ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

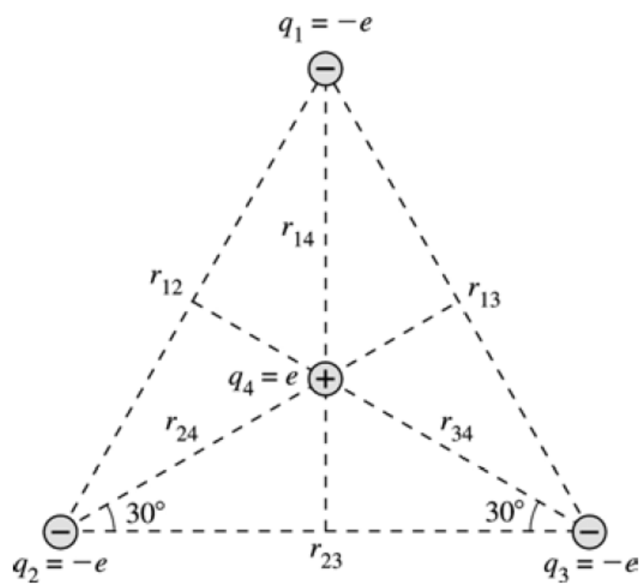
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/12/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/12/2017

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1. Δείτε το Σχήμα 1. Από τη γεωμετρία του Σχήματος, έχουμε



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

$$\frac{\frac{1}{2}r_{23}}{r_{24}} = \cos(30^o) \Longrightarrow r_{24} = \frac{r_{23}}{2\cos(30^o)} = 0.5774 \times 10^{-9} = r_{14} = r_{34} \quad (1)$$

Οι συνεισφορές στη συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$U_{12} = U_{13} = U_{23} = \frac{9 \times 10^9 \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times (-1.6 \times 10^{-19})}{10^{-9}} = 2.304 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (2)$$

$$U_{14} = U_{24} = U_{34} = \frac{9 \times 10^9 \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times (1.6 \times 10^{-19})}{0.5774 \times 10^{-9}} = -3.99 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (3)$$

Αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές, έχουμε

$$U_E = U_{12} + U_{13} + U_{23} + U_{14} + U_{24} + U_{34} = -5.1 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (4)$$

Άσκηση 2. Ο δίσκος έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου στην επιφάνειά του, άρα

$$\sigma = Q/A = \frac{Q}{\pi(R_{out}^2 - R_{in}^2)} \quad (5)$$

Αν φανταστούμε το δίσκο να βρίσκεται στο επίπεδο yz τότε το σημείο P βρίσκεται στον άξονα x, έστω σε απόσταση x από το σημείο αναφοράς. Το δυναμικό ενός δακτυλίου φορτίου dq, ακτίνας r_i, και πάχους dr θα είναι

$$dV = k_e \frac{dq}{\sqrt{r_i^2 + x^2}} \tag{6}$$

Όμως $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r_i dr$, οπότε

$$V = \int dV = 2\pi\sigma k_e \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \tag{7}$$

$$= 2\pi k_e \sigma \left[\sqrt{r^2 + x^2}\right]_{R_{in}}^{R_{out}} \tag{8}$$

$$= 2\pi k_e \sigma \left[\sqrt{R_{out}^2 + x^2} - \sqrt{R_{in}^2 + x^2}\right] \tag{9}$$

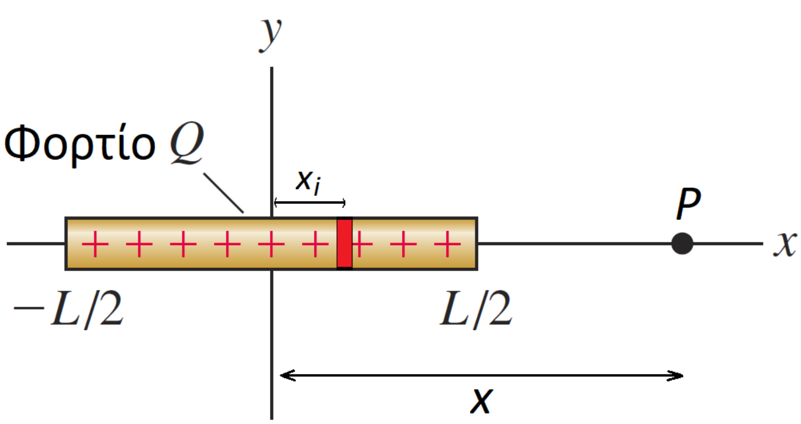
$$= 2k_e \frac{Q}{R_{out}^2 - R_{in}^2}\left[\sqrt{R_{out}^2 + x^2} - \sqrt{R_{in}^2 + x^2}\right] \tag{10}$$

Αν $R_{in} \to 0$, τότε

$$V = \frac{2k_e Q}{R_{out}^2}\left[\sqrt{R_{out}^2 + x^2} - x\right] \tag{11}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου που έχουμε βρει στις διαλέξεις.

Άσκηση 3. Έστω η ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος του Σχήματος 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 3.*

(α') "Κόβουμε" τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα μήκους dx με φορτίο dq. Το τμήμα dx_i σε τυχαία απόσταση x_i από το σημείο αναφοράς $(0,0)$ συνεισφέρει δυναμικό dV ως

$$dV = k_e \frac{dq}{x - x_i} = k_e \frac{\lambda dx_i}{x - x_i} \tag{12}$$

Συνολικά,

$$V = \int dV = k_e \lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx_i}{x - x_i} = -k_e \frac{Q}{L} \ln(x - x_i)\Big]_{-L/2}^{L/2} = k_e \frac{Q}{L} \ln \frac{x + L/2}{x - L/2} \tag{13}$$

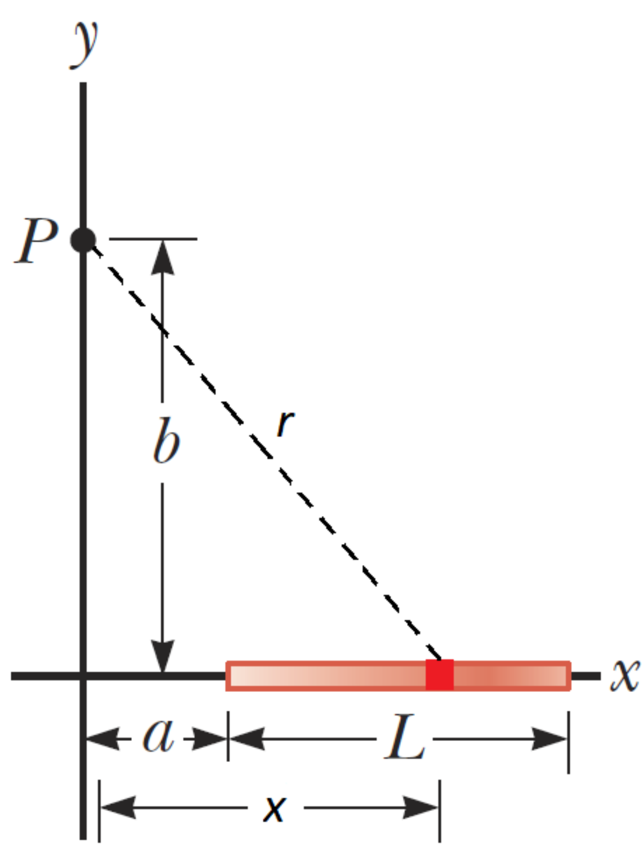
(β') Επειδή

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e \frac{Q}{L}\frac{d}{dx}(\ln(x+L/2) - \ln(x-L/2)) \tag{14}$$
$$= -k_e \frac{Q}{L}\Big(\frac{1}{x+L/2} - \frac{1}{x-L/2}\Big) \tag{15}$$
$$= -k_e \frac{Q}{L}\frac{-L}{x^2-(L/2)^2} \tag{16}$$
$$= k_e \frac{Q}{x^2-(L/2)^2} \tag{17}$$

Υποθέτοντας ότι $Q > 0$, είναι

$$\vec{E}_x = k_e \frac{Q}{x^2-(L/2)^2}\vec{i} \tag{18}$$

Άσκηση 4. Μια ράβδος με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 4.*

Ένα απειροστά μικρό τμήμα ράβδου μήκους dx και φορτίου dq συνεισφέρει δυναμικό

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+b^2}} \tag{19}$$

Συνολικά,

$$V = \int dV = k_e \lambda \int_a^{L+a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} \tag{20}$$

$$= k_e \lambda \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+b^2}}{b^2}\right)\Bigg]_a^{L+a} \tag{21}$$

$$= k_e \lambda \ln\left[\frac{a+L+\sqrt{(a+L)^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right] \tag{22}$$

αφού

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} \tag{23}$$