ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

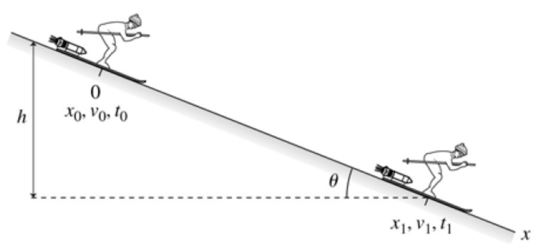
ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

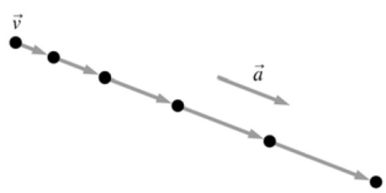
Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

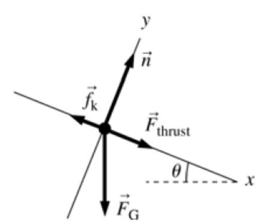
Άσκηση 1. Από το ύψος και τη γωνία που μας δίνεται, έχουμε ότι το μήκος του κεκλιμένου είναι

$$\frac{h}{\Delta x} = \sin\theta \Rightarrow \Delta x = \frac{h}{\sin\theta}$$

Ο Πάνος δεν επιταχύνει στον άξονα y, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο του Newton







για να βρούμε τη δύναμη από το κεκλιμένο στον Πάνο.

$$\sum F_y = n - F_g\cos\theta = 0 \Rightarrow n = F_g\cos\theta = mg\cos\theta = 724N$$

Από τις γνωστές εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$u^2 = u_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow a_x = \frac{u^2}{2\Delta x} = 2.78\text{m/s}^2 \tag{1}$$

Από το 2ο νόμο του Newton και από τη σχέση $f_k = \mu_k n$ έχουμε:

$$\sum F_x = F_g\sin\theta + F_{\text{thrust}} - f_k = ma_x \Rightarrow \mu_k = \frac{mg\sin\theta + F_{\text{thrust}} - ma_x}{n} = 0.165 \tag{2}$$

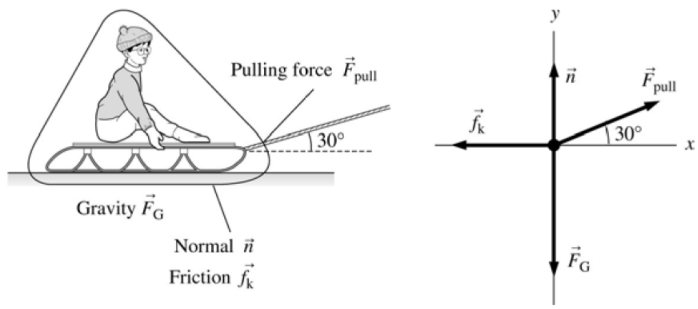
Άσκηση 2. Η συνολική δύναμη στο έλκηθρο είναι μηδέν, αφού η ταχύτητα είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η συνιστώσα της δύναμης που τραβά το έλκηθρο στο $x-$άξονα είναι ίση με το μέτρο της δύναμης τριβής ολίσθησης στον $x-$άξονα. Προσέξτε επίσης ότι $\sum F_y = 0$, αφού δεν υπάρχει κίνηση στον άξονα y. Από το 2ο νόμο του Newton στους δυο άξονες, έχουμε

$$\sum F_x = n_x + F_{G_x} + f_{k_x} + F_{\text{pull}_x} = 0 + 0 - f_k + F_{\text{pull}}\cos\theta = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_y = n_y + F_{G_y} + f_{k_y} + F_{\text{pull}_y} = n - mg + 0 + F_{\text{pull}}\sin\theta = 0 \tag{4}$$

Η πρώτη σχέση γράφεται ως

$$\mu_k n = F_{\text{pull}}\cos\theta$$



ενώ η δεύτερη ως

$$n = mg - F_{\text{pull}} \sin\theta$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\mu_k = \frac{F_{\text{pull}} \cos\theta}{mg - F_{\text{pull}} \sin\theta} = 0.077 \tag{5}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Η ελκτική ακτίνα ασκεί δύναμη στο μικρότερο σκάφος, και από τον 3ο νόμο του Newton, μια άλλη δύναμη ασκείται επάνω στο Σκάφος Voyager. Ως αποτέλεσμα, και το μεγάλο και το μικρό σκάφος κινούνται το ένα προς το άλλο. Όμως, λόγω των πολύ διαφορετικών μαζών που έχουν, οι αποστάσεις που διανύουν το καθένα είναι πολύ διαφορετικές. Έστω t_1 ο χρόνος που συναντώνται, δηλ. όταν $x_{M_1} = x_{m_1}$. Μόνο μια δύναμη ασκείται σε κάθε σκάφος, άρα ο 2ος νόμος του Newton εκφράζεται πολύ απλά. Επιπλέον, επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι δυνάμεις ζεύγους δράσης - αντίδρασης, ισχύει ότι

$$F_{M\text{ επάνω } m} = F_{m \text{ επάνω } M} = 4 \times 10^4 \text{ N} \tag{6}$$

Οι επιταχύνσεις των δυο σκαφών είναι

$$a_M = \frac{F_{m \text{ επάνω } M}}{M} = 0.020 \text{ m/s}^2 \tag{7}$$

$$a_m = \frac{F_{M \text{ επάνω } m}}{m} = -2 \text{ m/s}^2 \tag{8}$$

Η επιτάχυνση του μικρού σκάφους είναι αρνητική γιατί τα διανύσματα επιτάχυνσης και δύναμης "δείχνουν" προς τα αριστερά, δηλ. προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x. Σε χρόνο t_1, οι θέσεις των σκαφών θα είναι

$$x_{M_1} = X_{M_0} + u_{M_0} t_1 + \frac{1}{2} a_M t_1^2 \tag{9}$$

$$x_{m_1} = x_{m_0} + u_{m_0} t_1 + \frac{1}{2} a_m t_1^2 \tag{10}$$

Όταν τα σκάφη συναντούνται, ισχύει ότι $x_{M_1} = x_{m_1}$, και άρα

$$\frac{1}{2} a_M t_1^2 = x_{m_0} + \frac{1}{2} a_m t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 x_{m_0}}{a_M + |a_m|}} = 99.5 \text{ s} \tag{11}$$

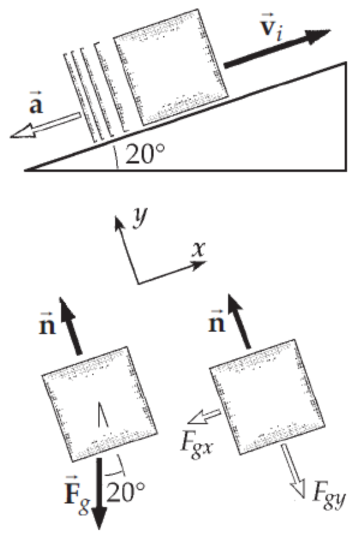
(β΄) Η θέση του Σκάφους Voyager τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$x_{M_1} = \frac{1}{2} a_M t_1^2 = 99 \text{ m} \tag{12}$$

Άσκηση 4. Βρίσκουμε το έργο της σφαίρας ολοκληρώνοντας τη δοσμένη συνάρτηση ως

$$
\begin{aligned}
W &= \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{x} && (13)\\
&= \int_0^{0.6} (15000 + 10000x - 25000x^2) \cos(0) dx && (14)\\
&= 15000x + \frac{10000}{2}x^2 - \frac{25000}{3}x^3 \Big|_0^{0.6} && (15)\\
&= 9000 + 18000 - 18000 && (16)\\
&= 9\mathbf{kJ} && (17)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 5. Μόλις το σώμα φεύγει από το χέρι μας, η ταχύτητά του αλλάζει μόνο εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους του - συγκεκριμένα της $x-$συνιστώσας. Στον $x-$άξονα, θα είναι



$$\sum F_x = ma \implies -mg\sin(20^o) = ma \implies a = -g\sin(20^o) \tag{18}$$

Επίσης, από τους νόμους της κίνησης, είναι

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i) \iff 0 = 25 - 2(9.8)\sin(20^o)(x_f - 0) \Rightarrow x_f = 3.73\text{m} \tag{19}$$

Άσκηση 6

(α΄) Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, πριν ακριβώς αρχίσει να κινείται. Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στον άξονα y, έχουμε

$$\sum F_y = ma_y \iff n = F_g + P\sin\theta \tag{20}$$

Στον οριζόντιο άξονα,

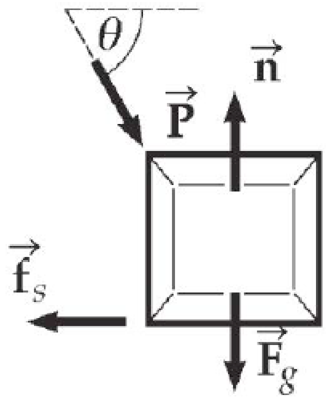
$$\sum F_x = ma_x \iff P\cos\theta = f \tag{21}$$

Όμως $f_s \leq \mu_s n$, δηλ.

$$
\begin{aligned}
P\cos\theta &\leq \mu_s(F_g + P\sin\theta) && (22)\\
P(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) &\leq \mu_s F_g && (23)\\
P(1 - \mu_s\tan\theta) &\leq \mu_s F_g \sec\theta && (24)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$P_{min} = \frac{\mu_s F_g \sec\theta}{1 - \mu_s\tan\theta} \tag{25}$$



(β΄) Για να κινηθεί το σώμα, θα πρέπει η $x-$συνιστώσα ($P\cos\theta$) να υπερβεί την τριβή $f_s = \mu_s n$:

$$P\cos\theta \geq \mu_s n = \mu_s(F_g + P\sin\theta) \tag{26}$$
$$P(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) \geq \mu_s F_g \tag{27}$$

Για να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, θα πρέπει να είναι αληθές ότι

$$(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) > 0 \Rightarrow \mu_s\tan\theta < 1 \Rightarrow \tan\theta < \frac{1}{\mu_s} \tag{28}$$

Άσκηση 7.

i. Οι δυο δυνάμεις γράφονται ως

$$\vec{F}_1 = 25(\cos 35^o\vec{i} + \sin 35^o\vec{j}) = 20.5\vec{i} + 14.3\vec{j}\ \mathrm{N} \tag{29}$$
$$\vec{F}_2 = 42(\cos 150^o\vec{i} + \sin 150^o\vec{j}) = -36.4\vec{i} + 21.0\vec{j}\ \mathrm{N} \tag{30}$$

ii. Θα είναι
$$\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15.9\vec{i} + 35.3\vec{j})\ \mathrm{N} \tag{31}$$

iii. Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = (-3.18\vec{i} + 7.07\vec{j})\ \ \mathrm{m/s^2} \tag{32}$$

iv. Τη χρονική στιγμή $t = 3$ s,

(α΄) θα είναι
$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t = -5.54\vec{i} + 23.7\vec{j}\ \mathrm{m\ /s} \tag{33}$$

(β΄) θα ειναι
$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = -2.30\vec{i} + 39.3\vec{j}\ \mathrm{m} \tag{34}$$

(γ΄) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu^2_{t=3} \approx 1.48$ kJ

(δ΄) με τη σχέση $\frac{1}{2}mu^2_{t=0} + \Sigma(\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}) = 55.6 + 1426 \approx 1480$ J, δηλ. 1.48 kJ

(ε΄) Το θεώρημα κινητικής ενέργειας - έργου είναι συνεπές με το 2ο νόμο του Newton.

Άσκηση 8.

i. Οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στις θέσεις όπου $\frac{dU}{dx} = 0$. Είναι

$$\frac{dU}{dx} = 0 \iff 1 + 2\cos(2x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}\cos^{-1}\Big(-\frac{1}{2}\Big) \tag{35}$$

Η συνάρτηση $\cos^{-1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)$ μπορεί να πάρει τις τιμές $2\pi/3$ και $4\pi/3$. Άρα υπάρχουν δυο τιμές ως θέσεις ισορροπίας, οι $x_1 = \pi/3$ και $x_2 = 2\pi/3$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

ii. Ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί σε ένα τοπικό ελάχιστο, ενώ ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχεί σε ένα τοπικό μέγιστο. Οπότε

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -4\sin(2x) \tag{36}$$

Στο σημείο x_1, έχουμε $\frac{d^2U}{dx^2}(x_1) = -2\sqrt{3}$. Αφού η $\frac{d^2U}{dx^2}$ είναι αρνητική, το σημείο x_1 είναι τοπικό μέγιστο, άρα το σημείο x_1 είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας. Στο σημείο x_2, έχουμε $\frac{d^2U}{dx^2}(x_2) = 2\sqrt{3}$. Αφού η $\frac{d^2U}{dx^2}$ είναι θετική, το σημείο x_2 είναι τοπικό ελάχιστο, άρα το σημείο x_2 είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Άσκηση 9 - bonus 10%

1. Το έργο είναι μηδενικό, καθώς το σωματίδιο κινήθηκε σε κλειστή διαδρομή, και λόγω του ότι η βαρύτητα είναι συντηρητική δύναμη, το έργο της σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

2. (α΄) Μετατροπή χημικής δυναμικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια: μια φωτιά στο τζάκι μετατρέπει χημική ενέργεια σε εσωτερική ενέργεια, στο σύστημα ξύλο+οξυγόνο.

   (β΄) Μετατροπή ενέργειας που μεταφέρεται μέσω ηλεκτρισμού σε βαρυτική δυναμική ενέργεια: ένας ανελκυστήρας μετατρέπει ηλεκτρική ενέργεια σε βαρυτική δυναμική ενέργεια.

   (γ΄) Μεταφορά ελαστικής δυναμικής ενέργειας εκτός ενός συστήματος μέσω θερμότητας: ένας δύτης που πηδά από ένα βατήρα. Ο βατήρας ταλαντώνεται και αυξάνει τη θερμοκρασία του, σταδιακά κρυώνει, μεταφέροντας την ενέργεια μέσω θερμότητας στο περιβάλλον του.

   (δ΄) Παραγωγή έργου σε ένα σύστημα με ενέργεια που μεταφέρεται μέσω μηχανικών κυμάτων: τα κύματα της θάλασσας που "σκάνε" στην παραλία, και μεταφέρουν μπρος - πίσω άμμο στην άκρη της παραλίας.

   (ε΄) Μετατροπή ενέργειας που μεταφέρεται μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε κινητική ενέργεια: ένα ηλιακό αυτοκίνητο μετατρέπει τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που δέχεται από τον ήλιο σε κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου.