

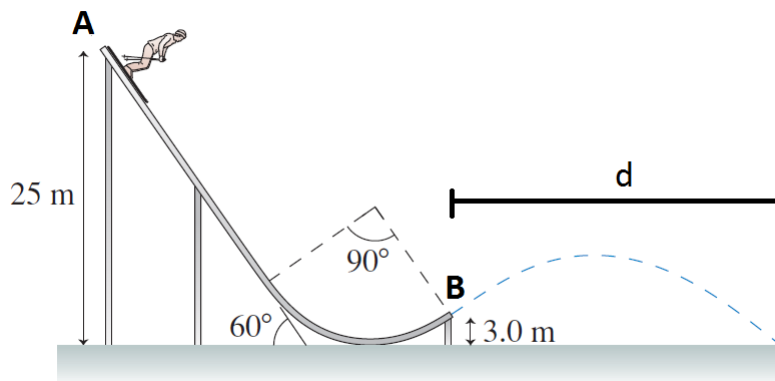
Ημερομηνία Ανάθεσης: 31/10/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 9/11/2016, ως τις 18:00

Σημείωση: Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή για τις πράξεις. Δείξτε όμως όλα τα βήματα της λύσης σας.

Άσκηση 1. Οι ανθρώπινοι τένοντες¹ μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ελατήρια. Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στους τένοντες συνεισφέρει έως και 35% της ενεργειακής ανάγκης σας κατά το τρέξιμο. Οι επιστήμονες αθλητισμού έχουν βρει ότι, κατά μέσο όρο, οι τένοντες των αθλητών εκτείνονται κατά 41 χιλιοστά, ενώ αυτοί των μη-αθλητών εκτείνονται μόνο 33 χιλιοστά. Η “σταθερά ελατηρίου” του τένοντα είναι ίδια και για τους αθλητές και για τους μη-αθλητές, και ίση με 33 N/mm. Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης ελαστικής δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στους αθλητές και στους μη-αθλητές;

Άσκηση 2. Η Ιουλία βρίσκεται σε ύψος 25 μέτρων, επάνω σε μια τσουλήθρα χωρίς τριβές (Σχήμα 1). Η



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

αρχική κλίση της τσουλήθρας είναι 60° . Στη βάση της τσουλήθρας, ένα κυκλικό τόξο την εκτοξεύει από ύψος 3 μέτρων. Δείξτε ότι η απόσταση που θα διανύσει η Ιουλία κατά το άλμα της, με αναφορά το σημείο εκτόξευσης B είναι $d = 42.6$ m.

Άσκηση 3. Στα γενέθλιά σας, αποφασίζετε να το γιορτάσετε με ένα διαφορετικό τρόπο: κάνοντας bungee jumping. Στέκεστε σε μια γέφυρα 100 m πάνω από ένα ποτάμι, και οι υπεύθυνοί σας δένουν με ένα ελαστικό σχοινί μήκους 30 μέτρων γύρω από τη μέση σας. Μοντελοποιήστε το ελαστικό σχοινί ως ένα ελατήριο με σταθερά 40 N/m. Θεωρήστε ότι η μάζα σας είναι 80 kg. Μετά από πολλούς δισταγμούς και προσευχές, αποφασίζετε να εκτελέσετε το άλμα. Δείξτε ότι η απόστασή σας από το νερό του ποταμού όταν το σχοινί-ελατήριο εκταθεί πλήρως είναι $d \approx 11$ m.

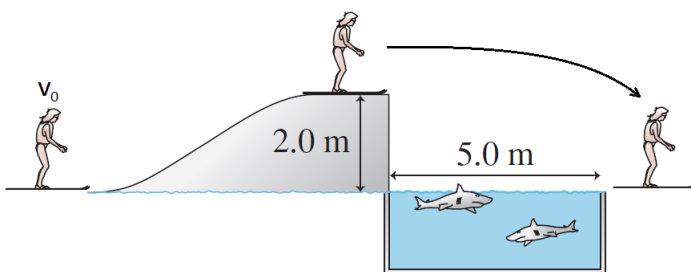
¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Tendon>

Άσκηση 4. Όταν ένας οδηγός πατάει το γκάζι σε ένα ακίνητο αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο επιταχύνει. Για τα πρώτα λίγα δευτερόλεπτα της κίνησής του, η επιτάχυνσή του αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την έκφραση

$$a(t) = 1.16t - 0.21t^2 + 0.24t^3 \quad (1)$$

με t το χρόνο σε δευτερόλεπτα και την επιτάχυνση $a(t)$ σε m/s^2 . Δείξτε ότι - απουσία τριβών ή άλλης απώλειας ενέργειας - η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μάζας $m = 1160 \text{ kg}$ κατά το διάστημα $t = 0$ ως $t = 2.5 \text{ s}$ είναι $1.38 \times 10^4 \text{ J}$.

Άσκηση 5. Βρήκατε δουλειά σε ένα circus water park για να βγάλετε τα έξοδά σας για το καλοκαίρι. Σε ένα επικίνδυνο ακροβατικό, ένας ακροβάτης πρέπει να ολισθήσει πάνω σε μια ράμπα χωρίς τριβές, σε ύψος 2 μέτρων από το έδαφος, ώστε να περάσει με ταχύτητα πάνω από μια πισίνα μήκους 5 μέτρων, γεμάτη από πεινασμένους καρχαρίες, και να προσγειωθεί με ασφάλεια στην άκρη της πισίνας, όπως στο Σχήμα 2. Μια



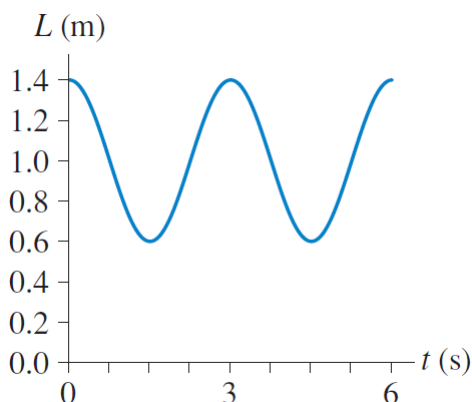
Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 5.

και οι υπεύθυνοι του πάρκου γνωρίζουν ότι παίρνετε το μάθημα της Φυσικής, σας ρωτούν με πόση ελάχιστη αρχική ταχύτητα v_0 πρέπει να ξεκινήσει ο ακροβάτης στη βάση της ράμπας, πριν κάνει το άλμα, ώστε να μην πέσει στην πισίνα με τους καρχαρίες. Τι απάντηση θα τους δώσετε;

Άσκηση 6. Η ανθρώπινη όραση θολώνει αν το κεφάλι σας δονείται με συχνότητα 29 Hz, γιατί οι δονήσεις προκαλούν συντονισμό στο σύστημα “μάτι-μυς που το συγκρατεί στη θέση του”. Αν η μάζα του ματιού σας είναι 7.5 gr, και ο μυς που το συγκρατεί μοντελοποιηθεί ως ελατήριο, δείξτε ότι η σταθερά του ελατηρίου είναι $k \approx 250 \text{ N/m}$.

Άσκηση 7. Οι αστροναύτες στο διάστημα δεν μπορούν να ζυγιστούν χρησιμοποιώντας κοινές ζυγαριές που έχουμε στα σπίτια μας.

Αντίθετα, μετρούν τη μάζα τους ταλαντούμενοι σε ένα μεγάλο ελατήριο. Υποθέστε ότι ένας αστροναύτης δένει στη ζώνη του ένα μεγάλο ελατήριο, και την άλλη του άκρη του σε ένα γάντζο στον τοίχο του διαστημικού σταθμού. Ένας συνάδελφος αστροναύτης τον τραβάει μακριά από τον τοίχο, και τον αφήνει ελεύθερο. Το μήκος του ελατηρίου συναρτηθεί του χρόνου δίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 7.

- (α) Ποιά είναι η μάζα του αστροναύτη αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 240 N/m ;
- (β) Ποιά είναι η ταχύτητα του αστροναύτη καθώς αυτός ταλαντώνεται, όταν το μήκος του ελατηρίου είναι 1.2 m ;

Άσκηση 8. Η κυματοσυνάρτηση ενός κύματος που διανύει ένα νήμα δίνεται ως

$$y(x, t) = 0.35 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

με τα x, y να μετριοούνται σε μέτρα, και το t σε δευτερόλεπτα. Αν η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι 75 gr/m , τότε

(α) δείξτε ότι ο μέσος ρυθμός μεταφοράς ενέργειας στο νήμα είναι 15.1 W .

(β) η ενέργεια που περιέχεται σε κάθε κύκλο του κύματος είναι 3.02 J .

Άσκηση 9 - bonus 10%. Στο μάθημα είδαμε ότι η γενική εξίσωση κύματος δίνεται ως

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) \quad (3)$$

με το σύμβολο $\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)$ θα συμβολίζει τη *μερική* παράγωγο του y ως προς x . Στη μερική παραγωγή, παραγωγίζουμε ως προς τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει, θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές. Είδαμε ότι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (4)$$

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$y(x, t) = \ln(b(x - ut)) \quad (5)$$

με b σταθερά, αποτελεί λύση της γενικής εξίσωσης κύματος.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$y(x, t) = e^{b(x-ut)} \quad (6)$$

με b σταθερά, αποτελεί λύση της γενικής εξίσωσης κύματος.