

Φροντιστήριο Φυσικής ΗΥ-112

1ο Φροντιστήριο - Διανύσματα

Επιμέλεια:

Σελήσιος Στράτος

selisios@csd.uoc.gr

Ημερομηνία:

2/10/2026

Τυπολόγιο

Διανύσματα στο Επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) και στο Χώρο ($\mathbb{R}^3$)

Συντεταγμένες Διανύσματος:

Αν έχουμε δύο σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$ και $B(x_B, y_B, z_B)$, το διάνυσμα $\vec{AB}$ δίνεται από:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y, z αντίστοιχα.

Μέτρο Διανύσματος:

Για ένα διάνυσμα $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, το μέτρο του (ή μήκος του) είναι:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(Στο επίπεδο, η συνιστώσα z είναι μηδέν, άρα $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$).

Πρόσθεση Διανυσμάτων και Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό:

Αν $\vec{a} = (a_x, a_y)$ και $\vec{b} = (b_x, b_y)$, και $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y)$$

Εσωτερικό Γινόμενο:

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ένας βαθμωτός αριθμός και ορίζεται ως:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Αναλυτικά, μέσω των συνιστωσών τους ($\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ και $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Χρήσιμη ιδιότητα για τον υπολογισμό του μέτρου:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Γωνία θ Διανύσματος στο επίπεδο με τον άξονα $\xi'\xi$ ($\theta \in (-\pi, \pi]$):

Για ένα διάνυσμα $\vec{v} = (x, y)$, η γωνία θ δίνεται από:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{αν } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{αν } x < 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{αν } x < 0 \text{ και } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0 \text{ και } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0 \text{ και } y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη} & \text{αν } x = 0 \text{ και } y = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 1

Έστω τα σημεία: $P = (1, 3)$ και $Q = (2, -1)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{PQ}$.

Λύση:

Το διάνυσμα που ενώνει το σημείο $P(x_1, y_1)$ με το σημείο $Q(x_2, y_2)$ έχει συνιστώσες που προκύπτουν αφαιρώντας τις συντεταγμένες της αρχής από τις συντεταγμένες του τέλους.

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων P και Q :

$$\vec{PQ} = (2 - 1, -1 - 3) \quad (2)$$

$$\vec{PQ} = (1, -4) \quad (3)$$

Εναλλακτικά, γράφεται ως $\vec{PQ} = 1\hat{i} - 4\hat{j} = \hat{i} - 4\hat{j}$.

Άσκηση 2

Έστω τα διανύσματα: $\vec{u} = (3, 2)$ και $\vec{v} = (-2, 5)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$ και το μέτρο του.

Λύση:

Για την πρόσθεση δύο διανυσμάτων, προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες τους:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3 + (-2), 2 + 5) \quad (5)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 7) \quad (6)$$

Το μέτρο του νέου διανύσματος $|\vec{u} + \vec{v}|$ είναι:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \quad (7)$$

Για την κατεύθυνση του νέου διανύσματος, υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα $\xi\xi$:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{7}{1} = 7 \quad (8)$$

Επειδή $x > 0$ και $y > 0$ (το διάνυσμα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο), η γωνία θ δίνεται από την αντίστροφη εφαπτομένη:

$$\theta = \tan^{-1}(7) \approx 81.87^\circ \quad (9)$$

Άσκηση 3

Έστω τα διανύσματα: $\vec{u} = (3, 2)$ και $\vec{v} = (-2, 5)$. Να βρεθούν οι συνιστώσες και τα μέτρα των:

i) $3\vec{u}$

ii) $-2\vec{v}$

iii) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

Λύση:

i) Πολλαπλασιασμός διανύσματος με τον βαθμωτό 3:

$$3\vec{u} = 3 \cdot (3, 2) = (3 \cdot 3, 3 \cdot 2) = (9, 6) \quad (10)$$

Το μέτρο του $3\vec{u}$:

$$|3\vec{u}| = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} \quad (11)$$

$$(Εναλλακτικά: |3\vec{u}| = 3|\vec{u}| = 3\sqrt{3^2 + 2^2} = 3\sqrt{13} = \sqrt{9 \cdot 13} = \sqrt{117})$$

ii) Πολλαπλασιασμός διανύσματος με τον βαθμωτό -2:

$$-2\vec{v} = -2 \cdot (-2, 5) = (-2 \cdot (-2), -2 \cdot 5) = (4, -10) \quad (12)$$

Το μέτρο του $-2\vec{v}$:

$$|-2\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116} = \sqrt{4 \cdot 29} = 2\sqrt{29} \quad (13)$$

iii) Συνδυασμός πράξεων:

$$2\vec{u} = 2 \cdot (3, 2) = (6, 4) \quad (14)$$

$$3\vec{v} = 3 \cdot (-2, 5) = (-6, 15) \quad (15)$$

Άρα:

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = (6, 4) - (-6, 15) = (6 - (-6), 4 - 15) = (12, -11) \quad (16)$$

Το μέτρο του $2\vec{u} - 3\vec{v}$:

$$|2\vec{u} - 3\vec{v}| = \sqrt{12^2 + (-11)^2} = \sqrt{144 + 121} = \sqrt{265} \quad (17)$$

Άσκηση 4

Έστω τα σημεία: $A = (1, -1)$, $B = (2, 0)$, $C = (-1, 3)$, $D = (-2, 2)$.
Να βρεθεί το: $\vec{AB} + \vec{CD}$.

Λύση:

Αρχικά βρίσκουμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{CD}$.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2 - 1, 0 - (-1)) = (1, 1) \quad (18)$$

$$\vec{CD} = (x_D - x_C, y_D - y_C) = (-2 - (-1), 2 - 3) = (-1, -1) \quad (19)$$

Τώρα προσθέτουμε τα δύο διανύσματα:

$$\vec{AB} + \vec{CD} = (1, 1) + (-1, -1) = (1 + (-1), 1 + (-1)) = (0, 0) \quad (20)$$

Το αποτέλεσμα είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$. Τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{CD}$ είναι αντίθετα.

Άσκηση 5

Έστω το διάνυσμα $\vec{r} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j}$, με $\alpha, \beta > 0$. Να βρεθούν:

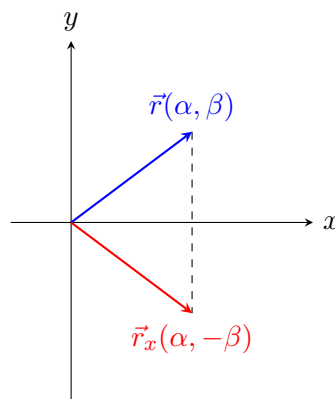
- i) Το συμμετρικό διάνυσμα του $\vec{r}$ ως προς τον άξονα ξ .
- ii) Το συμμετρικό διάνυσμα του $\vec{r}$ ως προς τον άξονα ψ .
- iii) Οι γωνίες των δύο παραπάνω διανυσμάτων.

Λύση:

Το αρχικό διάνυσμα είναι $\vec{r} = (\alpha, \beta)$ και βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο αφού $\alpha, \beta > 0$.

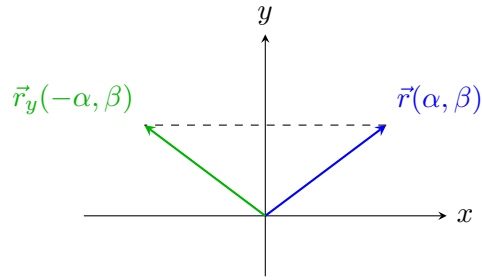
- i) Το συμμετρικό διάνυσμα $\vec{r}_x$ ως προς τον άξονα ξ θα έχει την ίδια τετμημένη αλλά αντίθετη τεταγμένη.

$$\vec{r}_x = (\alpha, -\beta) = \alpha\hat{i} - \beta\hat{j} \quad (21)$$



- ii) Το συμμετρικό διάνυσμα $\vec{r}_y$ ως προς τον άξονα ψ θα έχει αντίθετη τετμημένη αλλά την ίδια τεταγμένη.

$$\vec{r}_y = (-\alpha, \beta) = -\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} \quad (22)$$



iii) Έστω $\theta_0 = \arctan(\frac{\beta}{\alpha})$ η γωνία του $\vec{r}$ με τον θετικό ημιάξονα Ox (μιας και $\alpha > 0$).

Για το $\vec{r}_x = (\alpha, -\beta)$: Επειδή $x = \alpha > 0$, ο τύπος της γωνίας δίνει $\theta_x = \arctan(\frac{-\beta}{\alpha}) = -\arctan(\frac{\beta}{\alpha}) = -\theta_0$.

$$\theta_x = -\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (23)$$

Για το $\vec{r}_y = (-\alpha, \beta)$: Επειδή $x = -\alpha < 0$ και $y = \beta > 0$, ο τύπος της γωνίας δίνει $\theta_y = \arctan(\frac{\beta}{-\alpha}) + \pi = -\arctan(\frac{\beta}{\alpha}) + \pi = \pi - \theta_0$.

$$\theta_y = \pi - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (24)$$

Άσκηση 6

Αν $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$, δείξτε ότι:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

Λύση:

Ξεκινάμε με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{A} \cdot \vec{A}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \cdot (A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}) \quad (25)$$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A} &= A_1A_1(\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_1A_2(\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_1A_3(\hat{i} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + A_2A_1(\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_2A_2(\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_2A_3(\hat{j} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + A_3A_1(\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_3A_2(\hat{k} \cdot \hat{j}) + A_3A_3(\hat{k} \cdot \hat{k}) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (γωνία 90° άρα $\cos(90^\circ) = 0$) και έχουν μέτρο 1 ($\cos(0^\circ) = 1$). Επομένως:

- $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1$
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A} &= A_1^2(1) + 0 + 0 + 0 + A_2^2(1) + 0 + 0 + 0 + A_3^2(1) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του μέτρου ενός διανύσματος $\vec{A}$ στο χώρο, γνωρίζουμε ότι $|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$. Άρα $|\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. Συνεπώς, αποδείξαμε ότι:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (26)$$

Άσκηση 7

Δίνεται το σημείο $A(4, 3)$ και το διάνυσμα $\vec{AB} = (1, 2)$. Να βρεθούν:

- i) Οι συντεταγμένες του σημείου B .
- ii) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{OA} + 2\vec{BA}$, όπου O η αρχή των αξόνων.
- iii) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

Λύση:

- i) Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{AB}$ δίνεται από τις συντεταγμένες:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \quad (27)$$

Έχουμε $A(4, 3)$, άρα $x_A = 4$ και $y_A = 3$. Επίσης γνωρίζουμε $\vec{AB} = (1, 2)$. Εξισώνοντας τις συνιστώσες:

$$x_B - 4 = 1 \Rightarrow x_B = 5$$

$$y_B - 3 = 2 \Rightarrow y_B = 5$$

Επομένως, το σημείο B έχει συντεταγμένες $B(5, 5)$.

- ii) Το διάνυσμα θέσης του A (από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$) είναι $\vec{OA} = (4-0, 3-0) = (4, 3)$.
Το διάνυσμα $\vec{BA}$ είναι το αντίθετο του $\vec{AB}$, άρα:

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = -(1, 2) = (-1, -2) \quad (28)$$

Τώρα υπολογίζουμε το $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{OA} + 2\vec{BA} \\ \vec{u} &= (4, 3) + 2(-1, -2) \\ \vec{u} &= (4, 3) + (-2, -4) \\ \vec{u} &= (4-2, 3-4) \\ \vec{u} &= (2, -1)\end{aligned}$$

- iii) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = (2, -1)$ είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad (29)$$

Άσκηση 8

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τέτοια ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad \text{γωνία } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$$

Αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να υπολογιστούν:

- i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- ii) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.
- iii) Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

Λύση:

- i) Το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τον τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cos(\theta)$. Αντικαθιστώντας:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (1) \cdot (2) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad (30)$$

- ii) Για να βρούμε το μέτρο του $\vec{u}$, υπολογίζουμε πρώτα το τετράγωνό του μέσω του εσωτερικού γινομένου:
 $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 &= (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \\ |\vec{u}|^2 &= 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + 2(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) + (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}) \\ |\vec{u}|^2 &= 4|\vec{\alpha}|^2 + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + |\vec{\beta}|^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 &= 4(1)^2 + 4(-1) + (2)^2 \\ |\vec{u}|^2 &= 4 - 4 + 4 \\ |\vec{u}|^2 &= 4 \end{aligned}$$

Άρα, το μέτρο του $\vec{u}$ είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{4} = 2 \quad (31)$$

- iii) Έστω ϕ η γωνία μεταξύ των $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{u} = |\vec{\alpha}||\vec{u}| \cos(\phi) \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{u}}{|\vec{\alpha}||\vec{u}|} \quad (32)$$

Υπολογίζουμε πρώτα το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{u} &= \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \\ &= 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \\ &= 2|\vec{\alpha}|^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \\ &= 2(1)^2 + (-1) \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Τώρα επιστρέφουμε στον τύπο της γωνίας (γνωρίζοντας $|\vec{\alpha}| = 1$ και βρήκαμε $|\vec{u}| = 2$):

$$\cos(\phi) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad (33)$$

Επομένως, η γωνία είναι:

$$\phi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (60^\circ) \quad (34)$$