίκτη. Στον $x-$άξονα, η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, κι έτσι:

$$x_A = x_O + u_{x_O} t \Longleftrightarrow 10 = 0 + u_i \cos(\theta_i) t \Longrightarrow t = \frac{10}{u_i \cos(\theta_i)} \tag{40}$$

Στον $y-$άξονα, η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε:

$$y_A = y_O + u_{y_O} - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 3 = 2 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 1 = u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{41}$$

Καταλήξαμε στην ίδια ακριβώς εξίσωση με τη διάλεξη, άρα ξανά θα έχουμε $u_i \approx 10.68$ m/s.

(β΄) Προφανώς μόνο η δεύτερη εξίσωση αλλάζει ως

$$y_A = y_O + u_{y_O} - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 3.05 = 2.11 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 0.94 = u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{42}$$

και λύνοντας καταλήγουμε στο $u_i \approx 10.64$ m/s.