ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

(α΄) Το χαρτονόμισμα ξεκινά από ηρεμία, $u_i = 0$, και πέφτει με επιτάχυνση $g = 9.8$ m/s^2, λόγω βαρύτητας. Μας ενδιαφέρει η άνω άκρη του, και θεωρούμε ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται εκεί. Για μια μέση αντίδραση 0.2 s, μπορούμε να βρούμε την απόσταση που θα διανύσει το σωματίδιο (δηλ. η άνω άκρη του χαρτονομίσματος) πέφτοντας, δηλ.

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ \Delta y &= u_i t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \Delta y &= 0 - \frac{1}{2}9.8 \times 0.2^2 \text{ m} \\ \Delta y &= -0.2 \text{ m} \end{aligned}$$

Το χαρτονόμισμα διανύει απόσταση πέφτοντας ίση με 20 cm, μέχρι να κλείσουμε τα δάχτυλά μας. Η απόσταση μεταξύ του δαχτύλου σας και της κορυφής του χαρτονομίσματος είναι 7 cm. Άρα δεν μπορούμε να κερδίσουμε το παιχνίδι.

(β΄) Με βάση τα παραπάνω, θα έπρεπε να είναι το λιγότερο 40 cm, ώστε σε 0.2 s να διανύσει πέφτοντας 20 cm, και να μπορέσουμε να το πιάσουμε οριακά.

(γ΄) Για την επιφάνεια του Άρη, το ίδιο παιχνίδι θα έδινε

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ \Delta y &= u_i t - \frac{1}{2}g_{mars}t^2 \\ \Delta y &= 0 - \frac{1}{2}0.37 g_{earth} \times 0.2^2 \text{ m} \\ \Delta y &= 0 - \frac{1}{2}0.37 \times 9.8 \times 0.2^2 \text{ m} \\ \Delta y &= -0.07252 \text{ m} \end{aligned}$$

Ξανά, δε θα μπορούσαμε να το πιάσουμε, ή θα το πιάναμε οριακά αν είχαμε ελάχιστα γρηγορότερη αντίδραση από 0.2 s.

Άσκηση 2.

(α΄) Γνωρίζοντας τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

και ότι αντιστοιχεί σε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, αναγνωρίζουμε ότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση.

(β') Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$u = 3 - 12t$$

η οποία προκύπτει παραγωγίζοντας τη συνάρτηση θέσης παραπάνω. Αλλαγή κατεύθυνσης συμβαίνει όταν $u = 0$, το οποίο συμβαίνει όταν $t = 1/4$ s. Άρα η θέση του τη δεδομένη χρονική στιγμή θα είναι

$$x_f = 5 + 3t - 6t^2\Big]_{t=1/4} = 5.375 \text{ m} \tag{2}$$

(γ') Από τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3}$$

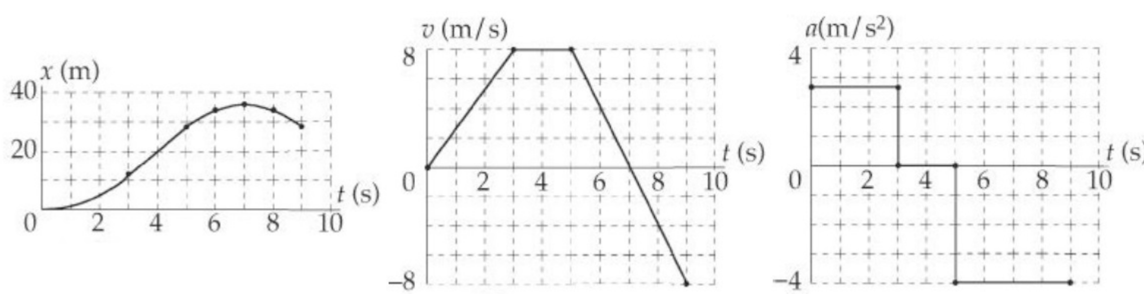
παρατηρούμε ότι όταν $x_f = x_i$, τότε $t = -\frac{2u_i}{a}$. Άρα, όταν επιστρέφει στην αρχική του θέση, ο χρόνος είναι

$$t = -\frac{2 \times 3}{-12} = \frac{1}{2} \text{ s} \tag{4}$$

και η ταχύτητά του τότε είναι

$$u = 3 - 12\frac{1}{2} = -3 \text{ m/s} \tag{5}$$

Άσκηση 3.



Σχήμα 1: Διάγραμμα θέσης/ταχύτητας/επιτάχυνσης - χρόνου.

(α') Επιλέγουμε $x = 0$, $u = 0$ όταν $t = 0$. Από το σχήμα, η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με κλίση $\lambda = \frac{8}{3}$, άρα

$$u(t) = \frac{8}{3}t, \;\; 0 \leq t < 3 \tag{6}$$

Από $3 \leq t < 5$, η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 8, δηλ. $u(t) = 8$, $3 \leq t < 5$. Από $5 \leq t < 9$, η ταχύτητα μειώνεται γραμμικά και δίνεται από τη σχέση

$$u(t) - 8 = \frac{-16}{4}(t-5) \Longleftrightarrow u(t) = 28 - 4t \tag{7}$$

Για την επιτάχυνση, παραγωγίζουμε τη στιγμιαία ταχύτητα και έχουμε

$$a(t) = \frac{8}{3}, \;\; 0 \leq t < 3 \tag{8}$$

και για τη θέση

$$x(t) = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{8}{3}t^2 = \frac{4}{3}t^2, \;\; 0 \leq t < 3 \tag{9}$$

ενώ για το διάστημα $3 \leq t < 5$, όπου η κίνηση είναι ομαλή, έχουμε

$$x(t) = x_i(t) + u(t)(t-3) = -12 + 8t, \;\; 3 \leq t < 5 \tag{10}$$

και $u(t) = 8$, όπως βρήκαμε νωρίτερα. Τέλος, για το διάστημα $5 \leq t < 9$ έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = -4 \tag{11}$$

και η θέση

$$x(t) = x_i(t) + u_i(t)(t-5) + \frac{1}{2}a(t)(t-5)^2 = -62 + 28t - 2t^2 \tag{12}$$

Οπότε συνολικά θα έχουμε

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t^2, & 0 \leq t < 3 \\ -12 + 8t, & 3 \leq t < 5 \\ -62 + 28t - 2t^2, & 5 \leq t < 9 \end{cases} \tag{13}$$

Μερικές ενδιαφέρουσες χρονικές στιγμές:

$$t = 3 \implies x = 12 \text{ m} \tag{14}$$

$$t = 5 \implies x = 28 \text{ m} \tag{15}$$

$$t = 7 \implies x = 36 \text{ m} \tag{16}$$

(β΄) Όπως δείξαμε,

$$a(t) = \begin{cases} \frac{8}{3}, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & 3 < t < 5 \\ -4, & 5 < t < 9 \end{cases} \tag{17}$$

Μερικές ενδιαφέρουσες χρονικές στιγμές:

$$0 < t < 3 \implies a = 2.67 \text{ m/s}^2 \tag{18}$$

$$3 < t < 5 \implies a = 0 \text{ m/s}^2 \tag{19}$$

$$5 < t < 9 \implies a = -4 \text{ m/s}^2 \tag{20}$$

Στα σημεία $t = 3, 5$, η κλίση της καμπύλης ταχύτητας αλλάζει απότομα, άρα εκεί η επιτάχυνση δεν ορίζεται γιατί δεν ορίζεται παράγωγος εκεί.

(γ΄) Προφανώς, από το προηγούμενο ερώτημα, για $t = 6$, $a_{t=6} = -4 \;\; \text{m/s}^2$.

(δ΄) Η μέση ταχύτητα ανάμεσα σε $t = 5$ και $t = 6$ s είναι

$$u_{avg} = (8+4)/2 = 6 \text{ m/s}$$

Για $t = 6$, $x_{t=6} = x_0 + u_{avg}\Delta t = x_{t=5} + u_{avg}\Delta t = 28 + 6 \times 1 = 34$ m. Το ίδιο βρίσκουμε εκτιμώντας το $x(6)$ από την αναλυτική μορφή του $x(t)$.

(ε΄) Από το διάγραμμα, $u_{t=9} = -8$ m/s. Το ίδιο βρίσκουμε εκτιμώντας το $u(9)$ από την αναλυτική μορφή του $u(t)$.

Άσκηση 4.

(α΄) Από τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta y \tag{21}$$

η ταχύτητα του εντόμου αφού τεντώσει τα πόδια του θα είναι

$$u = \sqrt{u_i^2 + 2a\Delta y} = 4 \text{ m/s} \tag{22}$$

(β΄) Ο χρόνος που απαιτείται για να πιάσει την παραπάνω ταχύτητα είναι

$$t = \frac{u_f - u_i}{a} = 1 \text{ ms} \tag{23}$$

(γ΄) Η μετατόπιση προς τα πάνω (το άλμα δηλαδή) του εντόμου από το σημείο όπου τα πόδια του εγκαταλείπουν το έδαφος και του σημείου ανώτατου ύψους όπου έχει στιγμιαία μηδενική ταχύτητα ($u_f = 0$) είναι

$$\Delta y = \frac{u_f^2 - u_i^2}{-2g} = 0.816 \text{ m} \tag{24}$$

Άσκηση 5.

(α΄) Για τη $x-$συνιστώσα της κίνησης, θα έχουμε

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{25}$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\begin{aligned} 0.01 &= 0 + 1.8 \times 10^7 t + \frac{1}{2} 8 \times 10^{14} t^2 && (26) \\ t &= \frac{-1.8 \times 10^7 \pm 1.844 \times 10^7}{8 \times 10^{14}} \text{ s} && (27) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας το θετικό χρόνο, έχουμε

$$t = 5.5 \times 10^{-10} \text{ s} \tag{28}$$

Για την $y-$συνιστώσα της κίνησης, έχουμε

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{29}$$

και άρα

$$\begin{aligned} y_f &= 0 + 0 + \frac{1}{2} 1.6 \times 10^{15} \times (5.5 \times 10^{-10})^2 \text{ m} && (30) \\ &= 2.42 \times 10^{-4} \text{ m} && (31) \end{aligned}$$

Άρα τελικά η θέση του ηλεκτρονίου στο xy επίπεδο δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_f = (10\vec{i} + 0.242\vec{j}) \text{ mm} \tag{32}$$

(β΄) Θα είναι

$$\begin{aligned} \vec{u}_f &= \vec{u}_i + \vec{a}t && (33) \\ &= 1.8 \times 10^7 \vec{i} + (8 \times 10^{14} \vec{i} + 1.6 \times 10^{15} \vec{j})(5.5 \times 10^{-10}) && (34) \\ &= 1.84 \times 10^7 \vec{i} + 8.8 \times 10^5 \vec{j} && (35) \end{aligned}$$

(γ΄) θα είναι

$$|u_f| = \sqrt{(1.84 \times 10^7)^2 + (8.8 \times 10^5)^2} = 1.84 \times 10^7 \text{ m/s} \tag{36}$$

(δ΄) Θα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_y}{u_x} = 2.73^o \tag{37}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Μπορούμε αμέσως να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του εύρους βολής R και να λύσουμε ως προς u_i, δηλ.

$$u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}} \approx 31 \text{ m/s} \tag{38}$$

(β΄) Με $u_i = 31$ m/s και $\theta_i = 45^o$, ο συνολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου είναι

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longleftrightarrow 0 = 0 + u_i\sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \frac{2u_i\sin(\theta_i)}{g} = 4.47 \text{ s} \tag{39}$$

Από τη σχέση $u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}}$ καταλαβαίνουμε ότι αν η γωνία ρίψης ήταν μεγαλύτερη από 45 μοίρες, η απαιτούμενη αρχική ταχύτητα θα αυξανόταν δεδομένου ότι το εύρος θα παρέμενε ίδιο. Επίσης, από τη σχέση $t = \frac{2u_i\sin(\theta_i)}{g}$, ο ολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου θα αυξανόταν επίσης.

Άσκηση 7.
Η οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης είναι

$$x_f = u_{x_i}t = u_i\cos(\theta_i)t \tag{40}$$

Άρα, ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το νερό στο κτήριο που απέχει d, είναι

$$t = \frac{d}{u_i\cos(\theta_i)} \tag{41}$$

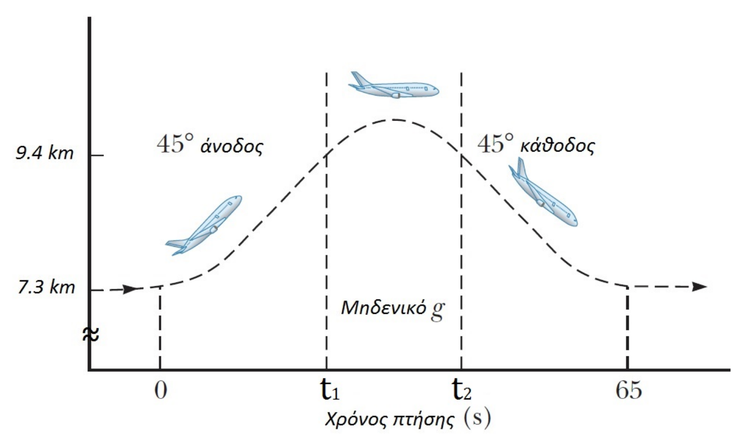
Σε αυτή τη χρονική στιγμή, το ύψος του νερού είναι

$$y_f = u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = u_i\sin(\theta_i)\Big(\frac{d}{u_i\cos(\theta_i)}\Big) - \frac{g}{2}\Big(\frac{d}{u_i\cos(\theta_i)}\Big)^2 \tag{42}$$

οπότε το ύψος h δίνεται ως

$$h = y_f = d\tan(\theta_i) - \frac{gd^2}{2u_i^2\cos^2(\theta_i)} \tag{43}$$

Άσκηση 8.



Σχήμα 2: Εκπαίδευση σε μηδενική βαρύτητα.

(α΄) Η ταχύτητα στην κορυφή της τροχιάς είναι

$$u_x = u_i \cos(\theta_i) = u_i \cos(45^o) = 101 \text{ m/s} \quad (44)$$

ενώ το ύψος που φτάνει είναι

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 + 2a_y(y_f - y_i) \quad (45)$$

$$0 = (143\sin(45^o))^2 + 2(-9.8)(y_f - 9400) \quad (46)$$

$$y_f = 9921 \text{ m} \quad (47)$$

(β΄) Για όλη τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης, είναι $u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$, και άρα

$$-101 = 101 - 9.8t \Longrightarrow t = 20.6 \text{ s} \quad (48)$$